PRODUTO ESCALAR

Definição Algébrica do Produto Escalar:

Considerando o espaço $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$, chamamos de Produto Escalar de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, o número real dado por:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2}$$

Observações:

• O produto escalar também é conhecido como produto interno (ou ainda multiplicação interna) e pode ser indicado por $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \circ \vec{w}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ (lê-se: $\vec{u}$ escalar $\vec{w}$). A notação $\vec{u} \times \vec{w}$ para o produto escalar já está em desuso, e a utilizaremos mais adiante para representar o produto vetorial.

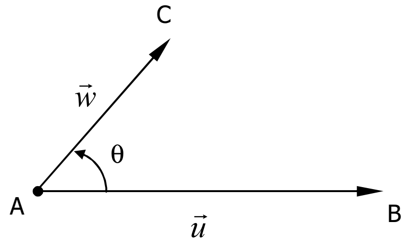
• Observe que: $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u}$ (propriedade comutativa).

• Para o caso de se trabalhar somente no plano, ou seja, no $\mathbb{R}^2$, apenas suprime-se a coordenada "z".

Definição Geométrica do Produto Escalar:

Considerando os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ não nulos e "θ" o ângulo entre eles, então o Produto Escalar de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ pode ser escrito por:

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| . |\vec{w}| . \cos \theta}$ (com $0 \leq \theta \leq 180°$).



Ângulo entre dois vetores:

O ângulo entre dois vetores é definido como sendo o menor ângulo que um vetor deve girar ao encontro do outro vetor para que se tornarem colineares. Desta forma, utilizaremos o ângulo θ com a seguinte variação: $0 \leq \theta \leq 180°$.

Da igualdade $\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| . |\vec{w}| . \cos \theta$, vista anteriormente, temos:

$\boxed{\cos \theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| . |\vec{w}|}}$ como sendo a fórmula a partir da qual se calcula o ângulo θ entre dois vetores não nulos.

Se θ for o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, então podemos escrever $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$

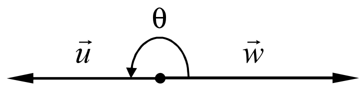
Normalmente, encontraremos os ângulos em duas unidades: o grau (º) e o radiano (rad).
A conversão entre as unidades pode ser feita através de uma regra de três simples e direta: $\boxed{180° \rightarrow \pi \text{ rad}}$

Lembretes:
- Uma volta completa possui 360º ou 2π rad.
- As calculadoras científicas trabalham com os ângulos em três unidades: DEG (grau), RAD (radiano) e GRAD (grados).

• A seguir, tem-se as possíveis situações no estudo do ângulo θ e do produto escalar de dois vetores não nulos:

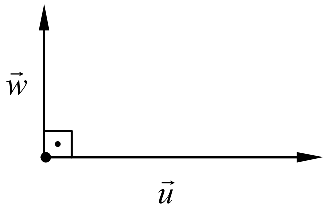
$\theta = 0° \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos (equiversos) $\cos 0° = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} > 0$

↳ $\vec{u} // \vec{w}$



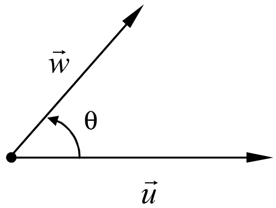
$\theta = 180° \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{w}$ são paralelos (contraversos) $\cos 180° = -1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} < 0$

↳ $\vec{u} // \vec{w}$

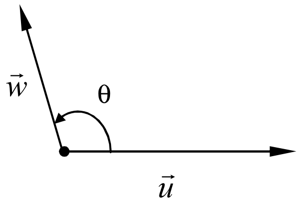


θ = 90º (ângulo reto) $\Rightarrow$ $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares ($\vec{u} \perp \vec{w}$)

cos 90º = 0 $\Rightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$



0 < θ < 90º (ângulo agudo) $\Rightarrow$ cos θ > 0 $\Rightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{w} > 0$



90º < θ < 180º (ângulo obtuso) $\Rightarrow$ cos θ < 0 $\Rightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{w} < 0$

Observações:

• Nulidade do produto escalar:
$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, se:

i) Um dos vetores for nulo;
ii) Os dois vetores forem ortogonais (perpendiculares) entre si, ou seja, θ = 90º [Lembre-se que: cos 90º = 0].

A partir disso podemos escrever: $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ e $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$; e particularmente: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

Vale lembrar os versores (base canônica) dos eixos cartesianos: $\vec{i}$ = (1 , 0 , 0), $\vec{j}$ = (0 , 1 , 0) e $\vec{k}$ = (0 , 0 , 1).

• Em particular, o vetor nulo $\left(\vec{0}\right)$ é perpendicular a qualquer outro vetor e escrevemos: $\vec{0} \perp \forall \vec{u}$.

Enfatizando:
Para os vetores $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$ temos que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{w}$ (o produto escalar é zero para vetores ortogonais).

EXEMPLOS:

1) Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 8\vec{k}$ e $\vec{w} = \left(4,\ \sqrt{2}, -5\right)$ determine o valor de $\vec{w} \cdot \vec{u}$.

2) Mostre que, para qualquer que seja o vetor $\vec{u}$, teremos: **a)** $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

3) Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ e 120º o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

4) Provar que o triângulo de vértices A(2, 3, 1), B(2, 1, –1) e C(2, 2, –2) é retângulo em B.

5) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ = (2, 1, –1) e $\overrightarrow{AB}$, sabendo que A(3, 1, –2) e B(4, 0,– 4).

6) Determine um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1$ = (1, –1, 0) e $\vec{v}_2$ = (1, 0, 1).

EXERCÍCIOS – Produto Escalar

1) Mostrar que os pares de vetores dados são ortogonais: **a)** $\vec{v}$ = (1, –2, 3) e $\vec{w}$ = (4, 5, 2) **b)** $\vec{i}$ e $\vec{j}$

2) Dados os vetores $\vec{u}$ = (1, 1, 0) e $\vec{w}$ = (0, 1, 0), calcule o valor de $\vec{u} \cdot \vec{w}$ pelas definições algébrica e geométrica.
Sugestão: faça uma representação no $\mathbb{R}^3$ para auxiliar o cálculo de $\vec{u} \cdot \vec{w}$ através da definição geométrica.

3) Seja o triângulo de vértices A(–1, –2, 4), B(– 4, –2, 0) e C(3, –2, 1). Determinar o ângulo interno aos vértices B e A.

4) Os pontos A, B, C são vértices de um triângulo eqüilátero com lado de 10cm. Calcule o produto escalar entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

5) Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo A(2, 1, 3), B(3, 3, 5) e C(0, 4, 1).

6) Calcular "n" para que seja de 30º o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ = (1, n, 2) e $\vec{j}$.

7) Dados os vetores $\vec{a}$ = (2, 1, m), $\vec{b}$ = (m+2, –5, 2) e $\vec{c}$ = (2m, 8, m), determinar o valor de "m" para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

8) Determinar os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, –1) e C(–1, 2, 1).

9) Sabendo que o ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ = (2, 1, –1) e $\vec{v}$ = (1, –1, m+2) é $\pi/3$, determinar "m".

10) Provar que os pontos A(5, 1, 5), B(4, 3, 2) e C(–3, –2, 1) são vértices de um triângulo retângulo.

11) Qual o valor de "m" para que os vetores $\vec{a} = m\,\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (m+1)\,\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

12) Determinar o vetor $\vec{w}$, paralelo ao vetor $\vec{u}$ = (2, –1, 3), de modo que $\vec{w}\cdot\vec{u}$ = – 42.

13) Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v}$ = (2, –1, 1).

14) Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em Â) medem 5, 12 e 13. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

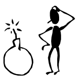
15) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}|$ = 5, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v}\cdot\vec{w}$ = 6 e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

16) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v}\cdot\vec{v}_1$ = 10 e $\vec{v}\cdot\vec{v}_2$ = –5, sendo $\vec{v}_1$ = (2, 3, –1) e $\vec{v}_2$ = (1, –1, 2).

17) Determine o menor ângulo formado entre duas diagonais de um mesmo cubo. **Sugestão:** desenhe um cubo no $\mathbb{R}^3$.

☺ Teste sua atenção e organização com o exercício 18!

18) Dados os vetores $\vec{u}$ = (1, a, –2a –1), $\vec{v}$ = (a, a–1, 1) e $\vec{w}$ = (a, –1, 1), determine "a" tal que $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$.



19) Calcular o módulo dos vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}|$ = 4, $|\vec{v}|$ = 3 e que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60º.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) Utilize o produto escalar! **2)** $\vec{u}\cdot\vec{w}$ = 1 **3)** $\hat{B}$ = 45º e $\hat{A}$ = 90º **4)** 50 **5)** $\hat{A}$ **6)** $\pm\sqrt{15}$ **7)** {– 6, 3}

8) $\hat{A}$ = arc cos $\frac{5}{\sqrt{63}}$ ≅ 51º, $\hat{B}$ = arc cos $\frac{\sqrt{24}}{9}$ ≅ 57º e $\hat{C}$ = arc cos $\frac{2}{\sqrt{42}}$ ≅ 72º **9)** – 4 **10)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ **11)** {–3, 2}

12) (– 6, 3, –9) **13)** Um deles é $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **14)** 169 **15)** (4, 3, 0) ou (– 4, 3, 0) **16)**(–1, 4, 0)

17) Aprox. 70º **18)** a = 2 **19)** $\sqrt{37}$ e $\sqrt{13}$

Para refletir: Bem melhor arriscar coisas grandiosas mesmo expondo-se à derrota, do que formar fila com os pobres de espírito, os quais vivem nessa penumbra cinzenta, e não conhecem nem vitória, nem derrota. (Theodore Roosevelt)