PRODUTO MISTO

Definição:

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, o produto misto (ou multiplicação mista) destes três vetores é o **número real** representado por $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, quanto tomados nessa ordem.

O produto misto também pode ser indicado por $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w})$ e para calculá-lo, basta resolvermos o determinante formado pelas coordenadas dos três vetores em questão. Veja:

Sabemos que: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$ (definição de produto vetorial)

Então: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1 . \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 . \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 . \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ (aplicação de produto escalar)

Segue que: $\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$

Propriedades do Produto Misto:

Nulidade: $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}) = 0$, se:

- Pelo menos um dos vetores for nulo;
- Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem coplanares;
- Se dois deles forem paralelos.

Troca de sinal: O produto misto $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Se hipoteticamente tivermos $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}) = 10$, então $(\vec{v}\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{w}) = -10$.
Então, se num produto misto $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w})$ ocorrer:
- Uma permutação de vetores, haverá a troca de sinal do produto misto.
- Duas permutações de vetores, não haverá alteração no valor do produto misto.

Isto acarreta que: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO MISTO

Geometricamente, o produto misto dado por $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w})$ é igual, **em módulo**, ao **volume do paralelepípedo** de arestas determinadas pelos vetores não-coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Ou seja: $\boxed{\text{Volume Paralelepípedo} = \left| (\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}) \right|}$

Como exemplo, considere o paralelepípedo composto pelos vetores:

$\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 7, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 5)$.

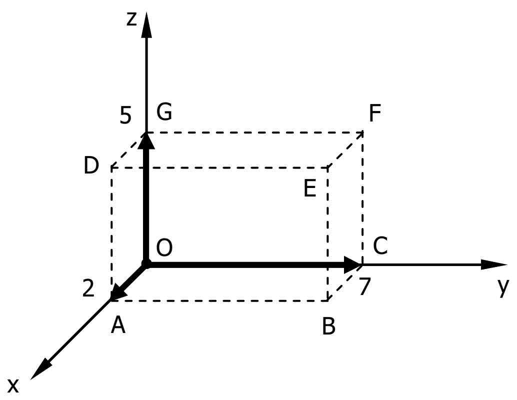
Neste caso é fácil de verificar o volume do paralelepípedo gerado, pois os vetores são ortogonais entre si e estão sobre os eixos coordenados.

Daí tem-se que o volume V pode ser assim calculado:

V = (área da base OABC).(altura OG)

V = (2 . 7).5

V = 70 u.v. [Obs.: u.v. $\rightarrow$ unidades de volume]



Agora, aplicando o produto misto (em módulo) dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, teremos:

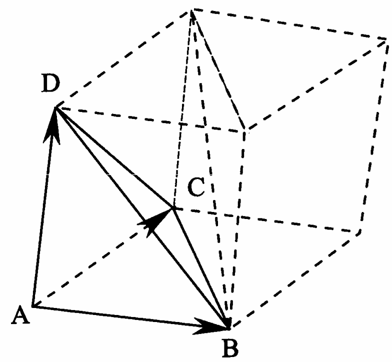
$$\text{Volume Paralelepípedo} = |(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2.7.5 = 70$$

Portanto, V = 70 u.v.

Decorrente do exposto até então, podemos também calcular o **volume de um tetraedro** gerado por três vetores não coplanares. Veja:

Sejam os pontos A, B, C e D não coplanares. Então os vetores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ também são não coplanares. Assim sendo, os vetores em questão determinam um paralelepípedo (veja figura abaixo) cujo volume é:

$V_{paralelepípedo} = \left|(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD})\right|$ ou ainda: $V_{paralelepípedo} = |(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})|$



Este paralelepípedo, por sua vez, pode ser repartido em dois prismas de base triangular ABC (veja figura) de mesmo tamanho e assim o volume $\mathbf{V_{prisma}}$ de cada um dos prismas será metade do volume do paralelepípedo, ou seja:

$$V_{prisma} = \frac{1}{2}\cdot V_{paralelepípedo}$$

Por outro lado, através da Geometria Espacial, sabemos que um prisma pode ser dividido em três pirâmides de mesmo volume. Neste caso, considerando o prisma de base triangular ABC, temos que uma das pirâmides será o **tetraedro** ABCD. Como o volume da pirâmide (que neste caso é um tetraedro) é 1/3 do volume do prisma, teremos:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\cdot V_{prisma}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot V_{parelelepípedo}\right]$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot V_{paralelepípedo}$$

$$\boxed{\text{Volume Tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})|}$$

EXEMPLOS:

1) Sejam A(1, 2, –1), B(5, 0, 1), C(2, –1, 1) e D(6, 1, –3) vértices de um tetraedro. Pede-se:

a) o seu volume;
b) a sua representação geométrica;
c) a sua altura relativa ao vértice D.

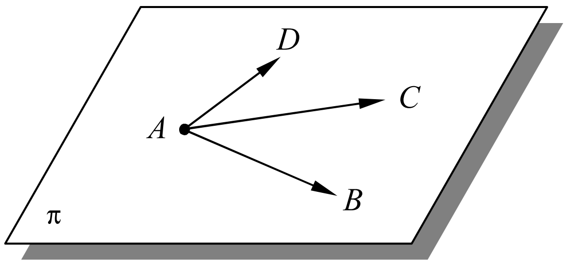
2) Verifique se os pontos A(1, 2, 4), B(–1, 0, –2), C(0, 2, 2) e D(–2, 1, –3) estão no mesmo plano.

Resolução:

Os quatro pontos dados A, B, C e D serão coplanares (estarão no mesmo plano) se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também forem coplanares (veja o esquema abaixo). Então devemos ter $(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC},\, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Inicialmente devemos escrever os vetores:

Esquema



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,-2)-(1,2,4) = (-2,-2,-6)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\,2,\,2)-(1,\,2,\,4) = (-1,\,0,\,-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-2,\,1,-3)-(1,2,4) = (-3,-1,-7)$$

Calculando o produto misto entre os vetores, temos:

$$(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC},\, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0-12-6-(0-4-14) = -18+18 = 0$$

Como $(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC},\, \overrightarrow{AD}) = 0$, os vetores em questão são coplanares.
Logo, os pontos dados A, B, C e D são coplanares.

EXERCÍCIOS – Produto Misto

1) Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1,\,1)$, $\vec{v} = (1,\,2,\,2)$ e $\vec{w} = (2,\,0,-3)$, determine:

a) $(\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ **b)** $(\vec{w},\, \vec{u},\, \vec{v})$

2) Sabendo que $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 2$, calcule:

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})$ **b)** $(\vec{u}\times\vec{w})\cdot(3\vec{v})$

3) Os vetores $\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ são coplanares? Justifique sua resposta.