PRODUTO VETORIAL

Anteriormente vimos que, a cada par de vetores, podemos associar um número real, chamado de **produto escalar** entre estes dois vetores. Através desse produto escalar, conseguimos obter várias informações sobre vetores, como por exemplo, ângulos entre dois vetores e ângulos entre um vetor e os eixos coordenados. Chegamos até a resolver alguns exercícios de geometria euclidiana fazendo uso do mesmo!

Pois bem, vamos falar um pouco de um novo produto entre dois vetores: o produto vetorial. Diferentemente do produto escalar, o **produto vetorial** entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é um **vetor**! Veja se você entendeu: enquanto o produto escalar é um número, o produto vetorial é um vetor; e este vetor tem várias características importantes e peculiares. Vamos então à definição de produto vetorial.

Definição:

Considerando o espaço $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\vec{u}$ = (x_1, y_1, z_1) e $\vec{w}$ = (x_2, y_2, z_2), chamamos de Produto Vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, o vetor $\vec{u}\times\vec{w}$ definido por:

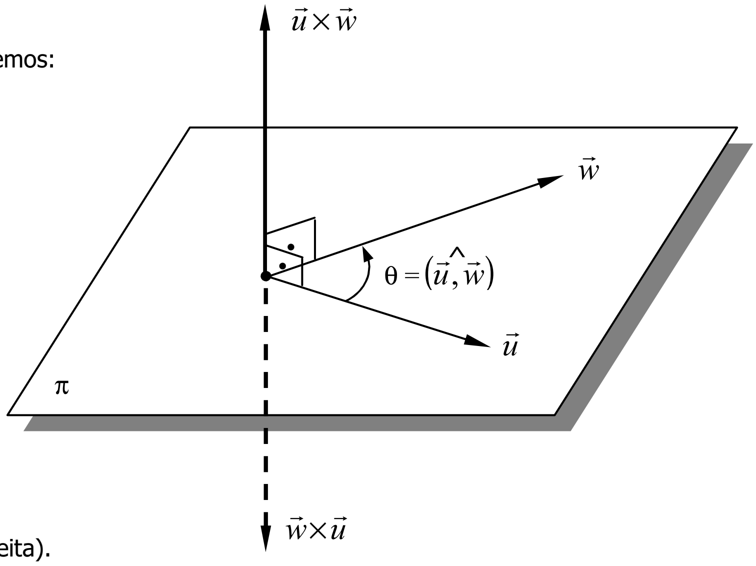
$$\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Considerações Importantes:

• O produto vetorial também é conhecido como produto externo (ou ainda produto cruzado) e pode ser indicado por $\vec{u}\times\vec{w}$ ou $\vec{u}\wedge\vec{w}$ (lê-se: $\vec{u}$ vetorial $\vec{w}$).

• Para "simplificar" o cálculo do produto vetorial, usaremos:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$



• Observe que: $\vec{u}\times\vec{w} = -(\vec{w}\times\vec{u})$ (propriedade anti-comutativa).

• Direção de $\vec{u}\times\vec{w}$: é perpendicular (ortogonal) aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ simultaneamente.

• Sentido de $\vec{u}\times\vec{w}$: $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}\times\vec{w}$ nesta ordem, formam um triedro positivo (segue a regra da mão direita).

• Módulo de $\vec{u}\times\vec{w}$: $\boxed{|\vec{u}\times\vec{w}| = |\vec{u}|.|\vec{w}|.\text{sen}\,\theta}$ (com 0 ≤ θ ≤ 180º). Note que: $|\vec{u}\times\vec{w}| = |\vec{w}\times\vec{u}|$.

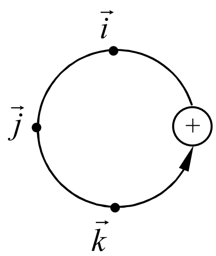
• Nulidade do produto vetorial:

$\vec{u}\times\vec{w} = \vec{0}$, se:
i) Um dos vetores for nulo;
ii) Os dois vetores forem paralelos entre si, ou seja, θ = 0º ou θ = 180º.

A partir disso podemos escrever: $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}$ e $\vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$; e particularmente: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$.

• Em particular, os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, nesta ordem, formam um triedro positivo.

De uma forma prática, utiliza-se o esquema ao lado para determinar o produto vetorial de dois desses versores, cujo resultado é o "versor faltante", de sinal positivo se o sentido for anti-horário e negativo se no sentido horário. Veja alguns exemplos:



$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ $\quad$ $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$ $\quad$ $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$ $\quad$ $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

Enfatizando:

Para os vetores $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$ temos:

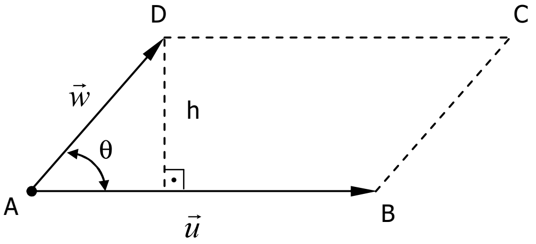
$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{w}$ (o produto escalar é zero para vetores ortogonais)

$\vec{u}\times\vec{w} = \vec{0} \iff \vec{u}\,//\,\vec{w}$ (o produto vetorial é o vetor nulo para vetores paralelos)

OUTRAS APLICAÇÕES DO PRODUTO VETORIAL

• Cálculo de Áreas (Paralelogramo e Triângulo)

Seja o paralelogramo ABCD, definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$.



Através da geometria plana, sabemos que a área de um paralelogramo é o produto de sua base pela altura, ou seja,

S_{ABCD} = base . altura Neste caso temos:

base = $|\vec{u}|$ e **altura** = $|\vec{w}|$. sen θ , pois tem-se que: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{cat.\,op.}{hip.} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{|\vec{w}|} \therefore h = |\vec{w}|.\operatorname{sen}\theta$

Substituindo em **S_{ABCD} = base . altura** , temos:

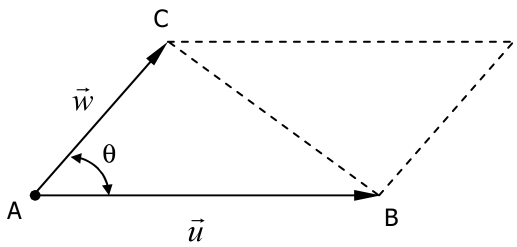
$S_{ABCD} = |\vec{u}|.|\vec{w}|.\operatorname{sen}\theta$

Ou seja:

$$\boxed{S_{ABCD} = |\vec{u}\times\vec{w}|}$$

↳ A área de um paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é numericamente igual ao módulo do produto vetorial desses vetores.

Face o exposto acima, facilmente escrevemos:



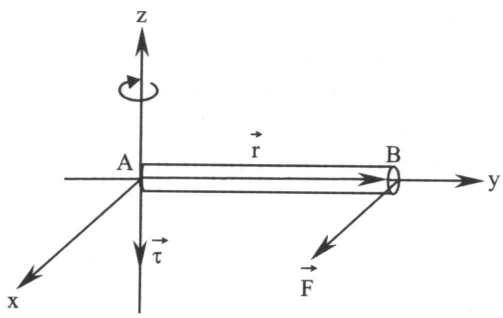
$$\boxed{S_{ABC} = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{w}|}{2}}$$

↳ A área de um triângulo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é numericamente igual ao módulo do produto vetorial desses vetores, dividido por dois.

• Torque (Momento de uma força)

O torque é uma grandeza física vetorial (representado por τ) e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.
O torque pode ser calculado através da equação abaixo:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}}$$



onde $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado. A intensidade (módulo) do torque será calculado através da equação:

$\boxed{|\vec{\tau}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.\operatorname{sen}\theta}$, onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.