APOSTILA DE ÁLGEBRA LINEAR

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Chefe do Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE
Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page: www.joinville.udesc.br/dmat/rogerio

Professores Integrantes do Projeto de Álgebra II
Graciela Moro - Coordenadora
Ivanete Zucki
João de Azevedo
Jorge Mota
Marnei Luis Mandler
Milton Procópio de Borba

Rogério de Aguiar

25 de Março de 2008

Sumário

1 MATRIZES E SISTEMAS **3**

1.1 Tipos de matrizes . . . 3
1.2 Operações com matrizes . . . 6
1.3 Matriz escalonada . . . 8
1.4 Cálculo da inversa . . . 10
1.5 Determinantes . . . 11
1.6 **Sexta lista de exercícios** . . . 14
1.7 Sistema de equações lineares . . . 16
1.7.1 Introdução . . . 16
1.7.2 Sistemas e matrizes. . . . 17
1.7.3 Solução de um sistema por matriz inversa . . . 20
1.8 **Sétima lista de exercícios** . . . 21
1.9 Apêndice . . . 24
1.9.1 Cálculo da inversa por adjunta . . . 24
1.9.2 Regra de Cramer . . . 25

2 ESPAÇOS VETORIAIS **29**

2.1 Introdução . . . 29
2.2 Subespaços . . . 36
2.3 Intersecção de dois Subespaços Vetoriais . . . 38
2.4 Combinação Linear . . . 40
2.5 Dependência e Independência Linear . . . 41
2.6 Subespaços Gerados . . . 43
2.7 Soma de Subespaços . . . 45
2.8 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial . . . 46
2.8.1 Base . . . 46
2.8.2 Dimensão . . . 49
2.8.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais . . . 50
2.8.4 Coordenadas . . . 50
2.9 Mudança de Base . . . 51
2.10 A Inversa da Matriz de Mudança de Base . . . 56
2.11 **Oitava lista de exercícios** . . . 57

3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES **62**
3.1 Propriedades das Transformações Lineares 66
3.2 Transformações Lineares e Matrizes 72
3.2.1 Transformação linear associada a uma matriz 72
3.2.2 Matriz de uma transformação linear 74
3.3 Composição de transformações lineares 79
3.4 A Inversa de uma transformação linear 79
3.5 Nona lista de exercícios 82

4 OPERADORES LINEARES **87**

4.1 Transformações especiais no plano e no espaço 87
4.2 Propriedades dos operadores inversíveis 109
4.2.1 Matrizes Semelhantes 111
4.3 Operadores autoadjuntos e ortogonais 112
4.4 Décima lista de exercícios 113

4.5 Autovalores e Autovetores 115
4.5.1 Autovalores e autovetores de uma matriz 116
4.5.2 Polinômio Característico. 117
4.6 Décima primeira lista de exercícios 123

5 APLICAÇÕES **126**

5.1 Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia Cartográfica 126
5.2 Aplicações de espaços vetoriais na computação gráfica 127
5.3 Aplicações de autovalores e autovetores na engenharia civil . . . 133
5.3.1 O Problema de autovalor na avaliação de modelos estruturais de edificações 133

Capítulo 1

MATRIZES E SISTEMAS

1.1 Tipos de matrizes

Definição: Chama-se matriz de ordem $m \times n$ a uma tabela de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: Costumamos denotar as matrizes por letras latinas maiúsculas:A, B, C, ...

Matriz coluna: É a matriz de ordem $m \times 1$.

$$A = [1]_{1\times 1}\,, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 999 \\ 1000 \end{bmatrix}_{1000\times 1}$$

Matriz linha: É a matriz de ordem $1 \times n$.

Exemplo 1 *:*

$A = [1]_{1\times 1}\,, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -10 \end{bmatrix}_{1\times 8}$

Matriz nula: É a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ onde $a_{ij} = 0$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2 *:*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N = [0]$$

Observação: Denotaremos freqüentemente a matriz nula por $\mathbf{0}$.
Matriz quadrada: É a matriz de ordem $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da forma a_{ii} costituem a diagonal principal
Os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a diagonal secundária.

Exemplo 3 *:* $A = [0]_{1\times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: Matriz diagonal é a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notação: $diag(A) = \{a_{11}, \cdots, a_{nn}\}$

Exemplo 4 *:* $A = [0]_{1\times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: É a matriz diagonal I onde $diag(I) = \{1, \cdots, 1\}$.
Notação: I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 5 *:*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada a transposta de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ..... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ..... & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Exemplo 6 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 2 & 12 & 22 & 32 & 42 \\ 3 & 13 & 23 & 33 & 43 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 5 & 15 & 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}_{1\times 6} \Rightarrow D^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Matriz simétrica: Uma matriz quadrada $S = [a_{ij}]$ é simétrica se $S^T = S$

Exemplo 7 *:*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simétrica: Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é anti-simétrica se $A^T = -A$.

Exemplo 8 *:* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz triangular superior: A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ é chamada matriz triagular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{10000}$$

Matriz triangular inferior: A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ é chamada matriz triangular inferior.

Exemplo 9 *:*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes

Adição: Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ definimos $A + B$ por,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Propriedades:
i) $A + B = B + A$
ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$
iii) $A + \mathbf{0} = A$

Multiplicação por escalar: Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real definmos $k \cdot A$ por

$$kA = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 10 *:* $-2 \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Propriedades:
i) $k(A + B) = kA + kB$
ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
iii) $0 \cdot A = \mathbf{0}$
iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Multiplicação de Matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, definimos $A \cdot B$ por $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Observe que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

Exemplo 11 *:*

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{array}\right]_{3\times 2} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{array}\right]_{2\times 2} = \left[\begin{array}{cc} 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4 \\ 4\cdot 1+2\cdot 0 & 4\cdot(-1)+2\cdot 4 \\ 5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-1)+3\cdot 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{array}\right]$$

Propriedades da multiplicação de matrizes:

i) $AI = IA = A$

ii) $A(B+C) = AB + AC$

iii) $(A+B)C = AC + BC$

i v) $(AB)C = A(BC)$

v) $(AB)^T = B^T A^T$

vi) $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Propriedades da matriz transposta

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, onde λ é um númerto real

iii) $(A^T)^T = A$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Matriz inversa: Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, se existir uma matriz B que satisfaça $AB = BA = I$ diz-se que B é a inversa de A e denota-se B por A^{-1}, ou seja, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Exemplo 12 *:*

$$A = \left[\begin{array}{cc} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{array}\right], \qquad A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{array}\right].$$

Dizemos que uma matriz A é inversível (não singular) se existe a matriz inversa A^{-1}, caso contrário dizemos que a matriz A é não inversível (singular).

Algumas propriedades importantes:

I) A é não singular se o determinante de A é diferente de zero. A é singular se determinante de A é igual a zero.

ii) Se A admite inversa ($\det A \neq 0$) esta é única

iii) Se A é não singular, sua inversa A^{-1} também é, isto é, se $\det A \neq 0$ então $\det A^{-1} \neq 0$. A matriz inversa de A^{-1} é A.

iv) A matriz identidade I é não singular (pois $\det I = 1$) e $I^{-1} = I$

v) Se a matriz A é não singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é , $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, dai concluimos que se $\det A \neq 0$ então $\det A^T \neq 0$.

vi) Se as matrizes A e B são não singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não singular. Vale a relação $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemplo 13 *:*

$$A = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow \det \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{array}\right] = -2 \Rightarrow A \text{ é não singular}$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow \det \left[\begin{array}{cc} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{array}\right] = 0 \Rightarrow A \text{ é singular}$$

Matriz ortogonal: Uma matriz M, quadrada, cuja inversa conicide com sua transposta é denominada matriz ortogonal. Portanto M é ortogonal se $M^{-1} = M^T$, ou seja,

$$MM^T = M^T M = I$$

Exemplo 14 *:* $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$,

Potência de uma matriz: Dada uma matriz quadrada A a matriz $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot ..... \cdot A}_{p\ vezes}$ é chamada potência p de A.

Exemplo 15 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix}$$

1.3 Matriz escalonada

Definição: Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada, ou escalonada, se:

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é,. daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

d) Se as linhas $1, ..., p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_1, então $k_1 < k_2 < ..... < k_n$.

Exemplo 16 *:*

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale b).

2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale a) e b).

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale c).

4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é forma escada.

Operações elementares linha: São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1^o) Permuta da $i - ésima$ e $j - ésima$ linha ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Exemplo 17 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2^o) Multiplicação da $i-ésima$ linha por um escalar não nulo k ($L_i \to kL_i$).

Exemplo 18 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3^o) Substituição da $i-ésima$ linha pela $i-ésima$ linha mais k vezes a $j-ésima$ linha ($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo 19 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é *linha equivalente* a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notação $A \sim B$.

Exemplo 20 *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pois,}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \to -L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 4L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Toda matriz A de ordem $m \times n$ é linha equivalente a uma única matriz linha-reduzida à forma escada.

Exemplo 21 *: Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

obtenha uma única matriz B na forma escada linha equivalente a matriz A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_1 \to \tfrac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \to L_3 - 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_2 \to \tfrac{1}{3}L_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + \tfrac{1}{2}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \to -\frac{2}{13}L_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$L_1 \to L_1 - \frac{3}{2}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 22 *Dada a matriz A obtenha uma matriz na forma escada equivalente a matriz dada.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Posto de uma matriz: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada, linha equivalente à matriz A. O *posto* de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B e a *nulidade* de A é $n-p$, onde n é o número de colunas de A e p é o posto de A.

Exemplo 23 *: Encontrar o posto e a nulidade das matrizes:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: A matriz A é linha equivalente a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$ portanto o posto de A é 3 (o número de linhas não nulas da matriz B) e a nulidade é $n-p = 4-3 = 1$ (n é o numero de colunas da matriz A e p é o posto de A)

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: posto $A = 2$ e nulidade de A é $3-2 = 1$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução posto de $A = 3$ e nulidade de A é 0

1.4 Cálculo da inversa

Cálculo da inversa por escalonamento: Para se determinar a matriz inversa de uma matriz A, não singular, através de operações elementares entre as linhas da matriz fazemos o seguinte:

a) Coloca-se ao lado da matriz A a matriz I, separada por um traço vertical tracejado.

b) Transforma-se por meio de operações elementares a matriz A na matriz I, aplicando simultaneamente à matriz I colocada ao lado da matriz A as mesmas operações elementares aplicadas à matriz A.

Exemplo 24 *: Calcular inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *por escalonamento.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \to \tfrac{1}{2}L_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 4L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - \tfrac{1}{2}L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5 Determinantes

Definição: Determinante de uma matriz A é um número real associado à matriz A. Notação: $\det A$.

Denotamos também o determinante da matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propriedades do determinante:

1) $\det A = \det A^T$

2) $\det(AB) = \det A \det B$

3) Se a matriz A possui uma linha ou coluna nula então $\det A = 0$

4) Se a matriz A tem duas linhas ou colunas iguais então $\det A = 0$

5) Se na matriz A uma linha (ou coluna) é múltipla de outra linha (coluna) então $\det A = 0$

6) Trocando a posição de duas linhas (colunas) o derminante muda de sinal

7) Quando se multiplica uma linha (coluna) de uma matriz A por um número $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado por esse mesmo número.

8) O determinante de uma matriz A não se altera quando se faz a seguinte operação entre linha: $L_i \to L_i + kL_j$.

9) O determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto do elementos da diagonal principal.

10) A partir de $\det(AB) = \det A \det B$ temos

$\det(AA^{-1}) = \det I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

Cálculo do determinante por triangulação. Para se calcular o determinante de uma matriz A usamos as operações elementares linha de modo a obter uma matriz triangular superior (ou inferior) observando as propriedades do determinante e fazendo as compensações necessárias.

Exemplo 25 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_3$ (Quando permutamos as linhas o determinante troca de sinal)

$(-1)\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} L_1 \to \frac{1}{2}L_1$(Quando multiplicamos uma linha por um número o det. fica multiplicado pelo mesmo número)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + (-3)L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix}$ (Esta operação não altera o determinante)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{matrix}$ (Esta operação não altera o determinante)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$(O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal)

$\frac{1}{2}(-1)\det A = \frac{1}{2} \Rightarrow \det A = -1$

Cálculo do determinante por desenvolvimento de Laplace:

Regra de Chió

Se a matriz A é de ordem 2×2 então:

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5 * 3 - 2 * 1 = 13$

Regra de Sarrus

Se A é é de ordem 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \nearrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow\nearrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$

Desenvolvimento de Laplace

Para uma matriz de ordem $n \times n$ usamos o desenvolvimento de Laplace qué é dado pela fórmula.

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida a partir da matriz A eliminando-se a $i - ésima$ linha e a $j - ésima$ coluna da matriz A. Se chamarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ então

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Exemplo 26 *:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz fazendo o desenvolvimento pela primeira linha (note que seria mais conveniente desenvolver pela segunda linha, pois ela possui dois elementos nulos).

$$\det A = -1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$\det A = (-1)(1)(-6) + 2(-1)(-12) + (3)(1)(10) + (-4)(-1)(78)$

$\det A = 372.$

1.6 Sexta lista de exercícios

1. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

   (a) ( ) Se uma matriz quadrada A for ortogonal então $\det A = \pm 1$.

   (b) ( ) $\det(I + A) = 1 + \det A$

   (c) ( ) Se A é uma matriz simétrica então $A + A^T$ também é simétrica.

   (d) ( ) Se A e B são inversíveis então $A + B$ também é.

   (e) ( ) Se A é uma matriz anti-simétrica de ordem 3, então $\det A = 0$

   (f) ( ) Se A é não-inversível e $AB = 0$ então $B = 0$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x - 1 & 0 \end{bmatrix}$

   Determine o valor de x para que A seja uma matriz simétrica.

3. Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica, ou seja, $A = S + N$ onde S é uma matriz simétrica e N é uma matriz anti-simétrica. Sugestão: Determine S e N em função da matriz A.

4. Suponha que $A \neq 0$ e $AB = AC$ onde A, B, C são matrizes tais que a multiplicação esteja definida. Pergunta-se:

   (a) $B = C$?

   (b) Se existir uma matriz Y, tal que $YA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

5. Mostre que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   é uma matriz ortogonal.

6. Sejam P e Q matrizes ortogonais de mesma ordem.

   (a) PQ é uma matriz ortogonal? Justifique sua resposta.

   (b) Quais os valores que $\det Q$ pode ter?

7. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$ mostre que a matriz AA^T é uma matriz simétrica de ordem $m \times m$. A matriz $A^T A$ é simétrica? Qual sua ordem?

8. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz

$$\begin{array}{l} \\ Moderno \\ Mediterrâneo \\ Colonial \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Ferro & Madeira & Vidro & Tinta & Tijolo \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

   (a) Se ele vai construir 5,7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

   (b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 reais. Qual o preço unitário de cada tipo de casa?

   (c) Qual o custo total do material empregado?

9. Calcule o determinante de A onde

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

10. Mostre que $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

11. Encontre A^{-1}, onde

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

12. Encontre os valores d k para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 0 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 \\ -5 & 0 & k+5 \end{bmatrix}$$

é não inversível.

13. Existe alguma matriz "inversível"X tal que $X^2 = 0$? Justifique sua resposta.

14. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa, em que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Para a matriz $A = (a_{ij})$de ordem 2 definida por $a_{ij} = i + j$, calcular $f(t) = det(A - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

16. Para a matriz definida por:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

calcular $f(t) = det(A - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

1.7 Sistema de equações lineares

1.7.1 Introdução

Uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

na qual $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e b é o termo independente. Os números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e o termo independente b geralmente são números conhecidos e as variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as incógnitas.

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes das equações lineares.

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistema de equações lineares e tem a seguinte representação:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema de equações lineares em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação constituem sua solução.

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** quando admitem a mesma solução.

Exemplo 27 *Os sistemas*

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 11 \\ -x + y = -3 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} 10x - 2y = 38 \\ -3x + 5y = -7 \end{array}$$

são equivalentes pois possuem as mesmas soluções, $x = 4$ *e* $y = 1$

Quanto as soluções, três casos podem ocorrer:

1) O sistema possui uma única solução. Neste caso dizemos que os sistema é compatível e determinado

2) O sistema possui infinitas soluções. Neste caso dizemos que o sistema é compatível e indeterminado.

3) O sistema não possui nenhuma solução. Neste caso dizemos que o sistema é incompatível.

1.7.2 Sistemas e matrizes.

Dado um sistema linear na forma,

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.1}$$

podemos representa-lo matricialmente utilizando as notações da teoria de matrizes da seguinte maneira:

Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema (1.1) na forma matricial:

$$AX = B$$

onde A é a **matriz dos coeficientes,** B a matriz coluna dos termos independentes e X é a matriz coluna das incógnitas.

Ao sistema (1.1) associamos a seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

que chamamos **matriz ampliada** do sistema.

Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Dada a matriz ampliada do sistema de equações lineares consideramos a matriz linha reduzida a forma escada obtida a partir da matriz ampliada do sistema:

Teorema:

1) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

2) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$ (número de colunas da matriz dos coeficientes, ou números de variáveis) a solução é única.

3) Se as duas matrizes tem o mesmo posto e $p \neq n$ podemos escolher $n - p$ incógnitas e as outras incógnitas serão dadas em função destas. O número $n-p$ é chamado grau de liberdade do sistema.

Resumo: Dado um sistema de m equações e n incógnitas seja A_a a matriz ampliada do sistema e seja A_e a matriz linha equivalente a matriz A_a onde a matriz dos coeficientes estão na forma escada. Seja p_a o posto da matriz ampliada e p_c o posto da matriz dos coeficientes obtidos a partir da matriz A_e.

- Se $p_a \neq p_c$ então o sistema é incompatível (não possui solução)
- Se $p_a = p_c$ então o sistema é compatível (possui solução). Seja $p = p_a = p_c$, se $p = n$ então o sistema é compatível e determinado (possui uma única solução). Se $p < n$ o sistema é compatível e indeterminado (possui infinitas soluções). Sempre que um sistema possuir infinitas soluções deveremos atribuir valores a algumas variáveis e determinar o valor das outras variáveis em função destas. O número de variáveis as quais deveremos atribuir valor é o grau de liberdade do sistema, dado pelo número $n - p$.

1) Classificar e resolver o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & -12 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Solução:

Matriz Ampliada

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right]$$

Matriz linha equivalente a matriz ampliada, onde a parte da matriz dos coeficientes está na forma escada

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

De A_e obtemos: $p_c = 3$, $p_a = 3$ e $n = 3$.

$p = p_c = p_a = 3 \Rightarrow$ sistema compatível

$p = n \Rightarrow$ sistema compatível e determinado (possui uma única solução)

A matriz A_c é a matriz ampliada do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Como sistemas equivalentes tem a mesma solução, a solução do sistema (1.2) é

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4y + 2x + 6z &= -6 \\ -4z - 2y + 3x &= -38 \\ x + 3z + 2y &= -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z &= -6 \\ 3x - 2y - 4z &= -38 \\ x + 2y + 3z &= -3 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{41}{4} \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Neste caso temos:

$n = 3$

$p_a = 2$

$p_c = 2 \Rightarrow p = 2$

$p < n \Rightarrow$sistema compatível e indeterminado (infinitas soluções)

grau de liberdade $= n - p = 1$

O sistema (1.3) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & - & \frac{1}{4}z & = & -\frac{41}{2} \\ y & + & \frac{13}{8}z & = & \frac{29}{8} \end{cases}$$

Para encontrar uma solução (note que existem infinitas soluções) devemos atribuir valor a uma das variáveis (pois o grau de liberdade é 1) e determinar as outras. Note que fica mais fácil se atribuirmos valor a variável z : Por exemplo fazendo $z = 0$ temos e $x = -\frac{41}{4}$ e $y = \frac{29}{8}$ (Poderíamos atribuir outro valor qualquer a z, e para cada valor de z teremos os valores correspondentes de x e y, daí temos infinitas soluções)

3) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 2z & = & 3 \\ x + y + z & = & 1 \\ 3x - 2y - z & = & 1 \end{cases}$$

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Neste caso:
$n = 3$
$p_c = 2$
$p_a = 3 \Rightarrow p_a \neq p_c \Rightarrow$sistema incompatível (não possui solução)

1.7.3 Solução de um sistema por matriz inversa

Usando a notação matricial para sistemas lineares temos

$$\begin{aligned} CX &= B \text{ (supondo que existe } C^{-1}) \\ C^{-1}CX &= C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\ IX &= C^{-1}B \\ X &= C^{-1}B \end{aligned}$$

Logo para se determinar a solução basta multiplicar a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes (pela esquerda, já que a multiplicação de matrtizes não é comutativa). Se a matriz C não tem inversa então ou o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Exemplo 28 *:*

$$\begin{cases} -2x + 3y - z & = & 1 \\ x - 3y + z & = & 1 \\ -x + 2y - z & = & 1 \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$CX = B$$

$$X = C^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1.8 Sétima lista de exercícios

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo a matriz ampliada do sistema inicial e escrevendo o sistema final do qual se obterá a solução do sistema original:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 11 \\ 4x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 4 \end{cases}$$

2. Considere o sitema linear $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$. Para que valores de a e b o sistema

   (a) tem uma infinidade de soluções?

   (b) tem única solução?

   (c) é impossível?

3. Reduza as matrizes à forma escada através de operações linhas:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Determine k para que o sistema admita solução

$$\begin{cases} -4x + 3y &= 2 \\ 5x - 4y &= 0 \\ 2x - y &= k \end{cases}$$

5. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= -1 \end{cases}$$

6. Apresente todos os possíveis resultados na discussão de um sistema não-homogêneo de 6 equações lineares com 4 incógnitas.

7. Se A é uma matriz 3×5, quais são os possíveis valores da nulidade de A? E se A for 4×2?

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes são todos nulos.

   (a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

   (b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo

   $$\begin{cases} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + kz &= 0 \end{cases}$$

   tenha uma solução distinta da solução trivial.

10. Se $\det A = 0$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ tem infinitas soluções ? Justifique sua resposta.

11. Podemos resolver um sistema usando matriz inversa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

    Isto é útil quando desejamos resolver vários sistemas lineares que possuem a mesma matriz dos coeficientes.

    Usando a teoria acima resolva os sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ e

    a) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 100 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1000 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 111 \\ 311 \\ 511 \end{bmatrix}$

12. Resolva o sistema matricial $D^{-1}X = A$ onde $D = diag(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

	Costura	Cola
Capa Mole	1 min	2 min
Capa Dura	2 min	4 min
Luxo	3 min	5 min

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Classifique o sistema e exiba uma solução, caso ela exista:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z &= -6 \\ 3x - 2y - 4z &= -38 \\ x + 2y + 3z &= -3 \end{cases}$$

14. Uma editora publica um best-seller potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encardenação de luxo. cada exemplar necessita de um certo tempo para costura e cola conforme mostra a tabela abaixo:

    Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola, 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia, de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

15. Num grande acampamento militar há 150 blindados dos tipos BM3, BM4 e BM5, isto é, equipados com 3, 4 e 5 canhões do tipo MX9 respectivamente. O total de canhões disponíveis é igual a 530. A soma dos BM4 com os BM5 corresponde aos 2 / 3 dos BM3. Se para o início de uma manobra militar, cada canhão carrega 12 projéteis, quantos projéteis serão necessários para o grupo dos BM4 no início da operação?

16. a) Em cada parte, use a informação da tabela para determinar se o sistema $AX = B$ é **possível**. Se for, determine o **número de variáveis livres** da solução geral. Justifique sua resposta.

(a) i.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Tamanho de A	3×3	9×5	4×4	3×3
Posto de A	2	3	0	3
Posto de $[A\,\vert B]$	3	2	0	3

    b) Para cada uma das matrizes da tabela acima determine se o sistema homogêneo $AX = B$, é **possível**. Indique a **quantidade de soluções** para cada caso.

1.9 Apêndice

1.9.1 Cálculo da inversa por adjunta

Dada uma matriz , lembramos que o cofator d_{ij} do elemento a_{ij} da matriz A é o elemento $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, onde A_{ij} é a submatriz de A obtida extraindo-se a $i-ésima$ linha e a $j-ésima$ coluna. Com estes cofatores forma-se uma nova matriz A, denomindada matriz dos cofatores denotada por $\overline{A}$. Portanto

$$\overline{A} = [d_{ij}]$$

onde $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Exemplo 29 *:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \Rightarrow d_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{12} = 1 \Rightarrow d_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (-19) = 19$$

$$a_{13} = 0 \Rightarrow d_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{21} = -3 \Rightarrow d_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (5) = -5$$

$$a_{22} = 1 \Rightarrow d_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (10) = 10$$

$$a_{23} = 4 \Rightarrow d_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -1 * (11) = -11$$

$$a_{31} = 1 \Rightarrow d_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 * (4) = 4$$

$$a_{32} = 6 \Rightarrow d_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -1 * (8) = -8$$

$$a_{33} = 5 \Rightarrow d_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 1 * (5) = 5$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de *matriz adjunta* de A à transposta da matriz dos cofatores de A e denotaremos *adj* A. Portanto *adj* $A = \overline{A}^T$.

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa se e somente se $\det A \neq 0$. Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA)$$

1.9.2 Regra de Cramer

Um outro método de resolução de sistemas lineares de ordem $n \times n$ é a Regra de Cramer onde as soluções do sistema linear são calculadas usando o determinante. Justamente por usar o determinante este método torna-se inviável computacionalmente, mas é bastante prático em certas questões teóricas.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Na forma matricial este sistema é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det C \neq 0$ e portanto que C tenha inversa C^{-1} obtemos

$$\begin{array}{rcl} CX & = & B \\ C^{-1}CX & = & C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\ IX & = & C^{-1}B \\ X & = & C^{-1}B \end{array}$$

usando a relação

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(adjC)$$

temos

$$X = \frac{1}{\det C}(adjC)B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} adj \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \left(\begin{bmatrix} D_{11} & Da_{12} & \cdots & Da_{1n} \\ Da_{21} & Da_{22} & \cdots & Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ Da_{n1} & Da_{n2} & \cdots & Da_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} b_1 D_{11} + & b_2 Da_{12} & + \cdots + & b_n Da_{1n} \\ b_1 Da_{21} + & b_2 Da_{22} & + \cdots + & b_n Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ b_1 Da_{n1} & b_2 Da_{n2} & \cdots & b_n Da_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det C} \left(b_1 D_{11} + b_2 Da_{12} + \cdots + b_n Da_{1n} \right)$$

$$x_1 = \frac{1}{\det C} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

Analogamente

$$x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

$i = 2, 3, ..., n$

Podemos escrever esta relação na forma

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

onde

$$D_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Cramer podemos classificar um sistema $n \times n$:

Se $D \neq 0$ então o sistema possui uma única solução (compatível e determinado)

Se $D = 0$ e algum dos $D_i \neq 0$ então o sistema é incompatível

Se $D = 0$ e todos os $D_i = 0$, para $i = 1, ..., n$ então o sistema possui infinitas soluções. Note que não podemos determinar o grau de liberdade pela Regra de Cramer.

Exemplo 30 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10x + 10y = 20 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = 0$$

Logo o sistema possui infinitas soluções.

Exemplo 31 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 20x + 20y - 20z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 20 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 20 & -20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 20$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 20 & 20 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Como $D_2 = 20$ e $D_3 = -1$ o sistema é incompatível

Exemplo 32 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

Logo o sistema tem uma única solução

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

A solução é

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \\ x_3 &= \frac{D}{D_3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício: Usando a Regra de Cramer faça a classificação de um sistema homogêneo $AX = 0$

Capítulo 2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 Introdução

Álgebra linear é uma parte da Álgebra que, por sua vez, é um ramo da Matemática na qual são estudados matrizes, espaços vetoriais e transformações lineares. Todos esses itens servem para um estudo detalhado de sistemas lineares de equações. É um fato histórico que a invenção da Álgebra Linear ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da matemática.

Tanto a álgebra Linear como a Geometria Analítica aplicam-se a várias áreas, em especial às Engenharias. Citamos, a seguir, alguma delas. É claro que neste curso não conseguiremos aborda-las todas. Contudo, nosso objetivo no momento é que o estudante tome contato com o que representa o estado da arte neste contexto.

· *Jogos de Estratégia:* no jogo de roleta o jogador dá seu lance com uma aposta e o cassino responde com o giro da roleta; o lucro para o jogador ou para o cassino é determinado a partir destes dois movimentos. Esses são os ingredientes básicos de uma variedade de jogos que contêm elementos tanto de estratégia quanto de acaso. Os métodos matriciais podem ser usados para desenvolver estratégias otimizadas para os jogadores.

· *Administração de Florestas:* o administrador de uma plantação de árvores de Natal quer plantar e cortar as árvores de uma maneira tal que a configuração da floresta permaneça inalterada de um ano para outro. O administrador também procura maximizar os rendimentos, que dependem de número e do tamanho das árvores cortadas. Técnicas matriciais podem quantificar este problema e auxiliar o administrador a escolher uma programação sustentável de corte.

· *Computação gráfica:* uma das aplicações mais úteis da computação grá-

fica é a do simulador de vôo. As matrizes fornecem uma maneira conveniente de lidar com a enorme quantidade de dados necessários para construir e animar os objetos tridimensionais usados por simuladores de vôo para representar um cenário em movimento. Outras aplicações mais simples em computação gráfica são: vetores e matrizes – são utilizados em espaços de cores(RGB, HSV, etc), em coordenadas e transformações geométricas em duas e três dimensões, em combinações convexas e lineares de pontos(curvas e superfícies spline), em representação compacta de sessões cônicas, etc.; coordenadas homogêneas e geometria projetiva – utilizando comumente para representar consistentemente transformações afins e processos de projeção(paralela, perspectiva, modelos de câmera virtual): números complexos – em rotação no plano e também em processamento de imagens, incluindo transformadas de co-seno, Fourier, etc.; quatérnios – rotação espaciais e implementação de cinemática inversa(resolver problemas de posicionamento de juntas articuladas).

· *Redes Elétricas:* circuitos elétricos que contenham somente resistências e geradores de energia podem se analisados usando sistemas lineares derivados das leias básicas da teoria de circuitos.

· *Distribuição de Temperatura de Equilíbrio*: uma tarefa básica da ciência e da engenharias, que pode se reduzida a resolver um sistema de equações lineares através de técnicas matriciais interativas, é determinar a distribuição de temperatura de objetos tais como a do aço saindo da fornalha.

· *Cadeias de Markov:* os registros meteorológicos de uma localidade específica podem ser usados para estimar a probabilidade de que vá chover em um certo dia a partir da informação de que choveu ou não no dia anterior. A teoria das cadeias de Markov pode utilizar tais dados para prever, com muita antecedência, a probabilidade de um dia chuvoso na localidade.

· *Genética*: os mandatários do Egito recorriam a casamentos entre irmãos para manter a pureza da linhagem real. Este costume propagou e acentuou certos traços genéticos através de muitas gerações. A teoria das matrizes fornece um referencial matemático para examinar o problema geral da propagação de traços genéticos.

· *Crescimento Populacional pó Faixa Etária:* a configuração populacional futura pode ser projetada aplicando álgebra matricial às taxas, especificas por faixas etárias, de nascimento e mortalidade da população. A evolução a longo prazo da população depende das características matemáticas de uma matriz de projeção que contém os parâmetros demográficos da população.

· *Colheita de Populações Animais*: a colheita sustentada de uma criação de animais requer o conhecimento da demografia da população animal. Para

maximizar o lucro de uma colheita periódica, podem ser comparadas diversas estratégias de colheita sustentada utilizando técnicas matriciais que descrevem a dinâmica do crescimento populacional.

· *Criptografia:* durante a Segunda Guerra Mundial, os decodificadores norte americanos e britânicos tiveram êxito em quebrar o código militar inimigo usando técnicas matemáticas e máquinas sofisticadas (por exemplo, a Enigma). Hoje me dia, o principal impulso para o desenvolvimento de códigos seguros é dado pelas comunicações confidencias entre computadores e em telecomunicações.

· *Construção de Curvas e Superfícies pó Pontos Específicos*: em seu trabalho "Principia Mathematica" (os princípios matemáticos da Filosofia Natural) I. Newton Abordou o problema da construção de uma elipse por cinco pontos dados. Isto ilustraria como encontrar a órbita de um cometa ou de um planeta através da análise de cinco observações. Ao invés de utilizarmos o procedimento geométrico de Newton, podemos utilizar os determinantes para resolver o problema analiticamente.

· *Programação Linear Geométrica:* um problema usual tratado na área de programação linear é o da determinação de proporções dos ingredientes em uma mistura com o objetivo de minimizar seu custo quando as proporções variam dentro de certos limites. Um tempo enorme do uso de computadores na administração e na indústria é dedicado a problemas de programação linear.

· *O problema na Alocação de Tarefas*: um problema importante na indústria é o do deslocamento de pessoal e de recursos de uma maneira eficiente quanto ao custo. Por exemplo, uma construtora pode querer escolher rotas para movimentar equipamento pesado de seus depósitos para os locais de construção de maneira a minimizar a distância total percorrida.

· *Modelos Econômicos de Leontief*: num sistema econômico simplificado, uma mina de carvão, uma ferrovia e uma usina de energia necessitam cada uma de uma parte da produção das outras para sua manutenção e para suprir outros consumidores de seu produto. Os Modelos de produção de Leontief podem ser usados para determinar o nível de produção necessário às três indústrias para manter o sistema econômico.

· *Interpolação Spline Cúbica*: as fontes tipográficas PostScript e TrueType usadas em telas de monitores e por impressoras são definidas por curvas polinomiais por partes denominadas splines. Os parâmetros que os determinam estão armazenados na memória do computador, um conjunto de parâmetros para cada um dos caracteres de uma particular fonte.

· *Teoria de Grafos:* a classificação social num grupo de animais é uma relação que pode ser descrita e analisada com a teoria de grafos, Esta teoria também tem aplicações a problemas tão distintos como a determinação de rotas de companhias aéreas e a análise de padrões de votação.

· *Tomografia Computadorizada*: um dos principais avanços no diagnóstico médico é o desenvolvimento de métodos não invasivos para obter imagens de seções transversais do corpo humano, como a tomografia computadorizada e a ressonância magnética. Os métodos da Álgebra Linear podem ser usados para reconstruir imagens a partir do escaneamento por raios X da tomografia computadorizada.

· *Conjuntos Fractais:* conjuntos que podem ser repartidos em versões congruentes proporcionalmente reduzidas do conjunto original são denominadas fractais. Os fractais são atualmente aplicados à compactação de dados computacionais. Os métodos de Álgebra Linear podem ser usados para construir e classificar fractais

· *Teoria do Caos*: os pixels que constituem ema imagem matricial podem ser embaralhados repetidamente de uma mesma maneira, na tentativa de torna-los aleatórios. Contudo, padrões indesejados podem continuar aparecendo no processo. A aplicação matricial que descreve o processo de embaralhar ilustra tanto a ordem quanto a desordem que caracterizam estes processos caóticos.

· *Um Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana*: o ouvido interno contém uma estrutura com milhares de receptores sensoriais ciliares. Estes receptores, movidos pelas vibrações do tímpano, respondem a freqüências diferentes de acordo com sua localização e produzem impulsos elétricos que viajam até o cérebro através do nervo auditivo. Desta maneira, o ouvido interno age como um processador de sinais que decompõe uma onda sonora complexa em um espectro de freqüências distintas.

· *Deformações e Morfismos*: você já deve ter visto em programas de televisão ou clips musicais imagens mostrando rapidamente o envelhecimento de uma mulher ao longo do tempo, ou a transformação de um rosto de mulher no de uma pantera, a previsão de como seria hoje o rosto de uma criança desaparecida há 15 anos atrás, etc. Estes processos são feitos a partir de algumas poucas fotos. A idéia de continuidade, de evolução do processo, é feita através do computador.Este processo de deformação é chamado de morfismo, que se caracteriza por misturas de fotografias reais com fotografias modificadas pelo computador. Tais técnicas de manipulação de imagens têm encontrado aplicações na indústria médica, cientifica e de entretenimento.

Produto de dez anos de intensa pesquisa e desenvolvimento, o primeiro

ônibus espacial dos EUA (lançado em 1981) foi uma vitória da engenharia de controle de sistemas, envolvendo muitas áreas da engenharia - aeronáutica, química , elétrica, hidráulica e mecânica. Os sistemas de controle de ônibus espacial são absolutamente críticos para vôo. Ele requer um constante monitoramento por computador durante o vôo atmosférico. O sistema de vôo envia uma sequência de comandos para a superfície de controle aerodinâmico. Matematicamente , os sinais de entrada e saída de um sistema de Engenharia são funções. É importante para as aplicações que essas funções possam ser somadas e multiplicadas por escalares. Essas duas operações em funções tem propriedades algébricas que são completamente análogas às operações de soma de vetor e multiplicação de vetor por escalar no $\mathbb{R}^n$. Por esse motivo, o conjunto de todas as entradas possíveis (funções) é chamado de um **espaço vetorial**. A fundamentação matemática para a engenharia de sistemas repousa sobre espaços vetoriais de funções, portanto precisamos estender a teoria de vetores do $\mathbb{R}^n$ de modo a incluir tais funções.

Antes de apresentarmos a sua definição, analisaremos em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $F(\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$.

A soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R})$ é definida como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Note também que se $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar o escalar α pela função f , da seguinte forma:

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

resultando num elemento de $F(\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$ podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{nxn}$$

que é um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

Com relação à multiplicação do escalar α pela matriz $A \in \mathbb{R}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{nxn}$$

o qual também $\in M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois exemplos acima, com a adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm em comum?

Verfica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $F(\mathbb{R})$ e para α, $\beta \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + f$
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$
3. Se g representa a função nula então $f + g = f$

4. $f + (-f) = 0$
5. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$
6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
7. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
8. $1f = f$

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B, e C em M_n e para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Se 0 representa a matriz nula então $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $1A = A$

Observamos que o conjunto das funções bem como o das matrizes, quando munidos de soma e multiplicação por escalar, apresentam propriedades algébricas comuns. Existem muitos outros exemplos de conjuntos que apresentam as mesmas propriedades acima. Para não estudarmos separadamente cada conjunto, estudaremos um conjunto genérico e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas as operações de adição e multiplicação por escalar.

Definição 33 *Um espaço vetorial V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores, u e $v \in V$ faz corresponder um novo vetor denotado por $u + v \in V$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor denotado por αv, chamado produto de α por v. Estas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v e $w \in V$ as seguintes propriedades:*

1. Comutatividade: $u + v = v + u$
2. Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Vetor nulo: existe um vetor nulo $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$
4. Inverso aditivo: Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $-v + v = 0$

5. Distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
6. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Multiplicação por 1: $1.u = u$

Exemplo 34 *Para todo número natural n, o símbolo* $\mathbb{R}^n$ *representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de* $\mathbb{R}^n$ *são as listas ordenadas (chamadas n-uplas)* $u = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n), v = (y_1, y_2, y_3, ...y_n)$ *de números reais. Por definição a igualdade vetorial* $u = v$ *significa as n igualdades numéricas*

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ...x_n = y_n.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...\alpha x_n)$$

Verifica-se sem dificuldades, que estas definições fazem do $\mathbb{R}^n$ um E. V. (verifique).

Exemplo 35 *O conjunto dos polinômios em x, de grau menor ou igual a n é definido por :*

$$P_n = \left\{p(x) = a_o + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \ / \ a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

com as operações de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial. Note que cada elemento de P_n *é uma função* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplo 36 *O conjunto das matrizes definido por*

$$M(m, n) = \{A_{m\times n} = \{a_{ij}\} \ / \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i = 1, .., m \ e \ j = 1, .., n\}$$

com a soma usual de matrizes e multiplicação usual de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial.

No caso particular das matrizes quadradas de ordem n denotaremos $M(n, n)$ por M_n.

Exemplo 37 *Seja o conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações assim definidas*:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ com estas operações não é um espaço vetorial, de fato:
Vamos mostrar que falha a propriedade 5) do E.V.

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta)x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta u &= = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1) \\ &\Rightarrow \quad (\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u \end{aligned}$$

2.2 Subespaços

Definição 38 *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. se u , $v \in W$ então $u + v \in W$
2. se $u \in W$ então $\alpha u \in W$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Podemos fazer três observações:

- as condições da definição garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afirmar que W é ele próprio um E.V.
- Qualquer subespaço W de V precisa conter o vetor nulo.
- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o conjunto formado pelo vetor nulo e o próprio E.V.

Exemplo 39 *Seja $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, W é um subespaço vetorial?*

Resolução:
verificamos as condições de subespaço: seja $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$ e $v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$

1. $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in W$
2. $\alpha u = \alpha(0, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5) \in W$

logo W é um subespaço vetorial.

Exemplo 40 *Seja* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, S *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$?

Resolução:
Dados $u = (x_1, y_1, z_1) \in S$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in S$

1. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Como $u = (x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Analogamente $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, e podemos concluir que $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \Rightarrow u + v \in S$

2. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ para todo $\alpha \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha 0 = 0$ e dai $\alpha u \in S$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 41 $V = M_n$ *e* W *é o subconjunto das matrizes triangulares superiores.* W *é subespaço de* V*, pois a soma das matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar (Verifique).*

Exemplo 42 *Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Considere o sistema homogêneo* $AX = O$*, onde* A *é uma matriz* $m \times n$ *e* X *é uma matriz coluna* $n \times 1$*.Se* X_1 *e* X_2 *são duas soluções do sistema* $AX = O$ *então tem-se* $AX_1 = O$ *e* $AX_2 = O$*. Mas* $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$*, logo* $X_1 + X_2$ *é uma solução do sistema* $AX = O$*. Também,* $A(kX_1) = kAX_1 = O$*, portanto* kX_1*é uma solução do sistema* $AX = O$*.*

Como o conjuntos das matrizes $X_{n\times 1}$ *é uma espaço vetorial temos que o subconjunto de todas as matrizes de ordem* $n \times 1$ *que são soluções do sistema* $AX = O$ *é uma subespaço vetorial do espaço vetorial formadso por todas as matrizes de ordem* $n \times 1$

Exemplo 43 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R})$*. Se escolhermos* $u = (1, 1)$ *e* $v = (2, 4) \in W$*, temos:* $u + v = (3, 5) \notin W$*, portanto* W *não é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 44 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$*,* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*, pois temos:*

1. Para $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2x_2) \in W$ tem-se $u + v = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$, pois a segunda componente de $u + v$ é igual ao dobro da primeira.

2. $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W$, pois a segunda componente de αu é igual ao dobro da primeira.

Exemplo 45 *Considere o espaço vetorial* M_2 *e a matriz* $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$.*Seja* $W = \{A \in M_2 / AB = BA\}$. *Verifique se* W *é um espaço vetorial de* M_2.

1^a Solução: Sejam A_1, A_2 petencente a M_2.
$(A_1 + A_2) B = A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2) \Rightarrow (A_1 + A_2) \in M_2$
$(kA_1) B = k(A_1B) = k(BA_1) = B(kA_1) \Rightarrow (kA_1) \in M_2$
Logo W é um subespaço vetorial de W.

2^a Solução: Tomando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$, sabe-se que a matriz A deve satisfazer a relação $AB = BA$.Portanto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$$
$$b = -c$$
$$-a = -d \Rightarrow a = d$$
$$a = d$$
$$-c = b \Rightarrow b = -c$$

Logo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_2 / a, b \in \mathbb{R} \right\}$
Sejam $u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$
$u + v = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -b-y & a+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -(b+y) & a+x \end{bmatrix} \in W$
$ku = k \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{bmatrix} \in W$
Como $u + v \in W$ e $ku \in W \Rightarrow W$ é um subespaço vetorial de M_2

2.3 Intersecção de dois Subespaços Vetoriais

Definição 46 *Dados* W_1 *e* W_2 *subespaços de um espaço vetorial* V, *a intersecção* $W_1 \cap W_2$ *ainda é um subespaço de* V.

Exemplo 47 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ y = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x = 0)$. $W_1 \cap W_2$ *é a reta de intersecção dos planos* W_1 *e* W_2, *ou seja* $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x = 0$ *e* $y = 0)$

Exemplo 48 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x + y + z = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ x + y - z = 0)$.

Para encontrarmos a intersecção dos dois subespaços devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $z=0$, $y=-x$. Portanto $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ z=0 \text{ e } y=-x\}$

Exemplo 49 *$V=P_3$. Seja $W_1=\{p \in P_3 \ / \ p'(1)=0\}$ e $W_2=\{p \in P_3 \ / \ p''(1)=0\}$*

Como $p \in P_3$ então $p=a+bx+cx^2+dx^3$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Se $p \in W_1$ então $p'(1)=0 \Rightarrow b+2c+3d=0$. Se $p \in W_2$ então $p''(1)=0 \Rightarrow 2c+6d=0$. Para que p pertença a $W_1 \cap W_2$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} b+2c+3d=0 \\ 2c+6d=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= -3d \\ b &= 3d \end{aligned}$$

Portanto $W_1 \cap W_2 = \{p \in P_3 \ / \ p=a+3dx-3dx^2+dx^3\}$

Exemplo 50 *$V=M(n,n), W_1=\{$matrizes triangulares superiores$\}$; $W_2=\{$matrizes triangulares inferiores$\}$. Então $W_1 \cap W_2=\{$matrizes diagonais$\}$.*

Exemplo 51 *Seja* $V=M_2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e*

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, a,c \in \mathbb{R}\right\}$$

$W=W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V, pois

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemplo 52 *Sejam W_1 e W_2 dados por:*

$$W_1=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y=0\}$$

e

$$W_2=(x,y) \in \mathbb{R}^2; x-y=0\}$$

será que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V?
Solução :

Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$,

$u = (1,1) \in W_2$
$v = (1,-1) \in W_1$
mas $u + v = (1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin W_1 \cup W_2$ (represente graficamente esta soma de vetores)

2.4 Combinação Linear

Definição 53 *Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, a_{2,.....}a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo 54 *Em $\mathbb{R}^2$ os vetor $v = (10, 16)$ é uma combinação linear dos vetores*

$v_1 = (1,2)$ $v_2 = (3,4)$ pois $v = 4v_1 + 2v_2$.

Exemplo 55 *Verifique se o vetor $v = (3,2,1)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,1), v_3 = (1,1,-1)$.*

Devemos verificar se existem números a, b, c tais que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, ou seja,

$$(3,2,1) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1).$$

devemos então resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas esse sistema tem uma única solução $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, portanto v pode realmente ser escrito como combinação de v_1, v_2 e v_3, da forma $v = \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$.

Exemplo 56 *No espaço vetorial P_2 o polinômio $p = 7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios: $q_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $q_2 = -2x^2 + 5x - 8$, de fato $p = 3q_1 + 4q_2$ (confira).*

Exemplo 57 *Verifique que em P_2 o polinômio $p(x) = 1 + x^2$ é uma combinação dos polinômios $q(x) = 1$, $r(x) = 1 + x$ e $s(x) = 1 + x + x^2$.*

Resolução:
Precisamos encontrar números reais, a_1, a_2 e a_3 tais que:

$$p(x) = a_1 q(x) + a_2 r(x) + a_3 s(x)$$

Ou seja, precisamos encontrar a_1, a_2 e a_3 satisfazendo:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= a_1 + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2) \\ 1.1 + 0x + 1.x^2 &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3)\, x + a_3 x^3 \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} :\Leftrightarrow a_1 = 1; a_2 = -1 \text{ e } a_3 = 1.$$

Exemplo 58 *Consideremos , no $\mathbb{R}^3$, os seguintes vetores: $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$. Escreva o vetor $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.*

Resolução:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$(-4, -18, 7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1) = (1a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -1a_2) =$
$= (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$ que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = 2,\ a_2 = -3.$$

Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$. Agora mostre que o vetor $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

2.5 Dependência e Independência Linear

Definição 59 *Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é **linearmente independente (LI),** se a equação:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

implica que

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

*No caso, em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é **linearmente dependente (LD)**.*

Para determinarmos se um conjunto é L.I. ou L.D. devemos fazer a combinação linear do conjunto de vetores e igualar esta combinação linear ao vetor nulo do espaço. Portanto é muito importante ter conhecimento do vetor nulo do espaço em que estamos trabalhando.

Definição 60 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *e os conjunto de vetores:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,0)\} \\ \beta &= \{(1,2,3),(1,1,1),(3,5,7)\} \end{aligned}$$

Os conjuntos α e β acima são L.I ou L.D?

Solução:

Fazendo a combinação linear

$$a\,(1,2,3) + b(1,1,1) + c(1,0,0) = (0,0,0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a+b+c &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ 3a+b &= 0 \end{bmatrix} \right.$$

cuja única solução é $a = b = c = 0$. Portanto o conjunto α é L.I

Fazendo a combinação linear

$$a\,(1,2,3) + b(1,1,1) + c(3,5,7) = (0,0,0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a+b+3c &= 0 \\ 2a+b+5c &= 0 \\ 3a+b+7c &= 0 \end{bmatrix} \right.$$

que possui infinitas soluções (grau de liberdade 1). Portanto além da solução nula (que todo sistema homogêneo tem) este sistema possui outras soluções diferentes da solução nula, logo o conjunto β é L.D.

Teorema 61 *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é LD se, e somente se um dos vetores do conjunto for uma combinação linear dos outros.*

Exemplo 62 *a) Seja* $V = \mathbb{R}^3$*. Sejam* $v_1, v_2 \in V$*.O conjunto* $\{v_1, v_2\}$ *é LD se e somente se* v_1 *e* v_2 *estiverem na mesma reta que passa pela origem (um vetor é múltiplo do outro),* $v_1 = \lambda v_2$*.*

b) Em $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ são LI, pois:

$$a_1e_1 + a_2e_2 = 0 \Longrightarrow a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0) \Longrightarrow (a_1,a_2) = (0,0)$$

logo $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$ portanto, e_1e e_2 são LI.

Exemplo 63 *No espaço Vetorial* M_2 *o conjunto:*

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD. Examinemos a equação: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$. .Como existem soluções $a_i \neq 0$, o conjunto é LD.

Propriedades da Dependência e da Independência Linear

Seja V um E.V

1. Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq \overrightarrow{0}$, então A é LI.
2. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD
3. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte de A_1 de A também é LI.

2.6 Subespaços Gerados

Definição 64 *Seja V um espaço vetorial. Consideramos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V, A \neq \varnothing$.O conjunto W de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço de V. Simbolicamente, o subespaço W é:*

$$W = \{v \in V \ / \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n\}$$

O subespaço W diz-se gerado pelos vetores $v_1, v_2, ...v_n.$, ou gerado pelo conjunto A, e representa-se por:

$$W = [v_1, v_2, ...v_n.] \ \ ou \ \ W = G(A)$$

Os vetores $v_1, v_2, ...v_n$.são chamados geradores do subespaço W, enquanto A é o conjunto gerador de W.

Para o caso particular de $A = \varnothing$, define-se $[\varnothing] = \{\overrightarrow{0}\}$

$A \subset G(A)$, ou seja, $\{ v_1, v_2, ...v_n\} \subset [v_1, v_2, ...v_n]$

Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer $G(A) = V$. Nesse caso, A é um conjunto gerador de V.

Exemplo 65 *Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois, qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j :*

$$(x, y) = xi + yj = x(0, 1) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Então: $[i, j] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 66 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.*

Solução: Temos:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a(1, 2, 3), a \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade: $(x, y, z) = a(1, 2, 3)$ vem: $x = a$; $y = 2a$; $z = 3a$ donde: $y = 2x$ e $z = 3x$ logo ,

$$[v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \text{ e } z = 3x\} \textit{ ou } [v_1] = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 67 *Encontre o subespaço vetorial de P_3 gerado por $U = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$*

Resolução**:**
note que $t^3 = (t^3 + 1) - 1$. Assim, dado $p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3$ podemos escrever

$$p(t) = (a_0 - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3(t^3 + 1) \in U$$

Ou seja, qualquer vetor (polinômio) de P_3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto U. Logo $P_3 = [U]$.

Exemplo 68 *Encontre o subespaço vetorial gerado de M_2 gerado por*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A \in [G]$ se e somente se existirem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, $A \in [G]$ se e somente se os elementos da diagonal principal de A são nulos.

Exemplo 69 *Encontre um conjunto de geradores para $W = \{X \in M(4, 1) \diagup AX = 0\}$ onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in W \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ b = \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \end{cases}$$

isto é,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$portanto,\ W = \left[\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

2.7 Soma de Subespaços

Definição 70 *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Então o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V / v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \ e \ \ w_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V.

Exemplo 71 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *e* $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$, *onde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Então* $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = M_2$.

Exemplo 72 *Sejam os subespaços vetoriais*

$$W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\} \ e \ \ W_2 = \{(0, 0, c), c \in \mathbb{R}\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. A soma $W_1 + W_2 = \{(a, b, c); a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial, que nesse caso é o próprio $\mathbb{R}^3$.

Proposição 73 *Quando $W_1 \cap W_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado soma direta de W_1 com W_2, e denotado por $W_1 \oplus W_2$.*

Observação 74 *Usando os geradores podemos obter uma caracterização da soma de dois subespaços: Sejam W e U subespaços de V, se $W = [u_1, ..., u_n]$ e $U = [w_1, ..., w_m]$ então $W + U = [u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m]$*

Exemplo 75 *Verifique que* $\mathbb{R}^3$ *é a soma direta de*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$$

Resolução:
Note que W_2 é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (Verifique)
Dado $v \in W_1$, $v = (x, y, -x - y)$ e $u \in W_2$, $u = (0, 0, z)$

$$u + v = (x, y, -x - y + z) = \mathbb{R}^3$$

vamos mostrar que $W_1 \cap W_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Seja $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ temos:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Exemplo 76 *Encontre os geradores do subespaço* $U + W$ *onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\}, \quad e \\ W &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \ e \ x - z = 0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: Se $v \in U \Rightarrow v = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ logo $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$
Se $v \in W \Rightarrow v = (x, -x, x) = x(1, -1, 1)$ logo $W = [(1, -1, 1)]$
Usando a teoria acima explicada temos que

$$U + W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)]$$

2.8 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

2.8.1 Base

Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do E.V se:

1. β é LI
2. β gera V

Exemplo 77 $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$. *De fato:*

1. β é LI pois $a(1, 1) + b(-1, 0) = (0, 0) \Longrightarrow a = b = 0$
2. β gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se :

$$(x, y) = y(1, 1) + (y - x)(-1, 0)$$

Realmente , a igualdade $(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 0) \Longrightarrow a = y$ e $b = y - x$.

Exemplo 78 *O conjunto* $\{(0,1),(0,2)\}$*não é base de* $\mathbb{R}^2$ *pois é um conjunto LD. Se*

$$(0,0) = a(0,1) + b(0,2)$$

temos $a = -2b$*. Assim para cada valor de* b *conseguimos um valor para* a*, ou seja, temos infinitas soluções.*

Exemplo 79 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *então* $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$ *(verifique!).*

Exemplo 80 *O conjunto* $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base do espaço vetorial* P_n*. De fato:*

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$$
$$a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$$
$$\Longrightarrow a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$$

portanto, β é LI.

β gera o espaço vetorial P_n, pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito assim:

$$p = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

que é uma combinação linear de $1, x, x^2, ..., x^n$.

Logo, β é uma base de P_n.Essa é a base canônica de P_n e tem $n+1$ vetores.

Exemplo 81 *Encontre uma base para* $U + W$ *onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\} \ e \\ W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \ e \ x - z = 0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: $U = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$ e $W = [(1,-1,1)]$ (Já vimos este exemplo)

$$U + W = [(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)].$$

Já temos um conjunto que gera a soma, se este conjunto for L.I. então ele será uma base.

$a(1,0,-1) + b(0,1,-1) + b(1,-1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo o conjunto é L.I e portanto. $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é uma base de $U + W$

Exemplo 82 *Encontre uma base para $U+W$ onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x-y+z=0 \text{ e } x-y=0\right\}, \text{ e} \\ W &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=0 \text{ e } x-z=0\right\} \end{aligned}$$

Se $v=(x,y,z)\in U \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+z=0 \\ x-y=0 \end{array}\right. \Rightarrow v=(x,x,0)=x(1,1,0)$, portanto $U=[(1,1,0)]$.

Se $u=(x,y,z)\in W \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right. \Rightarrow u=(x,0,x)=x(1,0,1)$,portanto $W=[(1,0,1)]$

Assim $U+W=[(1,1,0,),(1,0,1)]$. Como o conjunto $\beta=\{(1,1,0,),(1,0,1)\}$ é L.I então ele é uma base para $U+W$.

Como o conjunto $\beta=\{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é LI (verifique isto) e gera o espaço $U+W$ então ele é uma base do espaço $U+W$.

Exemplo 83 *Dados:*

$$U=\{A\in M_2(\mathbb{R}); A=A^t\} \quad e \quad W=\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right] \text{ em } M_2$$

encontre uma base para $U, W, U\cap W, W+U$

Resolução:

Para U : $A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \Leftrightarrow c=b$ portanto, $A\in U$ se existirem $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ tais que

$$A=a_1\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)+a_2\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)+a_3\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

pode-se verificar facilmente que as matrizes

$$\left\{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right\}$$

são L.I e portanto, como geram U, formam uma base de U.

Para W: Como a matriz

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

gera W, ela serve para base de W

Para $U\cap W$:

$A\in U\cap W \Leftrightarrow A=A^t$ e existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$A=\left(\begin{array}{cc} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{array}\right)$$

, isto é, se e somente se existir $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{array}\right)$$

que é satisfeita quando $\alpha = 0$, ou seja, $A = \mathbf{0}$.Desse modo $U \cap W = \{0\}$. Uma base para $U \cap W$ é $\beta = \phi$. Veja a observação a seguir para elucidar esse fato.

Observação: Seja V um espaço vetorial e $\overrightarrow{0} \in V$ o vetor nulo de V. Como o conjunto $\beta = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ é LD (mostre isto) temos que este conjunto não pode ser uma base do conjunto $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Este é um caso patológico e para que não seja contrariada a definição de base tomamos $\beta = \phi$ (conjunto vazio) como sendo base para o espaço $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Para $U + W$: Como $U \cap W = \{0\}$ temos $U + W$ é soma direta e, portanto, uma base é :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Proposição 84 *"Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado ".*

Exemplo 85 *O conjunto $\beta = \{(1,2,1),(-1,-3,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço*

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\dot{\}}.$$

Então, β é base de W, pois β é LI e gera W.

Teorema 86 *Sejam $v_1, v_2, ...v_n$, vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Proposição 87 *Seja um E.V V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, ...v_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

2.8.2 Dimensão

Seja V um Espaço Vetorial.

Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se $\dim V = n$.

Se V não possui uma base, ou seja, a base é $\beta = \phi$ então $dimV = 0$

Se V possui uma base com infinitos vetores, então dim$V$ é infinita e anota-se $\dim V = \infty$

Exemplo 88 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *pois toda base de $\mathbb{R}^2$ tem 2 vetores*

Exemplo 89 $\dim M(2,2) = 4$

Exemplo 90 $\dim M(m,n) = m.n$

Exemplo 91 $\dim P_n = n + 1$

Proposição 92 *Seja V um E. V. tal que* $\dim V = n$

Se W é um subespaço de V então $\dim W \leq n$. No caso de $\dim W = n$, tem-se $W = V$. Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3(\dim \mathbb{R}^3 = 3)$.

A dimensão de qualquer subespaço W do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser $0, 1, 2$ ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

1. $\dim W = 0$, então $W = \{0)$ é a origem
2. $\dim W = 1$, então W é uma reta que passa pela origem
3. $\dim W = 2$, então W é um plano que passa pela origem
4. $\dim W = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$.

Proposição 93 *Seja V um E. V de dimensão n. Então, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é Linearmente Dependente (LD).*

Proposição 94 *Sabemos que o conjunto β é base de um espaço vetorial se β for LI e gera V. No entanto, se soubermos que $\dim V = n$, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita.*

Exemplo 95 *O conjunto $\beta = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. De fato, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$.*

2.8.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 96 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V então* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

No exemplo (83) de base , para encontrar a base de $U + W$ podemos usar esta proposição: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim M_2$, portanto, $U + W = M_2$ e uma base pode ser dada por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.8.4 Coordenadas

Seja V um espaço vetorial gerado e β uma base de V formada pelos vetores $u_1, u_2 \ldots u_n$.

$v \in V$ sendo

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

Os coeficientes $x_1, x_2, ...x_n$ são chamados componentes ou coordenadas de v em relação a base β e se representa por :

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 97 *No* $\mathbb{R}^2$ *consideremos as bases* $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}, \beta = \{(2,0),(1,3)\}$ *e* $\gamma = \{(1,-3),(2,4)\}$. *Dado o vetor* $v = (8,6)$ *tem-se:*

$(8,6) = 8(1,0) + 6(0,1)$
$(8,6) = 3(2,0) + 2(1,3)$
$(8,6) = 2(1,-3) + 3(2,4)$

temos: $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $[v]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 98 *Mostre que os vetores* $(1,1,1),(0,1,1)$ *e* $(0,0,1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontre as coordenadas de* $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ *com relação à base* β *formada pelos vetores acima.*

Resolução:

Já sabemos que dim $\mathbb{R}^3 = 3$.Então verificamos se os vetores acima são LI. Os vetores são LI se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, portanto, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI.

$$(1,2,0) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (a, a+b, a+b+c)$$

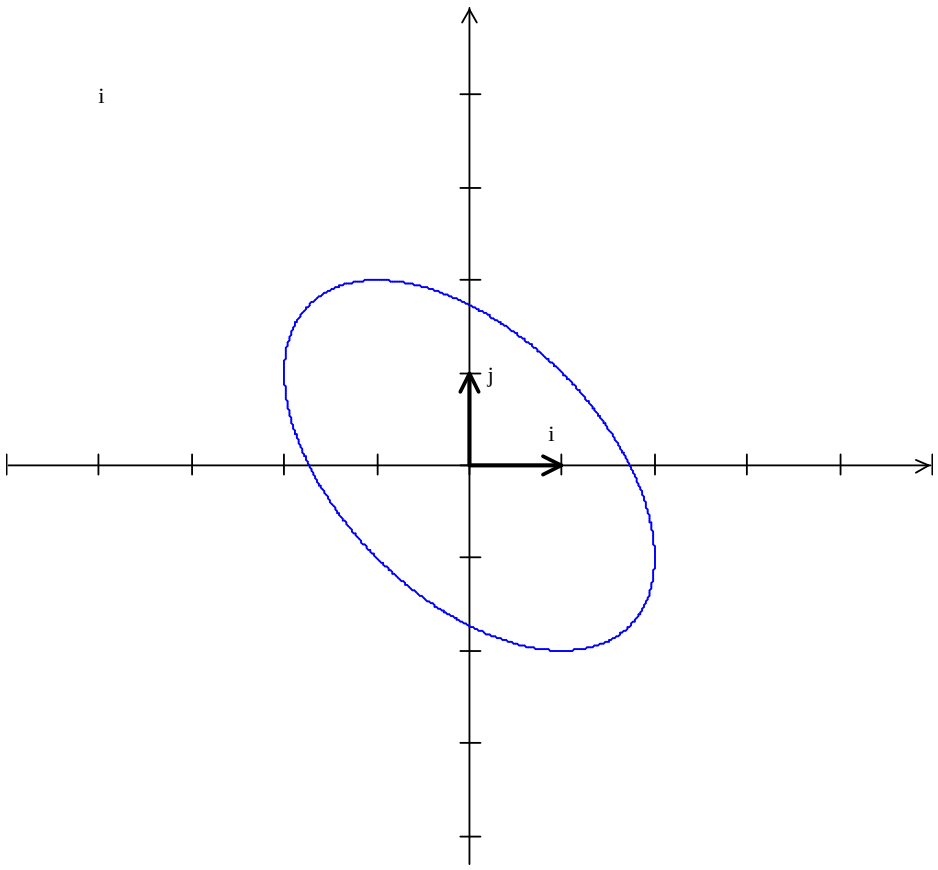
que é equivalente ao sistema:

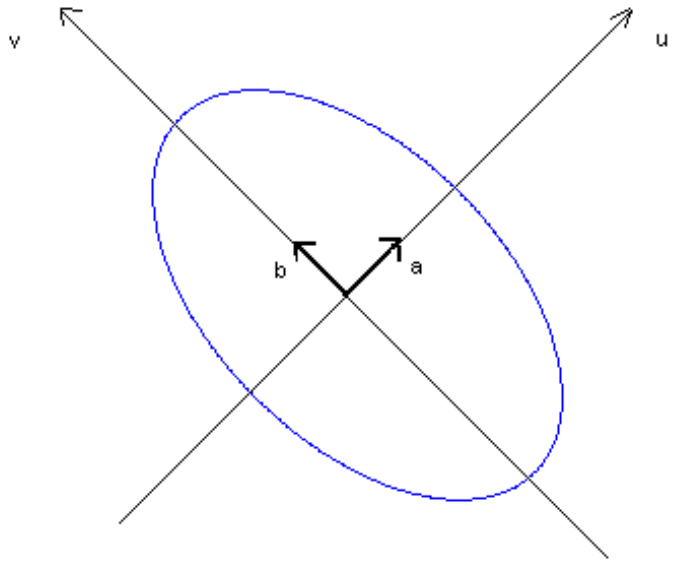
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 1 \text{ e } c = -2$$

. Desse modo, as coordenadas de $(1,2,0)$ em relação à base β é dado por $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.9 Mudança de Base

Muitos problemas aplicados podem ser simplificados mudando-se de um sistema de coordenadas para outro. Mudar sistemas de coordenadas em um espaço vetorial é, essencialmente, a mesma coisa que mudar de base. Por exemplo, num problema em que um corpo se move no plano xy, cuja trajetória é uma elipse de equação $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ (ver figura), a descrição do moviemnto torna-se muito simplificada se ao invés de trabalharmos com os eixos x e y utilizamos um referencial que se apóia nos eixos principais da elipse. Neste novo referencial, a equação da trajetória será mais simples: $3u^2 + 2v^2 = 6$.


i
j
i



Nesta seção, vamos discutir o problema de mudar de um sistema de coordenadas para outro.

Sejam $\beta = \{u_{1,...,}u_n\}$ e $\beta' = \{w_{1,.....,}w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} v &= x_1u_1 + ... + x_nu_n \\ v &= y_1w_1 + ... + y_nw_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β'

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix}$$

já que $\{u_{1,...,}u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores w_i como combinação linear dos u_j, isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Substituindo em (2.1) temos:

$v = y_1w_1 + ... + y_nw_n = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n) + ... + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n) =$

$= (a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n)u_1 + ... + (a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n)u_n$

Mas $v = x_1u_1 + ... + x_nu_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ x_2 & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{array}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo ,se usarmos a notação

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos a relação

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'}\,[v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz mudança de base β' para a base β.

Compare $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com (2.2) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i-ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]_{\beta}^{\beta'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base β' (supostamente conhecida).

Exemplo 99 *Sejam* $\beta = \{(2,-1),(3,4)\}$ *e* $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$. *Procuremos inicialmente* $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$

Isto implica que $a_{11} = \frac{4}{11}$ *e* $a_{21} = \frac{1}{11}$

$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$

Resolvendo, $a_{12} = \frac{-3}{11}$ *e* $a_{22} = \frac{2}{11}$

Portanto, $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Podemos usar esta matriz para encontrar por exemplo, $[v]_{\beta}$ *para* $v = (5, -8)$

$[(5,-8)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'}\,[(5,-8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ -1 \end{bmatrix}$

Isto é, $(5, -8) = 4(2, -1) - 1(3, 4)$

Exemplo 100 *Considere as bases em* $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \;\; e\; \beta' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Encontre $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

Resolução:
$(1,0,0) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(1,1,1) + a_{31}(1,1,2)$
$(0,1,0) = a_{12}(1,0,1) + a_{22}(1,1,1) + a_{32}(1,1,2) \Leftrightarrow$
$(0,0,1) = a_{31}(1,0,1) + a_{23}(1,1,1) + a_{33}(1,1,2)$

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21} + a_{31,} a_{21} + a_{31}, a_{11} + a_{21} + 2a_{31}) &= (1,0,0) \\ (a_{12} + a_{22} + a_{32,} a_{22} \; + a_{32}, a_{12} + a_{22} + 2a_{32}) &= (0,1,0) \\ (a_{13} + a_{23} + a_{33,} a_{23} \; + a_{33}, a_{13} + a_{23} + 2a_{33}) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma e o que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$
Tomando $(a, b, c) = (1, 0, 0)$,obtemos $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (1, 1, -1)$
Tomando $(a, b, c) = (0, 1, 0)$,obtemos $(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (-1, 1, 0)$
Tomando $(a, b, c) = (0, 0, 1)$,obtemos $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0, -1, 1)$. Desta forma obtemos:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.10 A Inversa da Matriz de Mudança de Base

Se em (2.1)começarmos escrevendo os u_i em função dos w_j, chegaremos à relação:

$$[v]_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'}\,[v]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]^{\beta'}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\beta'}$ são inversíveis e

$$\left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1} = [I]^{\beta}_{\beta'}$$

Exemplo 101 *No exemplo (99) anterior podemos obter* $[I]^{\beta'}_{\beta}$ *a partir de* $[I]^{\beta}_{\beta'}$ *Note que* $[I]^{\beta}_{\beta'}$ *é fácil de ser calculada , pois* β' *é a base canônica*

$$\begin{array}{c}(2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1)\\ (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)\end{array} \quad \Rightarrow \quad [I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

2.11 Oitava lista de exercícios

1. Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:

   i. $(x, y) + (s, t) = (s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$

   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   é um espaço vetorial.

2. Moste que $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas por:

   i. $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$

   ii. $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$.

   é um espaço vetorial **.**

3. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$

   (c) $V = P_n$ e $W = \{p \in P_n : p(0) = p(1)\}$

   (d) $V = M(n, n)$ e $W = \{A \in M(n, n) : BA = 0\}$

   (e) $V = M(2, 2)$ e $S = \{X \in M_2 \ \diagup det(X) = 0\}$ (S é o conjunto das matrizes singulares)

   (f) $V = M(2, 2)$ e $F = \{X \in M_n \ \diagup AX = XA\}$ (F é o conjunto das matrizes que comutam com a matriz A)

   (g) $V = P_3$ e W é o conjunto dos polinômios de $grau \leq 3$ que passam pelo ponto $P(0, 0)$.

4. Verifique se o conjunto $W = \{(1, 2, 3), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.

5. Dado o conjunto $W = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.

6. **a)** Se o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto Linearmente Independente então o o conjunto $\alpha = \left\{v_1, \overrightarrow{0}, v_2, ..., v_n\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta.

   b) Considere o subespaço $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Qual é a base e a dimensão de N.

7. **a)** Verifique se o conjunto $S = \{A \in M(3,3); A \text{ é uma matriz anti} - \text{simétrica}\}$ é um subespaço vetorial de $M(3,3)$.

   b) Considere o subconjunto de M_2, dado por

   $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 \ / \ b = a \text{ e } d = -a \right\}$. Verifique se o subconjunto W é um espaço vetorial.

8. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,2,1,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1,0,0,0)$.

   (a) O vetor $(2,-3,2,2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

   (b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$. Qual é a dimensão deste espaço?

   (c) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?

9. Considere o espaço vetorial P_3 e o conjunto $W = \{p(x) \in P_3;\ p''(1) = 0\}$.

   (a) Verifique se W é um subespaço vetorial de P_3.

   (b) Obtenha os geradores de W.

10. **a)** Encontre as coordenadas do vetor $p = 1 + t + t^2 + t^3$ em relação base $\alpha = \left\{2, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\right\}$ de P_3

    b) O conjunto $\beta = \left\{2, t^2, t+t^2\right\}$ é LI ou LD? Justifique sua resposta

11. Qual o subespaço gerado pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

12. Mostre com um exemplo que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um subespaço vetorial desse espaço.

13. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$.

    (a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b \right\}$

    (b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ e } b - 1 = c + 1 \right\}$

    Em caso afirmativo, determine:

    i) uma base para $W_1 \cap W_2$

    ii) $W_1 + W_2$ é soma direta?

    iii) $W_1 + W_2 = M(2,2)$?

14. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^5$, $W_1 = \{(x,y,z,t,w) / x + z + w = 0, x + w = 0\}$, $W_2 = \{(x,y,z,t,w) / y + z + t = 0\}$ e $W_3 = \{(x,y,z,t,w) / 2x + t + 2w = 0\}$.

    (a) Determine uma base para o subespaço $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

    (b) Determine uma base e a dimensão de $W_1 + W_3$.

(c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

(d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$?

15. Considere os seguintes subespaços de P_3 :

$$U = \left\{ p \in P_3 : p^{''}(t) = 0 \right\}$$
$$\text{e } W = \left\{ p \in P_3 : p^{'}(t) = 0 \right\}$$

Determine $\dim(U + W)$ e $\dim(U \cap W)$.

16. Sejam $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$ e $V = [(0,1,0),(0,0,1)]$ subespaços gerados do $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) uma base e a dimensão de $U \cap W$.

(b) $U + W = \mathbb{R}^3$?

17. Considere o seguinte subespaço de $M(2,2)$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a + b = c + d = 0 \right\}$$

(a) Determine uma base e indique a dimensão de S.

(b) Construa uma base de $M(2,2)$ que contenha a base de S obtida no ítem **a)**.

18. Determine a dimensão e encontre uma base do espaço-solução do sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

19. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos 1. O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2 ? Pode ser 3 ? Justifique sua resposta.

20. Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Encontre a matrizes mudança de base:

i. $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ **ii.** $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ **iii.** $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ **iv.** $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

(b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação à base

i. β **ii.** β_1 **iii.** β_2 **iv.** β_3.

(c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em relação à base β_1 são dadas por $[\mathbf{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Quais as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base: **i.** β **ii.** β_2 **iii.** β_3

21. Sejam $P_4 = \left\{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \diagdown a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\right\}$, $\alpha = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$ e $\beta = \left\{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\right\}$.

(a) Determine $[I]_\beta^\alpha$ ..

(b) Se $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$,determinar $[p]_\beta$

(c) Determine o polinômio p cujas coordenadas são dadas no item b) acima.

22. Considere o seguinte subespaço de M_2 : $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \diagup d = 0 \right\}$. Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(a) Detemine $[I]_\beta^\alpha$

(b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

23. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$. Determine a base β sabendo que $\alpha = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ e a matriz mudança de base de α para β é

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Seja E um espaço vetorial qualquer e $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de E. Considere ainda os vetores $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_1 + u_2 - u_3$ e $v_3 = -u_2$.

(a) Determine a matriz S de mudança da base $\{v_1, v_2, v_3\}$ para a base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $w = v_1 + v_2 - v_3$ na base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

25. Sejam α e β bases de um espaço vetorial V

    (a) Mostre que $\det\left([I]_{\beta}^{\alpha}\,[I]_{\alpha}^{\beta}\right) = 1$

    (b) Determine $[I]_{\alpha}^{\alpha}$

26. Verifique se as afirmações abaixo são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**. Se forem verdadeiras, demonstre. Se forem falsas, dê um contra-exemplo.

    (a) ( )A matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

    (b) ( ) Se os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI então os vetores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ são $LI's$.

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 102 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma Transformação Linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

- *Qualquer que sejam u e v em V ,*

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

- *Qualquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e v em V ,*

$$T(kv) = kT(v)$$

Exemplo 103 *: Um agricultor planta e comercializa três tipos de verduras: Tomate, Batata, Cenoura. Sejam x_1, x_2, x_3 as quantidades em quilos de Tomate, Batata, Cenoura respectivamente. Se o agricultor vende o quilo do tomate a R$ $2,00$,da batata a R$ $1,50$ e da cenoura a R$ $1,90$ então o total de vendas (T_V) é dado por $2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3$. A aplicação que a cada tripla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$associa o total de vendas $T_V(x_1, x_2, x_3)$ é uma aplicação linear. Matematicamente temos uma transformação linear do E.V $\mathbb{R}^3$ no E.V $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} T_V &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ T_V(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3 \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que de fato esta aplicação é uma transformação linear Chamando $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos:

i)

$$\begin{aligned} T_V(u+v) &= T_V\left((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\right) \\ &= T_V\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right) \\ &= 2(x_1+y_1)+1,5(x_2+y_2)+1,9(x_3+y_3) \\ &= 2x_1+1,5x_2+1,9x_3+2y_1+1,5y_2+1,9y_3 \\ &= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_V(u) &= T(x_1,x_2,x_3)=2x_1+1,5x_2+1,9x_3 \\ T_V(v) &= T(y_1,y_2,y_3)=2y_1+1,5y_2+1,9y_3 \\ T_V(u)+T_V(v) &= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3) \end{aligned}$$

Logo $T_V(u+v)=T_V(u)+T_V(v)$.

ii)

$$\begin{aligned} T_V(ku) &= T_V(k(x_1,x_2,x_3)) \\ &= T_V(kx_1,kx_2,kx_3) \\ &= 2kx_1+1,5kx_2+1,9kx_3 \\ &= k\left(2x_1+1,5x_2+1,9x_3\right) \\ &= kT(u) \end{aligned}$$

Logo $T_V(ku)=kT_V(u)$. De i) e ii) vemos que T_V é uma transformação linear.

Exemplo 104 . *Sejam $V=\mathbb{R}$, $W=\mathbb{R}$ e $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado $F(u)=u^2$. A aplicação F não é uma transformação linear pois:*

$$\begin{aligned} F(u+v) &= (u+v)^2=u^2+2uv+v^2 \\ F(u)+F(v) &= u^2+v^2 \\ F(u+v) &\neq F(u)+F(v) \end{aligned}$$

Exemplo 105 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(2x,0,x+y)$

T é uma transformação linear pois,

i)

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) \\ &= T(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ &= (2(x_1+x_2),0,(x_1+x_2)+(y_1+y_2)) \\ &= (2x_1+2x_2,0+0,(x_1+y_1)+(x_2+y_2)) \\ &= (2x_1,0,x_1+y_1),(2x_2,0,x_2+y_2) \\ &= T(u)+T(v) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T(ku) &= T\left(k(x_1, y_1)\right) \\ &= T\left(kx_1, ky_1\right) \\ &= \left(2kx_1, 0, kx_1 + ky_1\right) \\ &= k\left(2x_1, 0, x_1 + y_1\right) \\ & \quad kT(u) \end{aligned}$$

Portanto T é uma transformação linear.

Exemplo 106 . $V = W = P_n$ *e*

$$\begin{aligned} D &: P_n \to P_{n-1} \\ D(f) &= f' \end{aligned}$$

a aplicação derivada que a cada polinômio associa sua derivada, a qual também é um polinômio é uma aplicação linear. De fato, para quaisquer $f, g \in P_n$ *e* $k \in \mathbb{R}$,

i)

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' \\ &= f' + g' \\ &= D(f) + D(g) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} D(kf) &= (kf)' \\ &= kf' \\ &= kD(f) \end{aligned}$$

Exemplo 107 $V = P_n, W = P_{n+1}$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$$\begin{aligned} T &: P_n \to P_{n+1} \\ T(p(x)) &= xp(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1} \end{aligned}$$

A aplicação T é uma transformação linear pois

$$\begin{aligned} T(kp) &= x(kp)(x) = xkp(x) = kxp(x) = kT(p) \\ T(p+q) &= x(p+q)(x) = x(p(x) + q(x)) = xp(x) + xq(x) = T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 108 $V = W = P_n$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{aligned} T &: P_n \to P_n \\ T(p(x)) &= p(ax+b) = a_0 + a_1\left(ax+b\right) + a_2\left(ax+b\right)^2 + \ldots + a_n\left(ax+b\right)^n \end{aligned}$$

Esta aplicação também é linear pois,

$$\begin{aligned} T(kp) &= (kp)(ax+b) = kp(ax+b) = kT(p) \\ T(p+q) &= (p+q)(ax+b) = p(ax+b) + q(ax+b) = T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 109 *Uma transformação linear inportante é aquela que se obtém usando-se o produto escalar. Seja* $\mathbb{R}^n$ *com o produto escalar usual* $\langle .,. \rangle$ *e* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *um vetor qualquer fixado. Seja,*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ T(v) &= \langle v, v_0 \rangle \end{aligned}$$

T é uma aplicação linear (mostre isso, use as propriedades do produto escalar)

Exemplo 110 *: Sejam* $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ é contínua}\}$ *. Considere*

$$\begin{aligned} J &: C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ J(f) &= f(0) \end{aligned}$$

Por exemplo se $f(t) = t^2$ *então*

$$J(f) = f(0) = 0^2 = 0$$

J é uma aplicação linear pois, se $f, g \in C(\mathbb{R})$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned} J(f+g) &= (f+g)(0) = f(0) + g(0) = J(f) + J(g) \\ J(kf) &= (kf)(0) = kf(0) = kJ(f) \end{aligned}$$

Exemplo 111 *: Seja,*

$$\begin{aligned} T &: M_2 \to M_2 \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma transformação linear, pois

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & b_1+b_2+c_1+c_2 \\ c_1+c_2+d_1+d_2 & d_1+d_2+a_1+a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1+a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2+a_1+a_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(k\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} ka+kb & kb+kc \\ kc+kd & kd+ka \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \\ &= kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 112 *: Seja,*

$$\begin{aligned} T &: M_n \to \mathbb{R} \\ T(A) &= \det(A) \end{aligned}$$

Esta aplicação não é uma transformação linear, pois, em geral

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

3.1 Propriedades das Transformações Lineares

Teorema 113 *Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de $V, \beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$, sejam $w_1, \cdots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \cdots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por: Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$,*

$$T(v) = a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n) = a_1w_1 + \cdots a_nw_n$$

Exemplo 114 *Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?*

Solução: Temos neste caso $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ base de $\mathbb{R}^2$ e $w_1 = (2,-1,0)$ e $w_2 = (0,0,1)$.

Dado $v = (x,y)$ arbitrário,

$$\begin{aligned} v &= xv_1 + yv_2 \\ T(v) &= T(xv_1 + yv_2) \\ T(v) &= xT(v_1) + yT(v_2) \\ T(v) &= x(2,-1,0) + y(0,0,1) \\ T(v) &= (2x,-x,y) \end{aligned}$$

Exemplo 115 *Qual a transformação linear $T : M_2 \to P_4$ tal que*

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^4 + x \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^3 + x^2 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^2 + x^3 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= x + x^4 \end{aligned}$$

Solução

Uma matriz $A \in M_2$ é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Podemos escrever:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, portanto

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= a\left(x^4 + x\right) + b\left(x^3 + x^2\right) + c\left(x^2 + x^3\right) + d\left(x + x^4\right) \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= (a+d)x + (b+c)x^2 + (b+c)x^3 + (a+d)x^4 \end{aligned}$$

Definição 116 *: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto de vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja*

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \ / \ T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observação 117 *Note que $\mathrm{Im}(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W.*

Exemplo 118 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - y, -10x + y)$. Qual dos vetores abaixo pertence a imagem de T*

a) $u = (1, 2)$
b) $w = (-1, 2)$

Solução: a) Para que $u \in \text{Im}(T)$ deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = u$, ou seja, $T(x, y) = (1, 2)$; temos então:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (1, 2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{3}{8}$ e $y = -\frac{7}{4}$, logo u pertence a imagem de T pois $T(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{4}) = u$.

b) Analogamente deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = w$, ou seja

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (-1, 2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (-1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{1}{8}$ e $y = \frac{3}{4}$ logo w pertence a imagem de T pois $T(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}) = w$

Exemplo 119 *Determine a imagem da transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y - z, x - y - z, x + y - z)$.

Solução: Se $w \in \text{Im}(T)$ então $w = T(x, y, z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} w &= (2x - y - z, x - y - z, x + y - z) \\ &= x(2, 1, 1) + y(-1, -1, 1) + z(-1, -1, -1) \end{aligned}$$

Logo todo vetor que pertence a imagem de T é gerado pelos vetores $v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (-1, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, -1, -1)$. Podemos então escrever que $\text{Im}(T) = [(2, 1, 1),\ (-1, -1, 1),\ (-1, -1, -1)]$.

Como o conjunto $\beta = \{(2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\}$ é LI (verifique isto) temos que β é uma base para a $\text{Im}(T)$, mas β é base para $\mathbb{R}^3$, logo concluimos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

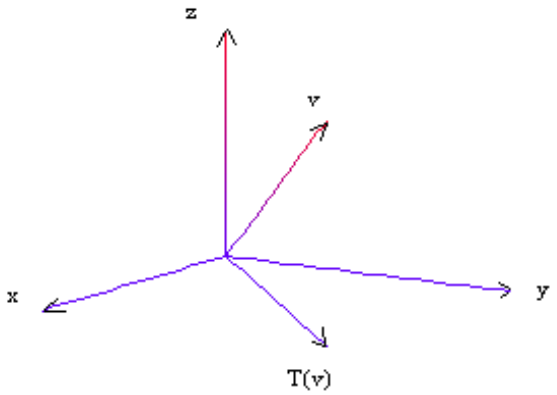
Definição 120 *Seja* $T : V \to W$, *uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores* $v \in V$ *tais que* $T(v) = \overrightarrow{0}$ *é chamado* ***núcleo*** *de* T, *sendo denotado por* $Ker(T)$. *Isto é,*

$$Ker(T) = \left\{ v \in V \ / \ T(v) = \overrightarrow{0} \right\}$$

Observação 121 *Observe que* $Ker(T) \subset V$ *é um subconjunto de* V *e, ainda mais, é um subespaço vetorial de* V. *Alguns autores denotam o núcleo de* T *por* $N(T)$.

Exemplo 122 *Seja $T : V \to W$, dada por $T(v) = \overrightarrow{0}$. Neste caso todo vetor de V é levado no vetor nulo pela transformação T, assim temos que $Ker(T) = V$*

Exemplo 123 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano xy. Neste caso temos $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$. Como nada é dito sobre a variável z, temos que z é qualquer, logo $Ker(T) = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z \in \mathbb{R}\right\}$, ou seja o núcleo de T são todos os vetores que estão sobre o eixo z.*



Exemplo 124 *Encontre o núcleo da transformação linear:*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z, t) &= (x + y + z - t, 2x + z - t, 2y - t) \end{aligned}$$

Solução: Devemos encontrar os vetores $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que $T(v) = T(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$. Neste caso temos que resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$p_a = p_c = 3$ e $p = 3 < n = 4$ logo o sistema é compatível e indeterminado com grau de liberdade 1.

Logo,

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ -2y-z+t=0 \\ -z=0 \end{cases}$$

o que nos fornece,

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= 0 \\ t &= 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T) = \left\{(y,y,0,2y) \ \in \mathbb{R}^4 / \ y \in \mathbb{R}\right\} = [(1,1,0,2)]$

Exemplo 125 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é a projeção ortogonal sobre a reta cujas equações paramétricas são:*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

Encontre o Núcleo de T.

Solução: Projetar um vetor sobre uma reta é o mesmo que encontrar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor dessa mesma reta. No nosso caso, o vetor diretor é $u = (2,-2,1)$, logo

$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v = \left(\frac{v.u}{u.u}\right) u \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{(x,y,z).(2,-2,1)}{(2,-2,1).(2,-2,1)}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{2x-2y+z}{9}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{4x-4y+2z}{9}, \frac{-4x+4y-2z}{9}, \frac{2x-2y+z}{9}\right) \end{aligned}$$

Para encontrar o núcleo devemos ter,

$$T(x,y,z) = \left(\frac{4x-4y+2z}{9}, \frac{-4x+4y-2z}{9}, \frac{2x-2y+z}{9}\right) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 4x-4y+2z &= 0 \\ -4x+4y-2z &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, fazendo o escalonamento temos $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, assim

$$\begin{aligned} 4x - 4y + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z &= -4x + 4y \\ z &= -2x + 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T) = \left\{(x, y, -2x + 2y) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x \in \mathbb{R}\right\} = [(1, 0, -2), (0, 1, 2)]$

Definição 126 *Dada uma aplicação $T : V \to W$, diremos que T é **injetora** se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.*

Definição 127 *Uma aplicação $T : V \to W$ será **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W, ou seja, $T(V) = W$.*

Observação 128 *Da definição acima vemos que uma função será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.*

Teorema 129 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. então $Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, se e somente se T é injetora.*

Teorema 130 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então*

$$\dim Ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V$$

Corolário 131 *Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Corolário 132 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.*

Exemplo 133 *Seja $T : P_n \to P_{n+1}$, dada por $T(p(x)) = xp(x)$. Verifique se T é bijetora.*

Solução: Devemos verificar se T é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Usando o teorema (129) devemos apenas calcular o núcleo de T :

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= xp(x) \\ T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= x(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \\ T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= (a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1}) \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= 0 \\ a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^{n+1} \end{aligned}$$

logo $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ ($p(x)$ é o polinômio nulo) $\Rightarrow Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (observe que neste caso o vetor nulo de P_n é o polinômio nulo de grau n). Portanto T é injetora.

Como $\dim P_n = n+1$, $\dim P_{n+1} = n+2$ e $\dim Ker(T) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \dim Ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \\ 0 + \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \\ \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \end{aligned}$$

Note que $\dim \mathrm{Im}(T) = n+1 \neq n+2 = \dim P_{n+1} \Rightarrow \mathrm{Im}(T) \neq P_{n+1}$. Portanto T não é sobrejetora e assim T não é bijetora

3.2 Transformações Lineares e Matrizes

3.2.1 Transformação linear associada a uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Associada a matriz A definimos a transformação linear:

$$\begin{aligned} L_A: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & v \to A.v \end{aligned}$$

onde v é tomado como vetor coluna,

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_A(v) &= A.v \\ L_A(v) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das propriedades de operações de matrizes:

$$\begin{aligned} L_A(u+v) &= A.(u+v) = A.u + A.v = L_A(u) + L_A(v) \\ L_A(ku) &= A.(ku) = kA.u = kL_A(u) \end{aligned}$$

e portanto L_A é uma transformação linear.

Exemplo 134 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A tem ordem 3×4 e portanto ela induzirá uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned} L_A &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ L_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+y+z-t \\ 2x+z-t \\ 2y-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que a transformação acima está escrita em forma matricial, mas podemos escreve-la também na forma vetorial que estamos acostumados:

$$L_A(x,y,z,t) = (x+y+z-t, 2x+z-t, 2y-t)$$

Surpresa!! Esta é a mesma transformação do exemplo (124)

Exemplo 135 *Dada a transformação linear:*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) &= (10x - 20y - 30z, x - 2y - 3z) \end{aligned}$$

Encontre a matriz da transformação T (Isto é, encontre a matriz A cuja transformação associada a ela é exatamente a transformação T)

Solução: Passando da forma vetorial para a forma matricial temos:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 10x - 20y - 30z \\ x - 2y - 3z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a matriz de T, que denotaremos por $[T]$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação 136 *Ao obtermos a transformação associada a uma matriz A (ou, caso contrário, a matriz de uma transformação T), não mencionamos as bases dos espaços envolvidos. De fato, ao obtermos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas aos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ mas neste caso em particular estamos considerando as bases canônicas. Isto ficará claro na exposição a seguir.*

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$, à matriz

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos associar

$$\begin{array}{rcl} T_A & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & & v \to T_A(v) \end{array}$$

da seguinte maneira: Seja

$$X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A.X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

então

$$T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$$

onde $y_i = A_i.X$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada uma matriz $A_{m\times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

3.2.2 Matriz de uma transformação linear

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ linear, $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{array}{ccccccccc} T(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & \cdots & + & a_{m1}w_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ T(v_n) & & a_{1n}w_1 & + & \cdots & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^{\beta}_{\beta'}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β' :

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 137 *Note que se* $A = [T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *a transformação linear* T *passa a ser a transformação linear associada à matriz* A *e bases* β *e* β'*, iste é,* $T = T_A$

Exemplo 138 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.

Sejam $\beta = \{(1, 1, 1,), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.
Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$
$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,5) = a(1,3) + b(1,4) \\ T(1,1,0) &= (3,1) = c(1,3) + d(1,4) \\ T(1,0,0) &= (2,3) = e(1,3) + f(1,4) \end{aligned}$$

Portanto temos os sistemas:

$$, \quad \left[\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases} , \begin{cases} c + d = 3 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases} , \begin{cases} e + f = 2 \\ 3e + 4f = 3 \end{cases} \right]$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$\begin{bmatrix} a = 3 & b = -1 & , & c = 11 & , & d = -8 & e = 5 & f = -3 \end{bmatrix}$$

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 139 *: Sejam* V *e* W *espaços vetoriais,* α *base de* V*,* β *base de* W *e* $T : V \to W$ *uma aplicação linear. Então, para todo* $v \in V$ *vale:*

Teorema 140

$$[T(v)]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [v]_{\alpha}$$

Definição 141 *Dada uma base* β *e tranformação linear* $T : V \to V$ *denotaremos a matriz* $[T]^{\beta}_{\beta}$ *apenas por* $[T]_{\beta}$ *e ela será chamada de matriz de* T *em relação a base* β.

Definição 142 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e α a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então a matriz de T em relação a base canônica α, $[T]_\alpha^\alpha$, será denotada simplesmente por $[T]$.*

Exemplo 143 *Seja $T : P_2 \to P_2$ definido por $T(p(x)) = p(3x-5)$. Determine a matriz de T em relação a base $\beta = \{1, x, x^2\}$*

Devemos calcular $[T]_\beta = [T]_\beta^\beta$

$$\begin{aligned} T(p) &= p(3x-5) \\ T(a_0+a_1x+a_2x^2) &= a_0+a_1(3x-5)+a_2(3x-5)^2 \\ T(a_0+a_1x+a_2x^2) &= a_0+3a_1x-5a_1+a_2(9x^2-30x+25) \\ T(a_0+a_1x+a_2x^2) &= (a_0-5a_1+25a_2)+(3a_1-30a_2)x+9a_2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= T(1+0x+0x^2) = 1 = 1+0x+0x^2 \\ T(x) &= T(0+1x+0x^2) = -5+3x = -5+3x+0x^2 \\ T(x^2) &= T(0+0x+1x^2) = 25-30x+9x^2 \end{aligned}$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 144 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (2x-3y-2z, x-y-z, 2x-y+z)$ e sejam $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e $\beta = \{(-1,-1,0),(-1,0,-1),(0,-1,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$*

a) Determine $[T]_\beta^\alpha$, $[T]_\alpha^\beta$

b) Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine $[T(v)]_\beta$.

c) Calcule a multiplicação das matrizes: $[T]_\beta^\alpha . [T]_\alpha^\beta$. Que conclusão você pode tirar em relação as duas matrizes, ou que relação há entre as duas matrizes?

Solução: a) Cálculo de $[T]_\beta^\alpha$

$$T(x,y,z) = (2x-3y-2z, x-y-z, 2x-y+z)$$

$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \end{pmatrix} = a_1(-1,-1,0)+b_1(-1,0,-1)+c_1(0,-1,-1)$
$T(1,1,0) = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \end{pmatrix} = a_2(-1,-1,0)+b_2(-1,0,-1)+c_2(0,-1,-1)$
$T(1,1,1) = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 2 \end{pmatrix} = a_3(-1,-1,0)+b_3(-1,0,-1)+c_3(0,-1,-1)$

Devemos resolver os tres sistemas resultantes: Denotando por A a matriz dos coeficientes do sistema,temos:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos resolver os sistemas por matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora voce já está em condições de calcular $[T]_{\alpha}^{\beta}$. Faça esse cálculo como exercício

b) Vamos usar a relação $[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\beta} &= [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Faça você este item e tire suas conclusões. Mais adiante voce poderá verificar se suas conclusões estavam corretas.

Teorema 145 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(T) &= \textit{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha} \\ \dim Ker(T) &= \textit{nulidade de } [T]_{\beta}^{\alpha} = \textit{número de colunas de } [T]_{\beta}^{\alpha} - \textit{posto}\,[T]_{\beta}^{\alpha} \end{aligned}$$

Exemplo 146 *Seja $T : P_2 \to M_t(2,2)$ definida por $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p'(0) & 2p(1) \\ 0 & p''(3) \end{bmatrix}$ onde p' é a derivada de p. Sejam $.\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base para $M(2,2)$ e $\beta = \left\{1, x, x^2\right\}$ base para P_2.*

a) Determine $[T]_\alpha^\beta$.
b) Determine uma base para $N(T)$.
c) Determine uma base para $\mathrm{Im}(T)$.
d) T é injetora? E sobrejetora? Justifique.

SOLUÇÃO:
a)

$$\begin{aligned}
\text{Note que } T(a+bx+cx^2) &= \begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \\
\text{Determinando } [T]_\alpha^\beta &: \\
T(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T(x^2) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{Logo, } [T]_\alpha^\beta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Seja } p(x) &\in N(T) \Rightarrow T(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0 \\
\text{Logo, } p(x) &= 0 + 0x + 0x^2 \in N(T) \Rightarrow N(T) = \{0\}
\end{aligned}$$

c) Seja $A \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Portanto,

$\mathrm{Im}(T) = \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]$

Como os geradores da $\mathrm{Im}(T)$ formam um conjunto $L.I.$ (Verifique!) tem-se que

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

d) T é injetora pois $N(T) = \{0\}$, mas não é sobrejetora pois $\dim \mathrm{Im}(T) = 3 \neq \dim M(2,2)$

3.3 Composição de transformações lineares

Definição 147 *Se $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ são duas transformações lineares a composta das duas transformações lineares é definida do mesmo modo que a composição de funcões (lembre-se que um transformação linear é uma função com a propriedade adicional de ser linear) da seguinte forma*

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &: V \to U \\ (T_2 \circ T_1)(v) &= T_2(T_1(v)) \end{aligned}$$

Exemplo 148 *Se $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x,y) = (x-y, y-x, y-x)$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x - y - z$ então $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e*

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x,y) &= T_2(T_1(x,y)) \\ &= T_2(x-y, y-x, y-x) \\ &= (x-y) - (y-x) - (y-x) \\ &= x - y - y + x - y + x \\ &= 3x - 3y \end{aligned}$$

Teorema 149 *Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ transformações lineares e α, β, γ bases de V, W, U respectivamente. Então a composta de T_2 com $T_1, T_2 \circ T_1 : V \to U$ é linear e*

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta \cdot [T_1]_\beta^\alpha$$

Proposição 150 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear . Sejam α e α' bases de V e β e β' bases de W. Então vale a relação:*

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W \circ T \circ I_V]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W]_{\beta'}^{\beta} [T]_\beta^\alpha [I_V]_\alpha^{\alpha'}$$

onde I_W e I_V são as aplicações identidades de W e V respectivamente.

3.4 A Inversa de uma transformação linear

Definição 151 *Dá-se o nome de **isomorfismo** a uma transformação linear $T : V \to W$ que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando há um isomorfismo entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são **Isomorfos.***

Definição 152 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe uma transformação linear $S : W \to V$ tal que $T \circ S = I_W$, onde $I_W : W \to W$ é a identidade em W, dizemos que S é a inversa a direita de T. Se existe uma transformação $R : W \to V$, tal que $R \circ T = I_V$, onde $I_V : V \to V$ é a identidade em V, dizemos que R é a inversa a esquerda de T.*

Definição 153 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe uma aplicação $T^{-1} : W \to V$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$ então dizemos que T é inversível e que T^{-1} é a inversa de T*

Proposição 154 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe a inversa de T, T^{-1}, então T^{-1} é uma transformação linear*

Proposição 155 *Se $T : V \to W$ é um isomomorfismo, então T é inversível e além disso T^{-1} também é um isomorfismo.*

Proposição 156 *Se $T : V \to W$ uma transformação linear invertível (T é um isomorfismo) e α e β são bases de V e W, então:*

$$\left[T^{-1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$$

Observação: Quando estamos trabalhando com o espaço $\mathbb{R}^n$ e a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por simplicidade omitimos as bases e a matriz de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,em relação a base canônica, é denotada simplesmente por $[T]$. Neste caso a proposição acima é escrita na forma mais conveniente: "Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é inversível então $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$ "

Proposição 157 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, com* $\dim V = \dim W$, *e α e β bases de V e W respectivamente. Então T é inversível se, e somente se* $\det [T]_{\beta}^{\alpha} \neq 0$.

Observação 158 *Se na proposição acima tivermos $V = W = \mathbb{R}^n$ podemos escrever: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então T é invertível se* $\det [T] \neq 0$

Exemplo 159 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + 3z, x + 2y + z)$, determine a transformação inversa T^{-1}.*

Solução: Facilmente podemos ver que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[T^{-1}\right] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo $T^{-1}(x, y, z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$. Como exercício verifique que vale $\left(T \circ T^{-1}\right)(x, y, z) = (x, y, z)$

Podemos também neste caso calcular a inversa usando diretamente a difinição de transformação inversa da seguinte forma

Sabemos que $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T^{-1} \circ T = I$ ou $T \circ T^{-1} = I$. Suponhamos que $T^{-1}(x, y, z) = (m, n, s)$, devemos encontrar

m, n e s tais que $T \circ T^{-1} = I$ (devemos usar esta igualdade pois com a outra não funciona, tente e veja o que acontece). Portanto

$$\begin{aligned}
\left(T \circ T^{-1}\right)(x,y,z) &= I(x,y,z) = (x,y,z) \\
T(T^{-1}(x,y,z)) &= (x,y,z) \\
T(m,n,s) &= (x,y,z) \\
(m+2n+2s, m+n+3s, m+2n+s) &= (x,y,z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m+2n+2s &= x \\
m+n+3s &= y \\
m+2n+s &= z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} escalonando \\ \Longrightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
s &= x - z \\
n &= x - y + x - z = 2x - y - z \\
m &= x - 2(2x - y - z) - 2(x - z) = -5x + 2y + 4z
\end{aligned}$$

Logo

$$T^{-1}(x,y,z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$$

3.5 Nona lista de exercícios

1. Verifique se as funções dadas abaixo são transformações lineares. Em cada caso, justifique sua afirmação:

   (a) $T : \Re^4 \to \Re^3$ dada por $T(x, y, z, t) = (x + y, 0, z + t)$

   (b) $L : \Re^2 \to \Re$ dada por $L(x, y) = xy$

   (c) $S : M(2, 2) \to \Re^2$, $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b, 0)$

   (d) $G : M(5, 5) \to M(5, 5), G(A) = AB+I_5$, onde $B = diag(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ é uma matriz diagonal e I_5 é a matriz identidade de ordem 5.

   (e) $F : P_2 \to P_2$ tal que $T(p) = p + q$, $p \in P_2$ e $q(t) = t^2 + 1$, $t \in \Re$

   (f) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x, y) = (x + y, x - y)$

   (g) $T : M(2, 2) \to \mathbb{R}$ dada por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   (h) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = |x|$.

   (i) $T : M_2 \to P_1$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + dt$

   (j) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S(x, y, z) = (3x, a, 5z)$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

   (k) $T : P_n \to P_n$ tal que $T(p(x)) = p^{'}(x) + x^2 p^{''}(x)$

2. Seja $T : P_2 \to P_2$ um operador linear tal que
   $T(p_0)(t) = 1+t$, $T(p_1)(t) = t+t^2$, $T(p_2)(t) = 1+t-2t^2$ onde $p_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$.

   (a) Encontre $T(p)$

   (b) T é injetora? Justifique sua resposta.

   (c) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

   (d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

3. a) Encontre a transformação $T : \Re^2 \to M(2, 2)$ tal que
   $T(-1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $T(0, -1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   b) Usando a transformação T encontrada no item a) , calcule $T(1000, 999)$

   c) A transformação é bijetora? Justifique sua resposta.

4. Sejam $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

(a) Determine $F \circ G$

(b) Determine uma base para $N(F \circ G)$

(c) Determine uma base para $\text{Im}(F \circ G)$

(d) $F \circ G$ é isomorfismo? Justifique sua resposta.

5. Seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ uma transformação linear definida por $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,2)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

   (a) $N(T)$

   (b) $N(T) \cap \text{Im}(T)$

   (c) $N(T) + \text{Im}(T)$

6. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\Re^2$ e $\Re^3$, respectivamente e

   $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (a) Encontre a transformação linear T.

   (b) Enconte uma base para $Ker(T)$ e uma base para $\text{Im}(T)$.

   (c) Encontre uma base γ de $\Re^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Encontre a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$ que é a projeção sobre a reta dada por $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$

   Determine $\dim \text{Im}(t)$ e $\dim Ker(T)$. T é inversível ? Se for, determine T^{-1}.

8. Considere o operador linear em $\Re^3$ tal que $T(1,0,0) = (1,1,1)$, $T(0,0,1) = (1,0,1)$, $T(0,1,2) = (0,0,4)$.

   T é isomorfismo? Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

9. Seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ o operador linear definido por $T(x,y,z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostre que $(T^2 - I) \circ (T^2 - 3I) = 0$.

10. Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação definida por $T(p(x)) = xp(x-3)$. Encontre $[T]^{\gamma}_{\beta}$ em relação às bases $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\gamma = \{1, x, x^2\}$.

11. Encontre a transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^3$ cujo núcleo é gerado por $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ e a imagem gerada pelo vetor $(1,-1,1)$.

12. Encontre a transformação linear $T : \Re^4 \to \Re^4$ cujo núcleo é gerado por $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

13. Sejam R, S, T tres transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Se
$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \quad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$
encontre T tal que $R = S \circ T$.

14. Suponhamos $T : V \to W$ linear e V tem dimensão finita. Mostre que V e a $\text{Im}(T)$ têm a mesma dimensão se e somente se T é inversível. Determine todas as transformações lineares não inversíveis $T : \Re^4 \to \Re^3$.

15. Mostre que se a matriz transformação $[T]$ é inversível então $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

16. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

    (a) Mostre que o núcleo de T é um subespaço de V.

    (b) Mostre que a imagem de T é um subespaço de V.

17. Seja $T : P_2 \to P_2$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp^{'}(x)$

    (a) Quais dos seguintes polinômios pertencem ao $N(T)$?

        i. 2

        ii. x^2

        iii. $1 - x$

    (b) Quais dos polinômios do item a) pertencem a $\text{Im}(T)$?

    (c) Descreva $N(T)$ e $\text{Im}(T)$.

18. Quando possível, dê exemplos de transformações lineares satisfazendo:

    (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim N(T) = 1$

    (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$

    (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}(T) = \{(0, 0, 0)\}$

    (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3 : z = -x\}$

    (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; y = 2x - z\right\}$.

19. Seja $T : P_3 \to P_2$ definida por $T(p) = p^{'}$. Determine a matriz T em relação às bases $\left\{1, t, t^2, t^3\right\}$ e $\left\{1, 1 + t, -1 + t^2\right\}$.

20. Mostre que se uma transfomação linear é injetora então $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

21. Seja β a base canônica de M_2. Se $T : M_2 \to P_3$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$

(a) Encontre $[T]_{\alpha}^{\beta}$ onde $\alpha = \left\{2, 2+x, 2+x^2, 2+x^3\right\}$ é base de P_3

(b) Faça o escalonamento da matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$

(c) Detemine dim $Ker(T)$

(d) Determine dim Im(T).

22. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é inversível então:

(a) dim $N(A) =$ _____

(b) dim Im$(T) =$ _____

23. Determine dim $N(T)$ sabendo que:

(a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$ com dim(Im$(T)) = 3$;

(b) $T : V \to W$ com T sobrejetiva, dim $V = 5$, dim $W = 3$;

(c) $T : V \to W$ com T injetiva;

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabendo que existe a inversa de T.

24. Explique em cada caso abaixo porque **não** existe uma transformação linear:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem;

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ que seja sobrejetiva;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva;

(d) $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ tal que dim $N(T) =$ dim Im(T);

(e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ com $N(T) = [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$ e Im$(T) = [(1,1,2),(2,2,4)]$.

25. Responda as seguintes questões:

(a) Se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ é uma transformação linear, podemos ter dim Im$(T) > 6$? Justifique sua resposta

(b) Existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,2)$ e $T(2,2) = (3,1)$? Justifique sua resposta.

26. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que

(a) $T(u) = 2u$

(b) $T(v) = -v$

27. Sejam as transformações lineares $S : P_1 \to P_2$ e $T : P_2 \to P_1$ definidas por

$$\begin{aligned} S(a+bx) &= a + (a+b)x + 2bx^2 \\ T(a+bx+cx^2) &= b + 2cx \end{aligned}$$

(a) Determine $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$

(b) É possível calcular $(T \circ S)(a + bx)$? Em caso afirmativo calcule $(T \circ S)(\pi + \pi x)$.

ALGUMAS SUGESTÕES

1. j) Sugestão: analise os casos $a = 0$ e $a \neq 0$

21. c) A dimensão de $Ker(T)$ é a nulidade de $[T]_\alpha^\beta$

21. d) A dimensão de $\text{Im}(T)$ é o posto de $[T]_\alpha^\beta$

Capítulo 4

OPERADORES LINEARES

Definição 160 *Uma transformação linear $T : V \to V$ é chamada de operador linear.*

Observação 161 *Todas as propriedades já vistas para transformações lineares em geral vale para um operador linear*

4.1 Transformações especiais no plano e no espaço

Os operadores lineares que veremos a seguir são chamados de transformações especiais do plano e do espaço por serem bastantes usados em aplicações práticas e também em aplicações numéricas.

Transformações no Plano

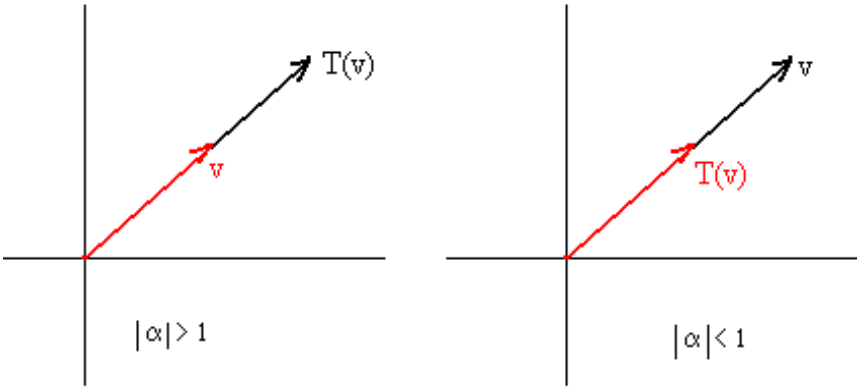
a) Dilatação ou contração

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= \alpha(x,y) \end{aligned}$$

Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor
Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor
Se $\alpha = 1$, T é a identidade
Se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor
Se $\alpha > 0$, T mantém o mesmo sentido do vetor
Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente, para $\alpha > 0$ temos:



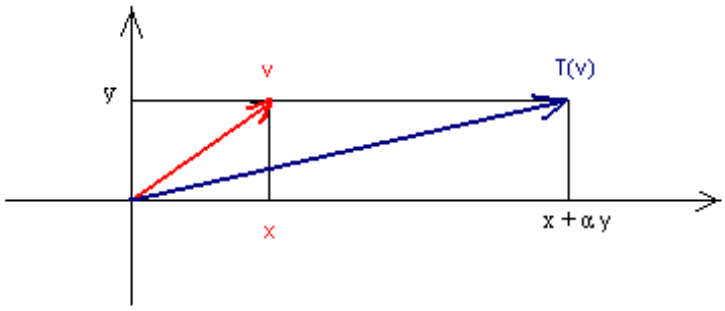
b) Cisalhamento na direção do eixo dos x

$$\begin{array}{rcl} T & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) & = & (x+\alpha y, y) \end{array}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



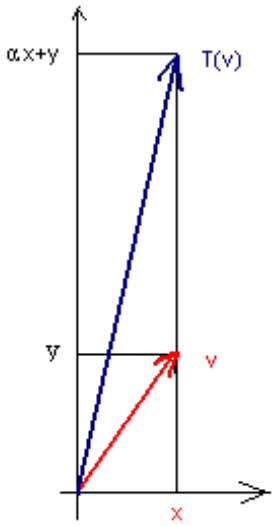
c) Cisalhamento na direção do eixo dos y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x, \alpha x + y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



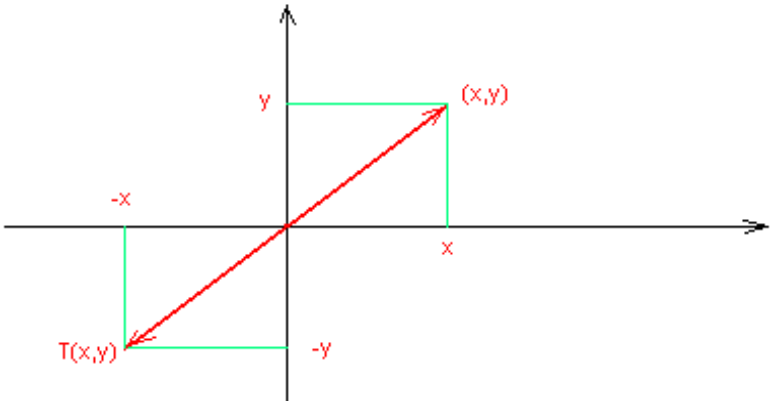
d) Reflexão na origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (-x, -y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

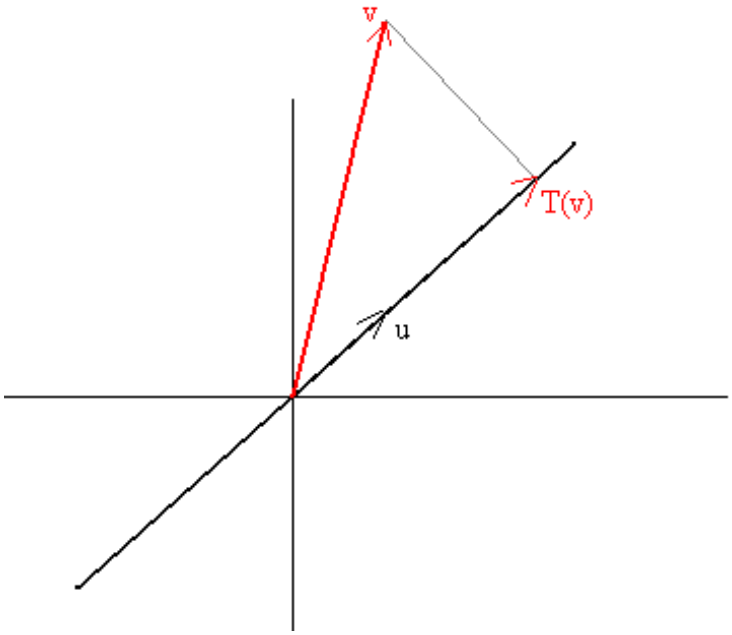
Geometricamente:



Observação 162 *Observe que este é um caso particular da contração quando* $\alpha = -1$

e) Projeção sobre uma reta no plano

Definição 163 *Definimos como sendo Projeção sobre uma reta* r*, que passa pela origem, no plano o operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $T(v) = proj_u v$*, onde* u *é o vetor diretor da reta* r*.*



Definição 164 ***Exemplo 165*** *Determinar o operdor linear que a projeção sobre a reta* $y = -6x$

A reta $y = -6x$ pode ser parametrizada por

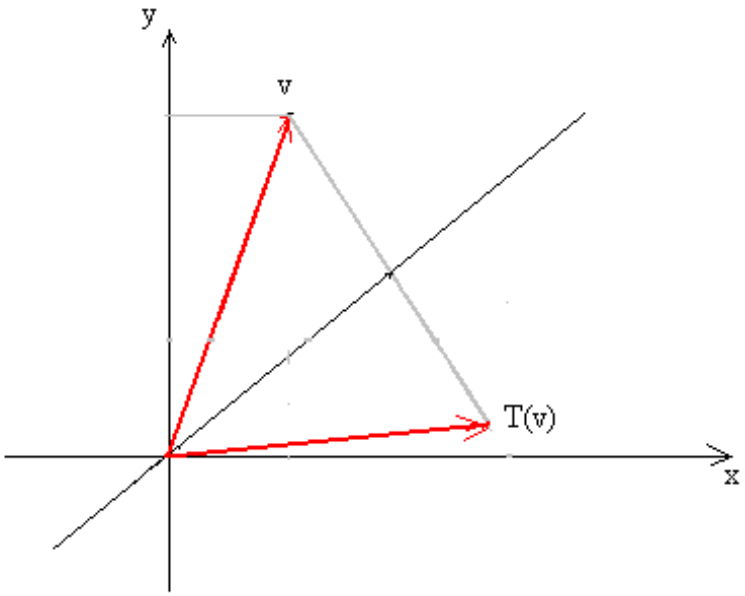
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -6t \end{aligned}$$

logo um vetor diretor da reta é $u = (1, -6)$.

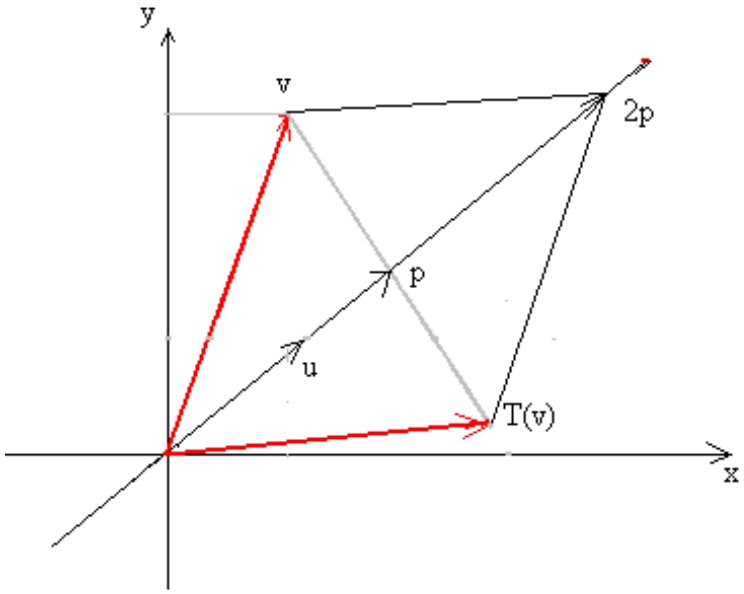
$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v \\ T(v) &= \left(\frac{u \bullet v}{u \bullet u}\right) u \\ T(x,y) &= \left(\frac{(1,-6) \bullet (x,y)}{(1,-6) \bullet (1,-6)}\right)(1,-6) \\ T(x,y) &= \left(\frac{x-6y}{37}, \frac{-6x+36y}{37}\right) \end{aligned}$$

f) Reflexão através de uma reta no plano

Definição 166 *Definimos como sendo Reflexão através da reta r, que passa pela origem, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $|T(v)| = |v|$ e $proj_u v = proj_u T(v)$ onde u é o vetor diretor da reta r.*



Para obter a expressão pata a traformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de uma reta no plano onde estão mostrados o vetor diretor diretor, u , da reta, o vetor p, a projeção de v na direção do vetor u,e o vetor $T(v)$.



Da definição de reflexão podemos observar que

$$\begin{aligned} T(v)+v &= 2p \\ T(v) &= 2p-v \\ T(v) &= 2proj_u v - v \end{aligned}$$

Portanto a reflexão em torno de uma reta no plano é dada por

$$T(v) = 2proj_u v - v$$

onde $proj_u v$ é a projeção do vetor v na direção do vetor u

Casos Particulares

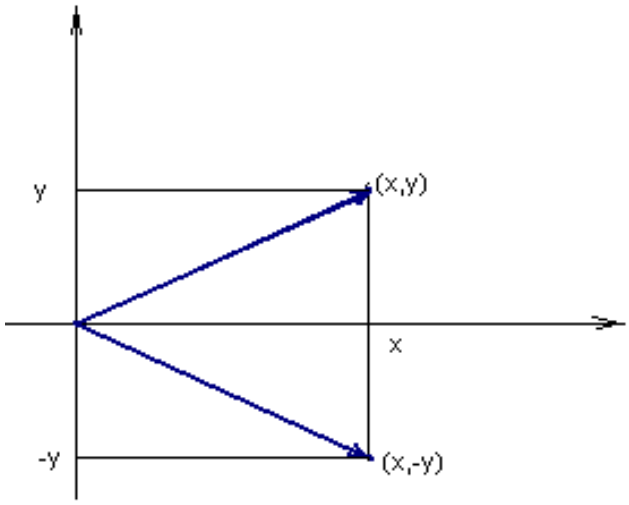
f.1) Reflexão em torno do eixo dos x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x,-y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



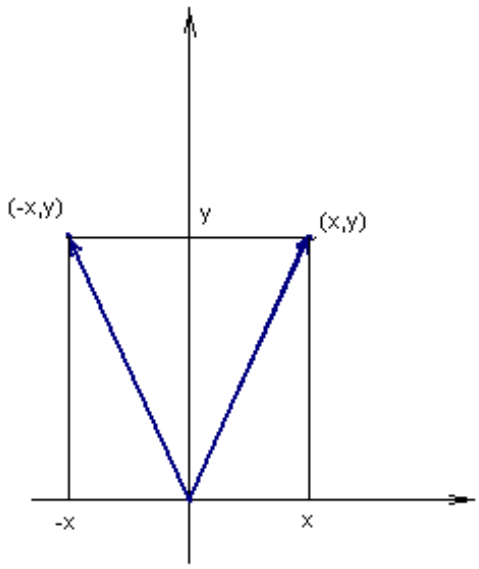
f.2) Reflexão em torno do eixo dos y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (-x,y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



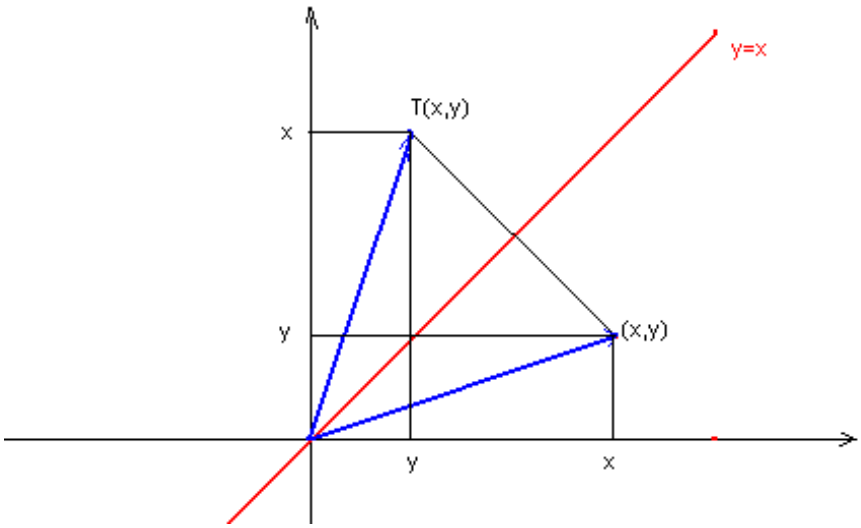
f.3) Reflexão em torno da reta $y = x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (y,x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



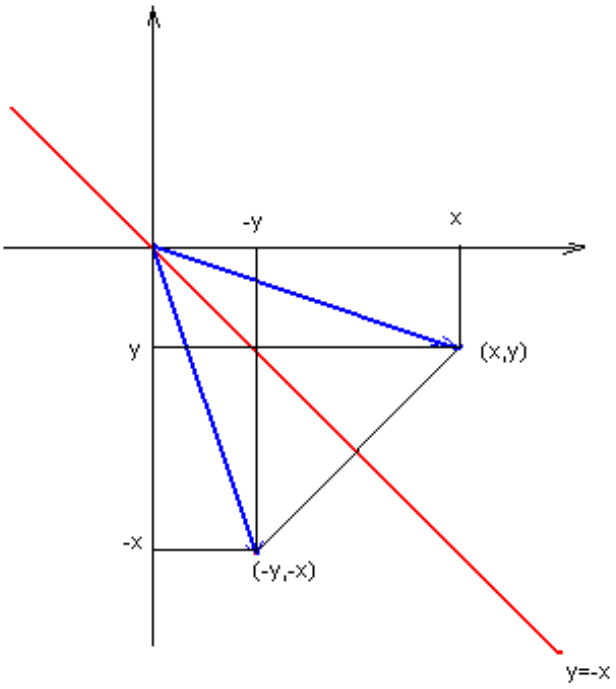
f.4) Reflexão em torno da reta $y = -x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (-y,-x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

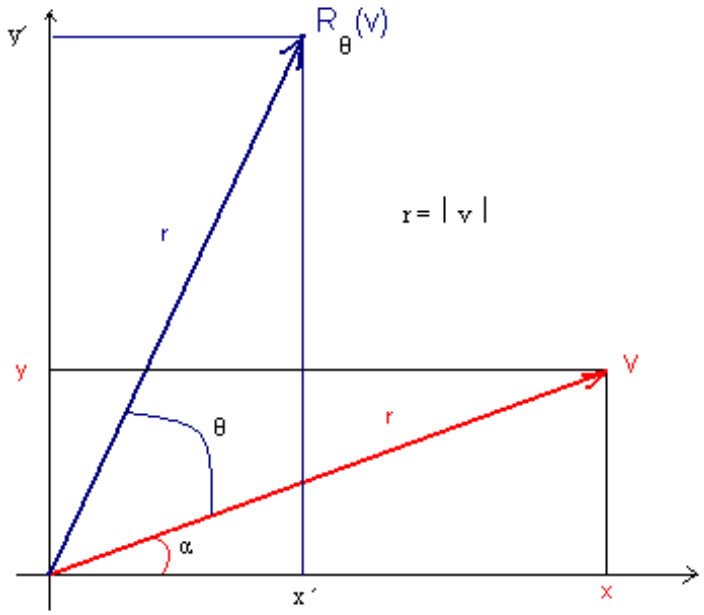
Geometricamente:



g) Rotação de um ângulo θ

Definimos Rotação no plano de um ângulo θ a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $|T(v)| = |v|$ e o ângulo entre os vetores $T(v)$ e v é θ.

Geometricamente



Vamos agora determinar a matriz da transformação linear rotação de um ângulo θ e a expressão de R_θ em função de x e y. Seja

$$\begin{aligned} R_\theta &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ R_\theta(x,y) &= (x',y') \end{aligned}$$

Quando rotacionamos um vetor, pela própria definição de rotação, o comprimento (módulo) do vetor não se altera. Seja $r = |v|$, onde $v = (x,y)$.

Da figura acima e usando relações trigonométricas temos;

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

Mas

$$\begin{aligned} r\cos\alpha &= x \\ r\sin\alpha &= y \end{aligned}$$

então

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

Analogamente

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta + x\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Assim

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos ver neste caso que matriz de uma rotação é:

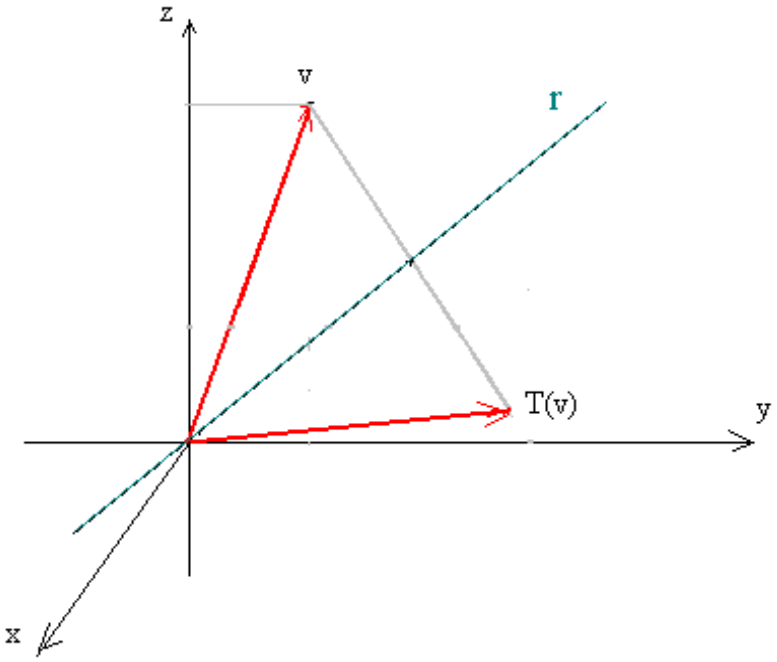
$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Transformações no Espaço

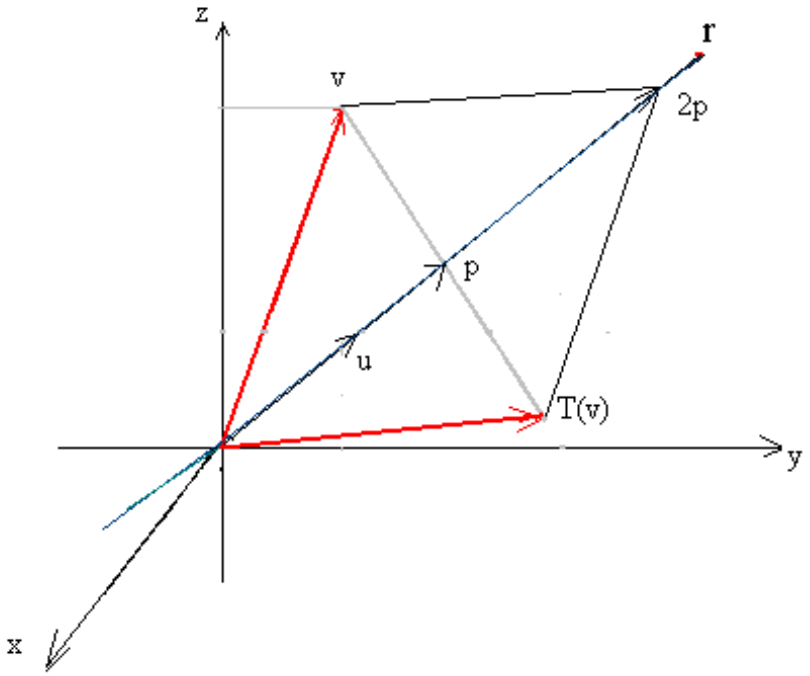
a) Reflexão através de uma reta no espaço

Definição 167 *Definimos como sendo Reflexão através da reta r, que passa pela origem, no espaço a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|T(v)| = |v|$ e $proj_u v = proj_u T(v)$ onde u é o vetor diretor da reta r.*

Geometricamente



Para obter a expressão pata a traformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de uma reta no plano onde estão mostrados o vetor diretor diretor, u , da reta, o vetor p, a projeção de v na direção do vetor u,e o vetor $T(v)$.



Da definição de reflexão podemos observar que

$$\begin{aligned} T(v)+v &= 2p \\ T(v) &= 2p-v \\ T(v) &= 2proj_u v - v \end{aligned}$$

Portanto a reflexão em torno de uma reta no espaço é dada por

$$T(v) = 2p - v$$

ond $p = proj_u v$ é a projeção do vetor v na direção do vetor u

Casos Particulares: Reflexão em relação aos eixos coordenados

a.1) Reflexão através do eixo x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x,-y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a.2) Reflexão através do eixo y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a.3) Reflexão através do eixo z

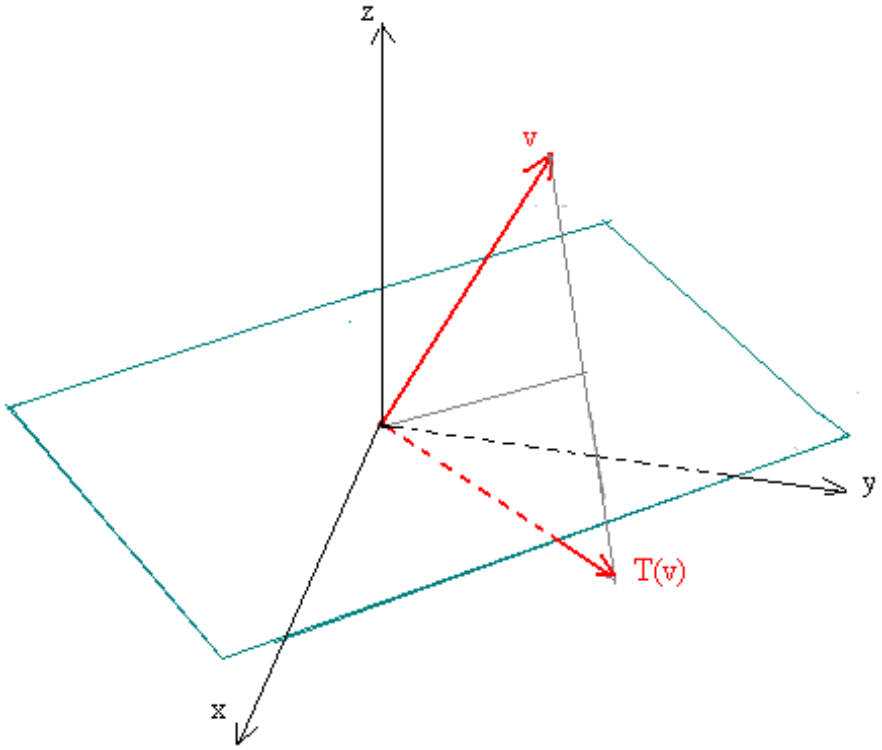
$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

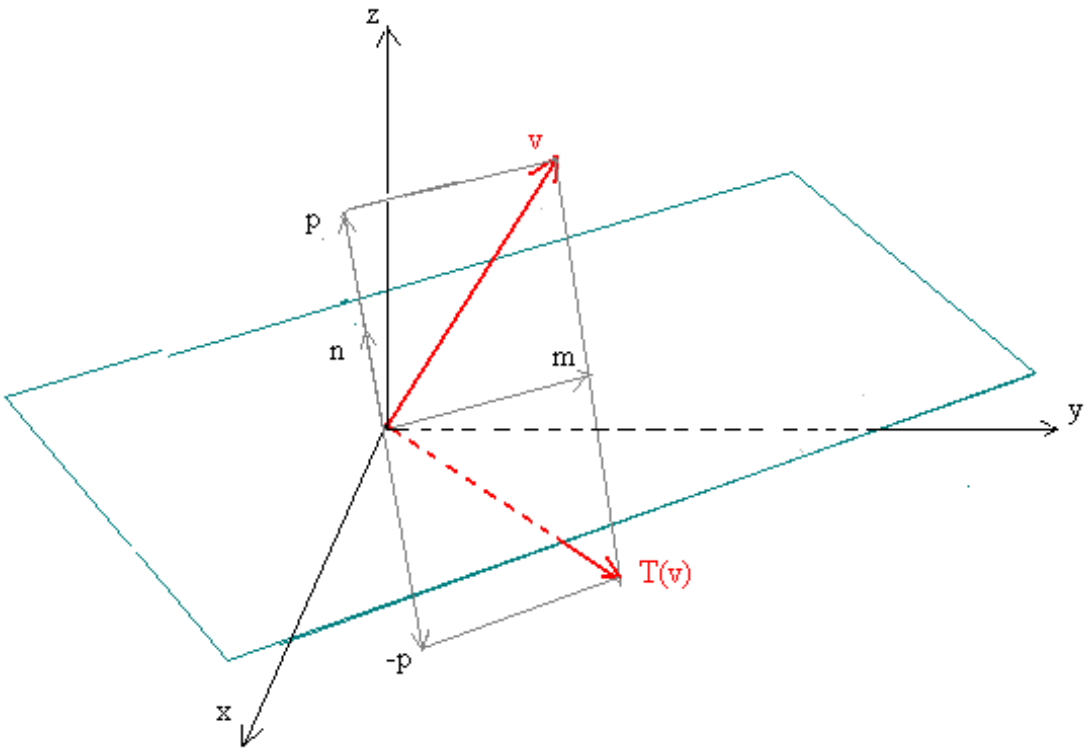
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Reflexão através de um plano

Definição 168 *Definimos Reflexão através de um plano, que passa pela origem, no espaço ao operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $|T(v)| = |v|$ *e* $proj_n v = -proj_n T(v)$, *onde* n *o vetor normal do plano.*



Para obter a expressão para a transformação T , considere a figura abaixo que representa a reflexão em torno de um plano no espaço onde estão mostrados o vetor normal do plano, vetor n , o vetor projeção de v na direção do vetor n, vetor p, o vetor projeção sobre o plano, vetor m, e o vetor $T(v)$.



Da definição de Reflexão através de uma plano podemos deduzir que

$$\begin{cases} p + m = v \\ m - p = T(v) \end{cases}$$

Portanto

$$T(v) = v - 2p$$

onde $p = proj_n v$ é a projeção de v na direção do vetor normal n do plano.

Casos particulares: Reflexão através dos planos coordenados

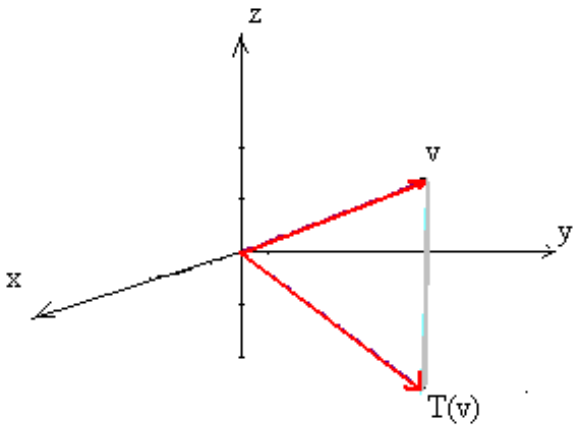
b.1) Reflexão através do plano xy

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x,y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



b.2) Reflexão através do plano xz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x,-y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

b.3) Reflexão através do plano yz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

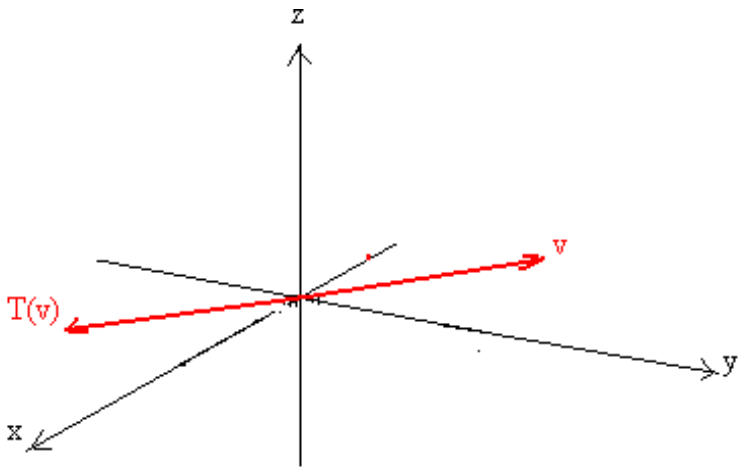
c) Reflexão no origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

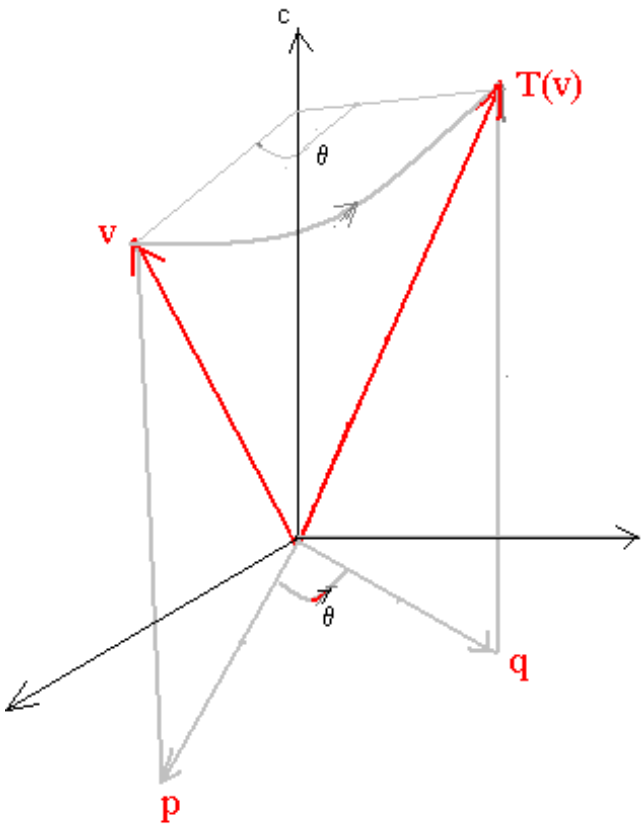
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



d) Rotação no Espaço.

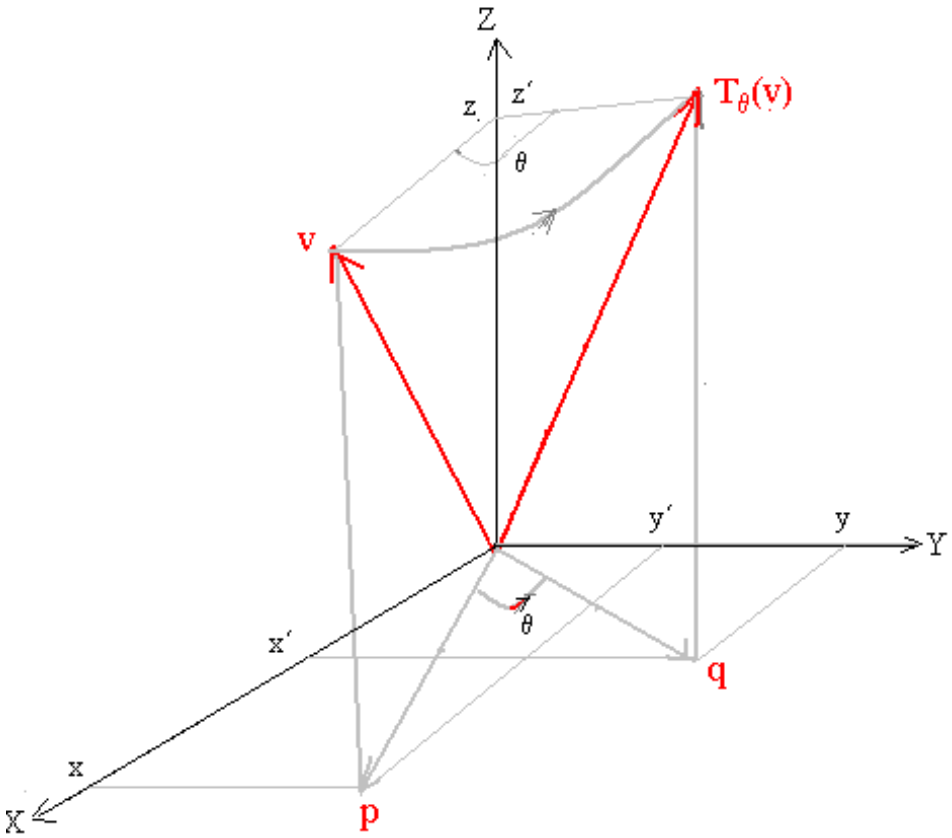
Definição 169 *Definimos Rotação de um ângulo θ em torno de um eixo coordenado c ao operador linear $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|T_\theta(v)| = |v|$ e o ângulo entre a projeção de v no plano ortogonal a c e a projeção de $T_\theta(v)$ no plano ortogonal a c é o ângulo θ medido no sentido anti-horário a partir da projeção de v no plano ortogonal a c.*



d.1) Rotação em torno do eixo z

Para obter a expressão da transformação que é uma rotação em torno do eixo z vamos considerar:

$$\begin{aligned} p &= \text{projeção de } v \text{ no plano } xy \\ q &= \text{projeção de } T(v) \text{ no plano xy} \end{aligned}$$



$$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$$

Observe que $z' = z$

Como $|T(v)| = |v|$ então $|p| = |q|$. Além disso o vetor q é obtido pela rotação do ângulo θ do vetor p no plano xy, ou seja, $q = R_\theta(p)$. Como já visto em rotação no plano (item g) de Transformações no plano) temos que

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Portanto

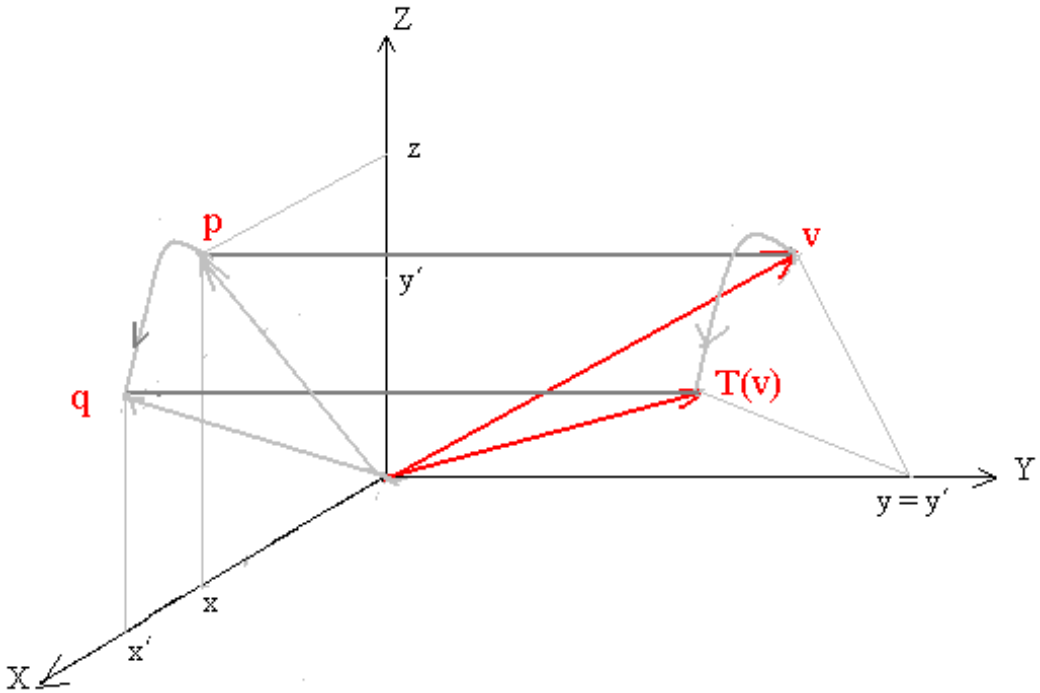
$$\begin{aligned} T_\theta &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T_\theta(x, y, z) &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[T_\theta]_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.2) Rotação em torno do eixo y



$$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$$

Como a rotação é em torno do eixo y temos $y' = y$. No plano xz vemos que o vetor q é obtido a partir do vetor p pela rotação do ângulo θ no **SENTIDO HORÁRIO.** Portanto podemos considerar o vetor p obtido a partir do vetor q por uma rotação no sentido anti-horário, ou seja, $R_\theta(p) = q$. Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + z\sin\theta \\ z' &= z\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\theta(x,y,z) &= (x',y',z') \\ T_\theta(x,y,z) &= (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta) \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$[T_\theta]_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

d.3) Rotação em torno do eixo x

A matriz da Rotação em torno do eixo x é dada por

$$[T_\theta]_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Exemplo 170 *Determinar o ângulo formado entre v e $T(v)$ quando o vetor $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ gira em torno do eixo z de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad*

Solução:

$$\begin{aligned} [T(v)] &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}' \\ [T(v)] &= \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}' \\ [T(v)] &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

Como desejamos o ângulo entre v e $T(v)$,vamos usar afórmula do cosseno do ângulo entre dois vetores:

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot T(v)}{|v|\,|T(v)|} = \frac{1}{2}$$

Portanto o ângulo entre v e $T(v)$ é $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

4.2 Propriedades dos operadores inversíveis

Definição 171 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existir um operador $T^{-1} : V \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (neste caso $I : V \to V$ é a identidade em V) então dizemos que o operador T é inversível e T^{-1} é o operador inverso de T.*

Observação 172 *Um operador é inversível se, e somente se, ele é um isomorfismo*

Seja $T : V \to V$ um operador linear:

I) Se T é inversível e T^{-1} sua inversa, então $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$

II) O operador T é inversível se, e somente se, $Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

III) O operador T é inversível se, e somente se, $\det[T] \neq 0$

IV) Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V então $\beta = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base de V.

Se T é inversível e β uma base de V então $T^{-1} : V \to V$ é linear $\left[T^{-1}\right]_{\beta}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\beta}\right)^{-1}$. Quando β é a base canônica temos a forma mais simples $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$ e portanto $\left[T^{-1}\right] \cdot [T]^{-1} = \left[T^{-1} \circ T\right] = [I]$. Com isso vemos que T é inversível se e somente se $\det[T] \neq 0$.

Exemplo 173 *Considere o operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por*

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

verifique se T é inversível e em caso afirmativo encontre T^{-1}

Solução: Como $det[R_\theta] = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, temos que R_θ é inversível. Como $\left[R_\theta^{-1}\right] = [R_\theta]^{-1}$, basta calcular a inversa da matriz deR_θ

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{matrix} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\ -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \end{matrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Note que $[R_\theta]^{-1} = [R_\theta]^T$, ou seja, $[R_\theta]$ é uma matriz ortogonal, logo $R_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ y\cos\theta - x\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1}(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta)$$

Exemplo 174 *Seja T o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal do vetor $v = (x,y,z)$ na direção da reta dada pela interseção dos planos $y = x$ e $z = y$. Verifique se T é inversível e em caso afirmativo determine T^{-1}.*

Solução: Para determinar a projeção na direção da reta basta determinar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor da reta. Devemos inicialmente determinar o vetor diretor da reta:

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \end{cases}$$

Para obter a equações paramétricas fazemos $x = t$, logo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

portando o vetor diretor da reta é $u = (1,1,1)$.

$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\right) u \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}\right)(1,1,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{x+y+z}{3}\right)(1,1,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det[T] = 0$$

Como $\det[T] = 0$ temos que T não é inversível.

Exemplo 175 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma rotação de $\frac{\pi}{4} rad$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma reflexão em torno da reta $y = -2x$. Determine a transformação $R = S \circ T$.*

Solução

$$\begin{aligned} R &= S \circ T \\ [R] &= [S]\,[T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \\ [T] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(v) &= 2p - v \\ S(x,y) &= 2\left(\frac{(x,y)\cdot(1,-2)}{(1,-2)\cdot(1,-2)}\right)(1,-2) - (x,y) \\ S(x,y) &= \left(\frac{-3x-4y}{5}, \frac{-4x+3y}{5}\right) \end{aligned}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [R] &= [S]\,[T] \\ [R] &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{2} & \frac{7}{10}\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R(x,y) = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}x - \frac{\sqrt{2}}{10}y, -\frac{\sqrt{2}}{10}x + \frac{7\sqrt{2}}{10}y\right)$$

4.2.1 Matrizes Semelhantes

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Sejam α e β bases de V e $[T]^{\alpha}_{\alpha}$, $[T]^{\beta}_{\beta}$ matrizes de T em relação as bases α e β respectivamente, então:

$$[T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\alpha}$$

Lembrando que $[I]^{\beta}_{\alpha} = \left([I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1}$ temos que

$$[T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\left([I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1}$$

Chamando $[I]_{\beta}^{\alpha} = A$:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = A\,[T]_{\alpha}^{\alpha}\,A^{-1}$$

Definição 176 *Dadas as matrizes A e B, se existe uma matriz P inversível tal que*

$$A = PBP^{-1}$$

então dizemos que as matrizes A e B são semelhantes.

Observação 177 *Se A e B são semelhantes então $detA = detB$, mas não vale a recíproca.*

4.3 Operadores autoadjuntos e ortogonais

Definição 178 *Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T : V \to V$ um operador linear. Então:*

a) T é chamado um *operador auto-adjunto* se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica
b) T é chamado um *operador ortogonal* se $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal

Observação 179 *Consideraremos aqui apenas os operadores $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com o produto escalar usual (que é um produto interno no espaço $\mathbb{R}^n$).*

Observação 180 *Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é ortonormal se $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$*

Portanto podemos dizer que um operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador auto-adjunto se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz simétrica. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador ortogonal se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz ortogonal.

Exemplo 181 *Consideremos a transformação $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z.*

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

A matriz da transformação T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esta é uma matriz ortogonal, T é um operador ortogonal

Exemplo 182 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $T(x, .y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$. A matriz de T é*

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de T é simétrica, então T é um operador auto-adjunto.

Teorema 183 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Se T é um operador auto-adjunto então*

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 184 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

a) T é ortogonal
b) T preserva o produto escalar, isto é, $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w, \ \forall v, w \in \mathbb{R}$
c) T preserva o módulo, isto é, $|T(v)| = |v|$
d) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Isto é, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal

4.4 Décima lista de exercícios

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz P que realiza esta semelhança.

2. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que os vetores $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, -1)$ pertençam ao núcleo de T e que $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$

3. Seja T a reflexão no origem dada por

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (-x, -y, -z) \end{aligned}$$

   Determine a inversa T^{-1} da transformação T.

4. Defina operador simétrico e operador ortogonal. Dê um exemplo para cada um dos casos, justificando sua escolha.

5. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $A = G \circ L$ onde G é a rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y e L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z.. Determine a matriz de A em relação a base canônica , isto é, determine $[A]$. O operador A é ortogonal? E auto-adjunto?

6. Determine a transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão da reta $y = -x$,seguida de uma dilatação de fator 2 na direção ox e, um cisalhamento de fator 3 na direção vertical.

7. Usando inversão matricial mostre o seguinte:

(a) A transformação inversa de uma reflexão em torno da reta $y = x$ é a reflexão em torno da reta $y = x$.

(b) A transformação inversa de uma reflexão em torno de um eixo coordenado é a reflexão em torno daquele eixo.

8. a) Encontre a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.

   b) Escreva-a em forma matricial.

9. No plano, uma rotação anti-horária de 45^0 é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a projeção de vetor v no plano $x+y+z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

11. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $x + y + z = 0$. Encontre $L(x, y, z)$.

12. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y. Encontre $A(x, y, z)$.

13. Verifique se as matrizes dadas são semelhantes

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que:

    (a) $A - I$ e $B - I$ são semelhantes.

    (b) A^k e B^k são semelhantes, para cada inteiro positivo k.

    (c) Se A e B são inversíveis, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

15. Seja T o operador linear em $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ e considere a base usual α do $\mathbb{R}^3$ e a base $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

    (a) Mostre que as matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$ são semelhantes.

    (b) T é inversível? Se for determine a lei que define T^{-1}.

16. Seja A é uma matriz de ordem n fixada. Seja $T : M_n \to M_n$ definida por $T(N) = AN - NA$. Mostre que T não é inversível.

17. Sejam $T : V \to V$ é um operador linear e α e β bases distintas de V. Mostre que $\det [T]_\alpha^\alpha = \det [T]_\beta^\beta$

18. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x - z\right\}$

19. Determine se a transformação $T(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ é uma transformação auto-adjunta ou ortogonal. Justifique sua resposta.

20. O operador linear $T(x,y,z) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}z, y, \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}z)$ é a rotação de um ângulo θ em torno do eixo y. Determine o valor do ângulo θ.

21. Seja o operador $T : P_3 \to P_3$ definido por $T(p) = x^3 p(\frac{1}{x})$:

    (a) Mostre T é inversível.

    (b) Calcule a inversa T^{-1} do operador T

22. Seja $T : M(2,2) \to M(2,2)$ um operador linear tal que $T(A) = A + A^T$. Verifique se o operador T é inversível.

SUGESTÕES
15) Utilize as matrizes mudança de base
16) Sugestão: Mostre que T não é injetora.

4.5 Autovalores e Autovetores

Dado um operador linear $T : V \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$. Neste caso $T(v)$ será um vetor de mesma direção que v. Por vetor de mesma direção estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte. Como $v = \overrightarrow{0}$ satisfaz a equação para todo λ, estaremos interessados em determinar vetores $v \neq \overrightarrow{0}$ satisfazendo a condição acima.

Definição 185 *Seja $T : V \to V$, um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq \overrightarrow{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v é um autovetor de T associado a λ.*

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 186 *$T : V \to V$ dado por $T(v) = kv$, onde k é uma constante*

Neste caso todo vetor de V é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = k$

Exemplo 187

$$T: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{(Reflexão no eixo x)}$$
$$T(x,y) = (x,-y)$$

Neste caso observamos que os vetores que serão levados em múltiplos dele mesmo serão os vetores que estão no eixo x, pois $v = (x,0) \Rightarrow T(v) = T(x,0) = (x,0) = v$. Os vetores que estão no eixo y também são levados em múltiplos

de si mesmo pois estes vetores tem a forma $w = (0, y) \Rightarrow T(w) = T(0, y) = (0, -y) = -1(0, y)$. *Podemos concluir então que os vetores do tipo* $v = (x, 0)$ *são autovetores associados ao autovalor* $\lambda_1 = 1$ *e os vetores da forma* $w = (0, y)$ *são autovetores associados a* $\lambda_2 = -1$, *da tranformação linear reflexão no eixo* x.

Exemplo 188

$$R_{\frac{\pi}{2}} : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{(Rotação de um ângulo } \tfrac{\pi}{2}\textit{)}$$
$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, x)$$

Observe que na rotação de $\frac{\pi}{2}$ nenhum vetor é levado em um múltiplo de si mesmo, a direção de todos vetores de $\mathbb{R}^2$ são alterados pela rotação. Portanto a rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ não possui autovetores e autovalores.

Teorema 189 *Dada uma transformação linear* $T : V \to V$ *e um autovetor* v *associado a um autovalor* λ, *qualquer vetor* $w = \alpha v$ $(\alpha \neq 0)$ *também é um autovetor de* T *associado a* λ.

Observação 190 *Note que se um vetor* v *é autovetor de uma transformação* T *associado ao autovalor* λ *então todos os múltiplos de* v *também serão autovetores associados a* λ. *O Conjunto formado por todos os autovetores associados a um mesmo autovalor é um conjunto infinito.*

Teorema 191 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um operador auto-adjunto e* λ_1, λ_2 *autovalores distintos de* T *e* v_1 *e* v_2 *os autovetores associados a* λ_1 *e* λ_2, *respectivamente. Então* v_1 *é perpendicular a* v_2.

Definição 192 *O subespaço* $V_\lambda = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$ *é chamado o subespaço associado ao autovalor* λ.

Como vimos na nota acima o conjunto V_λ contém todos os autovetores de T associados ao autovalor λ, contém também o vetor nulo $\overrightarrow{0}$ de V já que o vetor $\overrightarrow{0}$ satifaz a relação $T(\overrightarrow{0}) = \lambda \overrightarrow{0}$. O conjunto V_λ pode ser escrito como V_λ $= \{\text{Todos os autovetores de } T \text{ associados a } \lambda\} \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

4.5.1 Autovalores e autovetores de uma matriz

Agora vamos obter uma forma de calcular os autovalores e autovetores de uma transformação usando sua matriz em relação as bases canônicas. Inicialmente definiremos autovalores e autovetores de uma matriz A.

Dada uma matriz quadrada, A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A o autovalor e autovetor da transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq \overrightarrow{0}$.

4.5.2 Polinômio Característico.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar os autovalores e autovetores de A, devemos resolver a equação:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av &= \lambda I v \\ Av - \lambda I v &= \overrightarrow{0} \\ (A - \lambda I)v &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Escrevendo esta equação explicitamente,temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} - \lambda \end{bmatrix}$$

temos o sistema

$$B \cdot v = \overrightarrow{0}$$

Este sistema é um sistema homogêneo e possui ao menos a solução $v = \overrightarrow{0}$. Mas como estamos procurando autovetores, queremos encontrar vetores $v \neq \overrightarrow{0}$ que satisfaçam a equação $B \cdot v = \overrightarrow{0}$. Sendo assim queremos que o sistema $B \cdot v = \overrightarrow{0}$ seja compatível e indeterminado (tenha além da solução trivial, outras soluções não triviais). Pela regra de Cramer se $\det B = 0$ então o sistema homogêneo terá infinitas soluções. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação $B \cdot v = \overrightarrow{0}$) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ..... & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n.

Definição 193 *O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado polinômio característico da matriz A*

Observe que as raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A. Note também que o autovalor pode ser o número zero (quando o polinômio característico tem raízes zero), embora o autovetor v associado a λ não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 194 *Vamos agora calcular os autovetores e autovalores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2$

$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Necessitamos calcular os autovetores de A e para isso basta resolvermos o sistema:

$$Av = \lambda v$$

onde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e λ é cada um dos autovalores já encontrados.

Para $\lambda_1 = 1$ temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3-1 & 4 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} escalonando \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-4x + 4y = 0 \Rightarrow y = x$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $v = (x, x) = x(1, 1)$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $V_1 = [(1, 1)]$.

Para $\lambda_1 = -2$ temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 4 \\ -1 & 2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

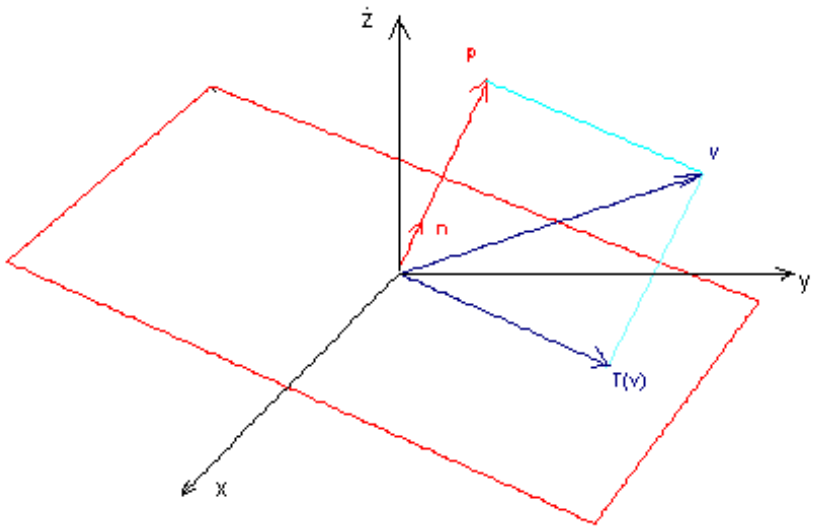
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \textit{escalonando} \\ \Rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$ são da forma $v = (x, \frac{x}{4}) = x(1, \frac{1}{4})$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$ é $V_{-2} = \left[(1, \frac{1}{4})\right]$.

Exemplo 195 *Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x+y-z = 0$.*

Solução: Devemos encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) =$ projeção de v no plano $x + y - z = 0$.



Da figura acima vemos que para obtermos a projeção sobre o plano devemos inicialmente fazer a projeção do vetor v na direção do vetor normal n para obter o vetor $p = proj_n v$.Com isso temos,

$$\begin{aligned} T(v) + p &= v \\ T(v) &= v - p \\ T(v) &= v - proj_n v \end{aligned}$$

Um vetor normal do plano $x+y-z=0$ é $n=(1,1,-1)$, logo, como $v=(x,y,z)$ temos

$$\begin{aligned} p &= proj_n v \\ p &= \left(\frac{v\cdot n}{n\cdot n}\right) n \\ p &= \left(\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,-1)}{(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)}\right)(1,1,-1) \\ p &= \left(\frac{x+y-z}{3}\right)(1,1,-1) \\ p &= \left(\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, -\frac{x+y-z}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(v) &= v - p \\ T(x,y,z) &= (x,y,z) - \left(\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, -\frac{x+y-z}{3}\right) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{2x-y+z}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{x+y+2z}{3}\right) \end{aligned}$$

Para calcular os autovalores de T devemos encontrar a matriz de T. Neste caso,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

As raizes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$.

Para $\lambda_1 = 0$ vamos calcular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja matriz ampliada é,

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & 0 \end{bmatrix} \overset{escalonando}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= -z \\ x &= -z \end{aligned}$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são da forma $v = (-z, -z, z)$

Observação 196 *Note que acima damos a forma geral dos autovetores, no caso acima temos $v = x(-1,-1,1)$ assim um autovetor é $v = (-1,-1,1)$ como todo autovetor é um múltiplo de $v = (-1,-1,1)$ temos que $V_0 = [(-1,-1,)]$, isto é, o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é gerado pelo vetor $v = (-1,-1,1)$. Note que geometricamente o subespaço $V_0 = [(-1,-1,1)]$ é formado pelos vetores que são múltiplos do vetor normal ao plano, ou seja, por todos os vetores ortogonais ao plano.*

Para $\lambda_1 = 1$ temos vamos calular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \overset{escalonando}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 - x - y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= x \end{aligned}$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_3 = 1$ são da forma $v = (x, 0, x) = x(1, 0, 1)$. Logo $V_1 = [(1, 0, 1)]$. Note que geometricamente os autovetores da forma $v = x(1, 0, 1)$ são aqueles vetores que estão sobre o plano (pois para $v = (1, 0, 1)$ temos $v \cdot n = (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1) = 0$).

Exemplo 197 *Encontre todos os autovalores e autovetores do operador linear* $T : P_2 \to P_2$ *definido por* $T(a + bx + cx^2) = -2c + (a + 2b + c)x + (a + 3c)x^2$.

Solução: A matriz que representa o operador T é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar os autovetores resolver $([T] - \lambda I)v = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obtermos uma solução não nula para este sistema devemos impor:

$$\det([T] - \lambda I) = -\lambda(2 - \lambda)(3 - \lambda) + 2(2 - \lambda) = 0$$

Obtemos então os autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Vamos agora encontrar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{Escalonando}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{p} = (-2c, c, c)$$

Portanto, $\overrightarrow{p} = -2c + cx + cx^2$ é autovetor associado a $\lambda_1 = 1$
Para $\lambda_1 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} Escalonando \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{p} = (c, b, c)$$

Portanto $\overrightarrow{p} = c + bx + cx^2$ é autovetor associado a $\lambda_1 = 2$.

4.6 Décima primeira lista de exercícios

1. Construa uma matriz $2x2$ **não diagonal** com autovalores 1 e -1 .

2. Se k é um número inteiro, λ um autovalor da matriz A e v um autovetor de A associado ao autovetor λ. Mostre que λ^k é um autovalor da matriz A^k associado ao autovetor v.

3. Encontre os autovalores de A^9 se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
   (d) $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
   (e) $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ tal que $A \to A^T$

5. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

6. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Que vetores **não nulos** do plano, quando cisalhados por $C(x, y) = (y - 3x, y)$ e em seguida girados de 45^o (no sentido anti-horário) ficam **ampliados / reduzidos** (na mesma direção) ? Em **quantas** vezes ?

8. Seja $T : V \to V$ linear

(a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.

(b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

(c) Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D : P_2 \to P_2$, $D(p) = p'$.

9. Determine os autovalores e autovetores, se existirem, do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtido quando se faz uma rotação de π *rad* em torno do eixo x, seguida de uma contração de $\frac{1}{2}$.

10. Seja $T : V \to V$ o operador linear que tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \cdots, \lambda_n = n$ associados aos autovetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ respectivamente. Sabendo que $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$, determinar $[T(v)]_\beta$.

11. Seja A uma matriz quadrada e A^T sua transposta. As matrizes A e A^T possuem os mesmos autovalores e autovetores? Justifique sua resposta.

12. Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

13. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se B é semelhante a A, então as duas matrizes tem o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.

14. Seja $T : \Re^2 \to \Re^2$ um operador linear que dobra o comprimento do vetor $(1, -3)$ e triplica e muda o sentido do vetor $(3, -1)$.

(a) Determine $T(x, y)$

(b) Calcule $T(0, 2)$

(c) Qual a matriz do operador T na base $\{(2, 1), (1, 2)\}$

15. Seja $T : M(2,2) \to M(2,2)$ com autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0$, respectivamente. Determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

16. Dada a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$ que é a projeção sobre a reta $y = \frac{x}{2}$. Encontre os autovalores e autovetores da transformação T.

17. Considere $P_1 =$ conjunto dos polinômios de grau ≤ 1.

Seja o operador linear $D : P_1 \to P_1$ dado por $D(p) = x.p' + p'$ .Determine os autovalores e autovetores de D.

18. Sejam $A, B \in M(n,n)$ matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus autovalores? Qual?

19. Mostre que o conjunto de todos os autovetores de um operador linear $T : V \to V$ associados a um autovalor λ é um **subespaço vetorial** de V.

20. Se $B = R^{-1}AR$ e $\overrightarrow{v}$ é um autovetor de B associado a um autovalor λ então $R\overrightarrow{v}$ é autovetor de A associado a λ.

21. Discuta a veracidade da afirmação: Se λ **não** é um autovalor de A, então o sistema linear $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

ALGUMAS RESPOSTAS

10) Para calcular os autovalores de A, basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.Para calcular os autovalores de A^T, basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A^T - \lambda I)$. Portanto basta verificar que $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.

Capítulo 5

APLICAÇÕES

5.1 Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia Cartográfica

Esse trabalho tem como um de seus objetivos, dar uma noção da utilidade prática dos assuntos vistos no ciclo básico, além de permiti-los conhecer um pouco o trabalho em uma das engenharias estudadas no Instituto, visando assim a multidisciplinalidade no curso de Engenharia. Trata-se do estudo da aplicação de uma disciplina do curso básico, a Álgebra Linear, no ciclo profissional; no caso, na Engenharia Cartográfica, onde ajustes e organização de dados, obtidos seha por satélites (GPS), seja por fotografias ou por qualquer outro meio, se fazem constantes no trabalho de um engenheiro cartógrafo.

O engenheiro cartógrafo dispõe de um método, o método dos mínimos quadrados, para obter informações relativas a parâmetros de correção e ajuste de dados obtidos em observações e pesquisas. Para este método os dados obtidos são organizados matricialmente, de forma que possam ser relacionados com valores pré-estabelecidos, tais como temperatura, latitude, longitude, altitude, entre outros. Obtem-se, desta forma, um sistema de n equações lineares, onde esse n pode assumir valores realmente grandes, resultando um sistema com milhares de equações. Sendo a resolução de sistemas de equações lineares um dos campos de estudo da Álgebra Linear.

Na Geodésia, por exemplo, as coordenadas de um ponto podem ser obtidas na resolução de um sistema obtido pela sujeição de dados obtidos de observações angulares (tais como azimutes, ângulos e/ou direções) a um determinado modelo geométrico.

As coordenadas também podem ser obtidas a partir da observação da diferença de fase da portadora L1 e/ou L2, freqüências de operações do satélite de GPS.

A Álgebra Linear também tem aplicações na Fotogrametria, para a transformação de coordenadas (espaço imagem para espaço objeto, que seriam as

coordenadas de terreno, obtidas através de um sistema deduzido através de observações nas fotografias e no terreno). Na digitalização de documentos, por exemplo, um mapa em papel, após ser processado, dá origem a um mapa digital armazenado na forma vetorial (lista de coordenadas).

Também na área de Sensoreamento Remoto, seja para o processamento digital de imagens, ou na modificação ou no controle de imagens (brilho constante e georeferenciamento) ou ainda no armazenamento da imagem na forma matricial; utilzam-se tópicos abordados pela Álgebra Linear, como sistemas de equações lineares e operações com matrizes.

5.2 Aplicações de espaços vetoriais na computação gráfica

Autor: Luiz Antônio Pereira

Trabalho publicado na revista MICRO SISTEMAS de Novembro de 1982

Introdução: Uma das aplicações interessantes em computadores e com vasta possibilidade de emprego nas áreas de engenharia civil, arquitetura, desenho industrial, mecânica, etc é a representação gráfica, no plano, de elementos tridimensionais.

Dentre todos os tipos de perspectivas a que apresenta resultados gráfico mais interessantess é a perspectiva cônica, posto que que é a que simula com maior perfeição a visão real do objeto. apresentaremos, a seguir, o desenvolvimento da teoria matemática e veremos que a ferramenta pricipal é a teoria das tranformações lineares.

Caracterizando o Objeto: Inicialmente deve-se informar ao computador as características geométricas do objeto. isto é possível referenciado-se o elemento a um sistema cartesiano de coordenadas, determinando-se dai as coordenadas x, y e z dos pontos que o formam. Deve-se estabelecer também as ligações entre esses pontos com o uso de segmentos de retas. Com isso, obtém-se um poliedro cujos vértices são os pontos e cujas arestas são os segmentos de retas. O efeito de curvatura pode ser obtido aumentando-se o número de vértices e arestas (refinamento). Dessa forma todos os vértices P_i, terão coordenadas x_i, y_i e z_i, e as arestas a_{kj} ligarão dois vértices genéricos P_k e P_j.

De um modo geral, desenhar uma perspectiva consiste em ligar, através de segmentos de retas pontos do plano cujas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são "transformações"das coordenadas x, y e z dos pontos do espaço. Mais explicitamente falando para cada ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ no espaço determina-se um ponto $\overline{P}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ no plano tal que suas coordenadas $\overline{x}_i$ e $\overline{y}_i$ são funções de x_i, y_i e z_i e de um conjunto de parâmetros, que chamaremos de de parâmetros de localização do observador e do plano projetante e que indicaremos por U. Matematicamente

$$(\overline{x}_i, \overline{y}_i) = f(x_i, y_i, z_i, U)$$

Como se sabe, a perspectiva cônica utiliza - além das noções de objeto, plano projetante e linha de visada - um ponto origem ou observador, de ondem

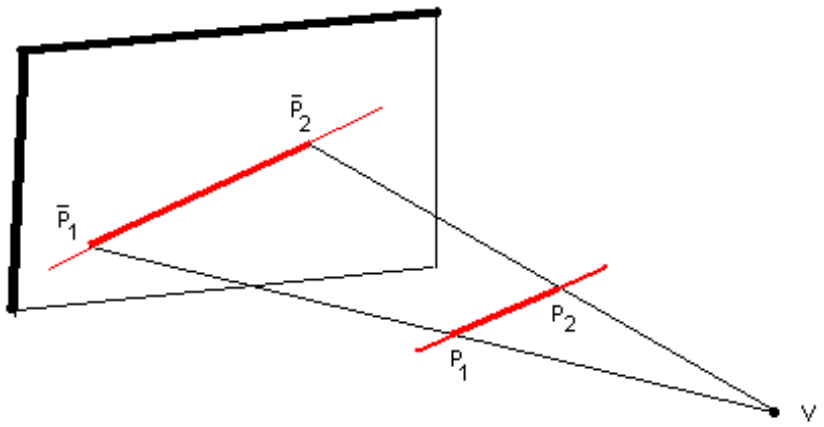


Figura 5.1: Figura 1

partem as linhas de visada e que se localiza à uma distância finita do objeto e do plano projetante. A projeção $\overline{P}$ do ponto P no plano α é a interseção da reta definida pelo observador V e pelo ponto P (visada) com o plano projetante α. A projeção de uma reta é obtida unindo-se as projeções de dois de seus pontos (Fig 1) e, de uma maneira geral, a projeção de um objeto é determinada pelas projeções de todos os seus pontos.

No noso caso, o plano projetante é a tela do computador. Para chegarmos às expressões que fornecem $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de cada ponto vamos estabelecer as seguintes convenções:

1. O observador V tem coordenadas (x_v, y_v, z_v)
2. Os n vértices do objeto e suas projeções são representadas por P_1 a P_n e $\overline{P}_1$ a $\overline{P}_n$, respectivamente.
3. A tela representa a área formada por um retângulo de lados L_1 e L_2 unidades de comprimento. O plano desse retângulo é perpendicular à linha que une o observador à origem do sistema x, y, z de coordenadas.
4. A distância R do plano projetante à origem do sistema de eixos è considerada positiva se o plano se encontra do mesmo lado do observador em relaçã à origem, e negativa se a origem estiver entre o plano e o o observador.
5. O lado L_1 (maior lado) do retângulo é paralelo ao plano $z = 0$.
6. O sistema $\overline{xyz}$ de coordenadas, bem comom os outros parâmetros se apresentam como mostra a Fig 2.

Fazendo $A = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$, e se $A \neq 0$ podemos obter a equação do plano projetante (segundo as convenções adotadas) da seguinte forma: Da fórmula da

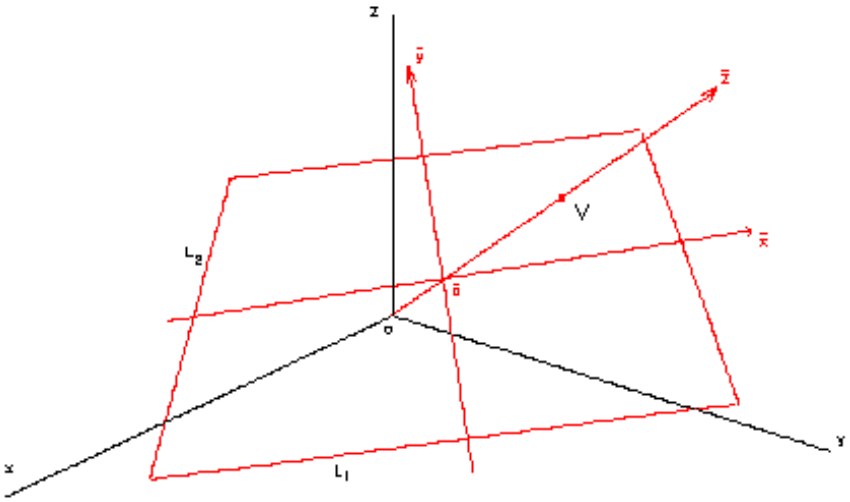


Figura 5.2: Figura 2

distância de ponto a plano temos

$$d(\pi, P_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2c^2}}$$

onde $P(x_0, y_0, z_0)$ é o ponto e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é o vetor normal ao plano.

No nosso caso temos que $P_0(0, 0, 0)$ e $\overrightarrow{n} = (x_v, y_v, z_v)$. Chamando $R = d(P_0, \alpha)$ (α é o plano projetante) temos que R pode ser positivo ou negativo e por isso dispensamos o módulo na fómula da distância, logo, tomando $-R$ escrevemos,

$$-R = \frac{x_v 0 + y_v 0 + z_v 0 + d}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

$$d = -R\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} = -RA$$

Portanto a equação do plano projetante α é:

$$x_v x + y_v y + z_v z - RA = 0 \tag{5.1}$$

Para cada ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ a equação paramétrica da reta que o liga ao ponto $V(x_v, y_v, z_v)$ é

$$\begin{aligned} x &= t(x_i - x_v) + x_v \\ y &= t(y_i - y_v) + y_v \\ z &= t(z_i - z_v) + z_v \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para determinarmos a interseção entre a reta e o plano projetante colocamos os valores de (5.2) na equação (5.1) do plano, ou seja:

$$x_v\left[t(x_i - x_v) + x_v\right] + y_v\left[t(y_i - y_v) + y_v\right] + z_v\left[t(z_i - z_v) + z_v\right] - RA = 0 \quad (5.3)$$

$$tx_v(x_i - x_v) + x_v x_v + ty_v(y_i - y_v) + y_v y_v + tz_v(z_i - z_v) + z_v z_v - RA = 0$$

$$t\left[x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)\right] + A^2 - RA = 0$$

$$t\left[x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)\right] = RA - A^2$$

e dai tiramos o valor do parâmetro t :

$$t = \frac{RA - A^2}{x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)} \quad (5.4)$$

Com $t, x_i, y_i, z_i, x_v, y_v$ e z_v conhecidos, e usando novamente as equações (5.2) determinamos as coordenadas x, y e z da projeção do ponto P no plano projetante. Nessa fase estamos exatamente como a Fig 3.

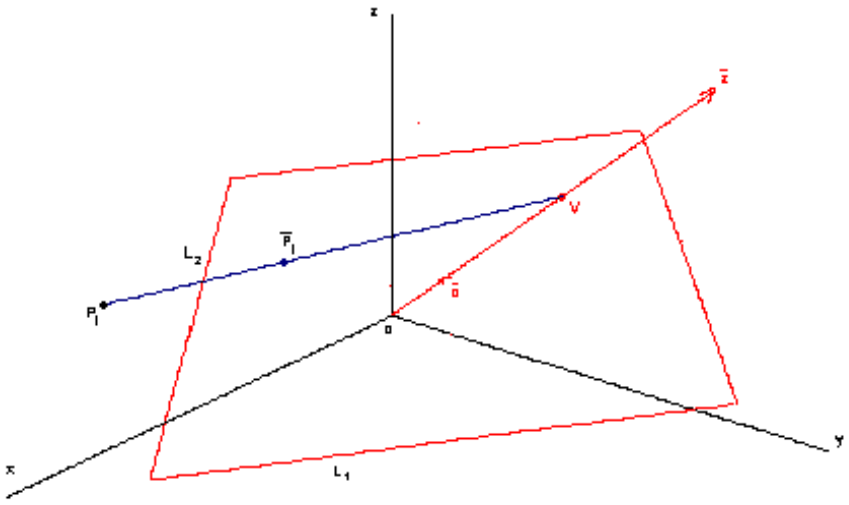


Figura 3

De (5.4) e (5.2) com $x_i = y_i = z_i = 0$, vem

$$\begin{aligned} x_{\overline{0}} &= \frac{x_v R}{A} \\ y_{\overline{0}} &= \frac{y_v R}{A} \\ z_{\overline{0}} &= \frac{z_v R}{A} \end{aligned} \tag{5.5}$$

que são as coordenadas da origem do sistema $\overline{xyz}$ (fig 5.2). Esse sistema nos é particularmente interessante pois o plano $\overline{xy}$ é o próprio plano projetante.

O que nos resta a fazer é, portanto, uma transformação de coordenandas, ou seja, determinar as coordenandas dos pontos projeções em relação ao novo sistema $\overline{xyz}$. Para isso, devemos determinar as componentes dos vetores unitários $\overrightarrow{\bar{i}}$, $\overrightarrow{\bar{j}}$ e $\overrightarrow{\bar{k}}$ no sistema xyz.

A interseção do plano projetante com o plano xy é uma reta cuja equação é encontrada fazendo-se $z = 0$ em (5.1). Isso nos leva a:

$$y = \frac{RA - x_v x}{y_v} \tag{5.6}$$

cujo gráfico está na Fig 4. O vetor diretor dessa reta tem componentes dadas por:

$$\overrightarrow{w} = (0, \frac{RA}{y_v,}, 0) - (\frac{RA}{x_v}, 0, 0) = (-\frac{RA}{x_v}, \frac{RA}{y_v,}, 0) \tag{5.7}$$

o vetor $\overrightarrow{\bar{i}}$ é um vetor unitário e portanto

$$\overrightarrow{\bar{i}} = \frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\bar{i}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RA}{x_v}\right)^2 + \left(\frac{RA}{y_v,}\right)^2}}(-\frac{RA}{x_v}, \frac{RA}{y_v,}, 0) \\ \overrightarrow{\bar{i}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_v^2} + \frac{1}{y_v^2}}}(-\frac{1}{x_v}, \frac{1}{y_v,}, 0) \\ \overrightarrow{\bar{i}} &= \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}}(-y_v, x_v, 0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

O vetor unitário $\overrightarrow{\bar{k}}$ tem sua determinação imediata pois é o versor do vetor $\overrightarrow{0\overline{0}}$

(ver Fig 2 e equação 5.5)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{k}} &= \frac{\overrightarrow{0\overline{0}}}{\left|\overrightarrow{0\overline{0}}\right|} = \frac{1}{\left|\left(\frac{x_vR}{A}, \frac{y_vR}{A}, \frac{z_vR}{A}\right)\right|}\left(\frac{x_vR}{A}, \frac{y_vR}{A}, \frac{z_vR}{A}\right) \\
\overrightarrow{\overrightarrow{k}} &= \frac{1}{\sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}}\left(x_v, y_v, z_v\right) \\
\overrightarrow{\overrightarrow{k}} &= \frac{1}{A}\left(x_v, y_v, z_v\right) \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Observe que o vetor $\overrightarrow{\overrightarrow{k}}$ é exatamente o versor do vetor $\overrightarrow{V} = (x_v, y_v, z_v)$.

Como nosso sistema é ortogonal, o vetor unitário $\overrightarrow{\overrightarrow{j}}$ é dado por $\overrightarrow{\overrightarrow{j}} = \overrightarrow{\overrightarrow{k}} \times \overrightarrow{\overrightarrow{i}}$, ou seja

$$\overrightarrow{\overrightarrow{j}} = \det\begin{bmatrix} \frac{x_v}{A} & \frac{y_v}{A} & \frac{z_v}{A} \\ \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & 0 \\ \overrightarrow{\overrightarrow{i}} & \overrightarrow{\overrightarrow{j}} & \overrightarrow{\overrightarrow{k}} \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{j}} = \frac{1}{A\sqrt{x_v^2+y_v^2}}\left(-z_vx_v, -z_vy_v, x_v^2+y_v^2\right) \qquad (5.11)$$

O sistema definido por es vetores unitários não é propriamente o nosso sitema $\overline{xyz}$ e sim ele a menos de uma translação (Fig 5). Essa translação deverá apenas anular o vlaor da componente em o que não importa para nós já que estamos interessados nas componentes $\overline{x}$ e $\overline{y}$ apenas.

O que temos que fazer agora é determinar a matriz mudança de base da base $\alpha = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ para a base $\beta = \left\{\overrightarrow{\overrightarrow{i}}, \overrightarrow{\overrightarrow{j}}, \overrightarrow{\overrightarrow{k}}\right\}$, ou seja, $[I]_\beta^\alpha$ Esta matriz nos permitira

$$\alpha = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\beta = \left\{\overrightarrow{\overrightarrow{i}}, \overrightarrow{\overrightarrow{j}}, \overrightarrow{\overrightarrow{k}}\right\}$$

$$\beta = \left\{\frac{1}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}}\left(-y_v, x_v, 0\right), \frac{1}{A\sqrt{x_v^2+y_v^2}}\left(-z_vx_v, -z_vy_v, x_v^2+y_v^2\right), \frac{1}{A}\left(x_v, y_v, z_v\right)\right\}$$

Portanto

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & 0 \\ \frac{-z_vx_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{-z_vy_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{x_v^2+y_v^2}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} \\ \frac{x_v}{A} & \frac{x_v}{A} & \frac{z_v}{A} \end{bmatrix}$$

e as coordenadas do novo sistema são

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & 0 \\ \frac{-z_v x_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{-z_v y_v}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} & \frac{x_v^2+y_v^2}{\sqrt{x_v^2+y_v^2}} \\ \frac{x_v}{A} & \frac{x_v}{A} & \frac{z_v}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observação 198 *Algumas mudanças de notações foram efetuadas em relação ao trabalho original. Também foram inseridos alguns conceitos matemáticos que o artigo original não fornece mas que para nossa disciplina mostra bem a utilização dos conceitos vistos e sua aplicação prática. No trabalho original também é fornecido um programa para a HP-45 onde é aplicada toda a teoria vista acima, mas não é dificil fazer um código de modo a gerar figuras em 3d utilizando a teoria vista acima*

5.3 Aplicações de autovalores e autovetores na engenharia civil

5.3.1 O Problema de autovalor na avaliação de modelos estruturais de edificações

Trabalho apresenta no COBENGE 2003 por
José Guilherme Santos da Silva - jgss@uerj.br
Pedro Colmar G. da S. Vellasco - vellasco@uerj.br
Rita de Kassia D. Lopes - rita.lopes021@ig.com.br
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia, FEN
Rua São Francisco Xavier, N0 524, Maracanã
CEP: 20550-900, Rio de Janeiro, RJ

Resumo: O presente trabalho apresenta uma contribuição inicial acerca de dois aspectos: o primeiro diz respeito ao ensino de engenharia, com a aplicação de conceitos referentes ao problema clássico de autovalores e autovetores na avaliação de sistemas estruturais. O segundo ponto relevante a ser discutido, diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas, referentes a estruturas de aço. Na prática corrente de projeto, grande parte dessas ligações é representada por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maioria dos casos reais, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou seja: semi-rígido. Assim sendo, este trabalho tem por objetivo empregar conceitos básicos de álgebra linear, a partir do problema clássico de autovalores e autovetores, de forma a se analisar modelos estruturais de pórticos de aço correspondentes a uma edificação residencial existente. São investigadas as diferenças, qualitativas e quantitativas, existentes entre as freqüências naturais e os modos de vibração

dentre os diversos modelos estruturais (flexível, semi-rígido e rígido). Resultados já obtidos indicam que a variação na rigidez inicial das ligações provoca mudanças sensíveis no comportamento dinâmico da estrutura.

Palavras-chave: Ensino de engenharia, Estruturas de aço, Método dos Elementos Finitos,
Autovalores, Autovetores.

1. INTRODUÇÃO

Sabe-se que o déficit habitacional brasileiro cresce a cada ano, concentrando-se o problema, principalmente, nas famílias de baixo poder aquisitivo, de forma que existe uma demanda crescente por estudos sobre as habitações populares. Neste sentido, o aço, como material estrutural é adequado para a construção industrializada e pode proporcionar à construção civil, perspectivas mais otimistas para a habitação popular no país.

Uma das etapas relevantes no projeto de estruturas de aço está relacionada a uma avaliação coerente acerca dos modelos estruturais que representam o comportamento real das ligações existentes entre as vigas e as colunas de aço. Na prática corrente de projeto, a grande maioria dessas ligações é representada por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maior parte dos casos, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou semi-rígido, o qual pode ser perfeitamente caracterizado com base em determinadas grandezas associadas ao projeto de uma ligação, tais como: resistência à flexão e capacidade de rotação. No que tange ao estudo do comportamento dinâmico de estruturas, assunto que será abordado com mais detalhe no presente trabalho, mais especificamente no que diz respeito à aplicação do problema clássico de autovalores para determinação e avaliação das freqüências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) de edificações residenciais, observase, com clareza, uma absoluta falta de conhecimento por parte dos alunos de graduação acerca da importância do tema e, infelizmente, uma completa indiferença em relação ao assunto.

Assim sendo, de forma a contribuir no que tange ao ensino de engenharia, como também desmistificar o emprego corrente dos conceitos teóricos, principalmente aqueles relacionados ao problema de autovalores, faz-se uma exposição resumida do referido problema, como tratado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos.

Em seguida, é selecionado o projeto de uma edificação residencial de quatro pavimentos, composto por vigas e colunas de aço e lajes lisas de concreto armado, em todos os níveis da edificação. Tem-se como objetivo proceder a uma análise extensa das freqüências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) dos modelos referentes aos pórticos de aço da referida edificação. Um outro ponto relevante do trabalho diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas dos pórticos de aço.

Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação prática do problema clássico de autovalores e autovetores, no caso em questão com respeito ao projeto de edificações residenciais, além de reforçar a importância dos conceitos básicos da disciplina de Álgebra Linear para a solução

deste tipo de problema.

2. O CICLO BÁSICO NA ENGENHARIA E O PROBLEMA DE AUTOVALOR

O problema clássico de autovalores e autovetores, principalmente no que tange a utilização de operações matriciais, está diretamente relacionado com o ensino da disciplina Álgebra Linear, oferecida correntemente aos alunos de graduação no ciclo básico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

O ensino da disciplina Álgebra Linear não oferece nenhuma interação com o ciclo profissional da engenharia e nenhum tipo de recomendação no que diz respeito a sua extrema relevância na aplicação prática desses conceitos sobre os problemas reais de engenharia. Tal fato não só desestimula o aluno de graduação em engenharia, como também ocasiona um aprendizado de baixa qualidade, propagando deficiências técnicas que serão sentidas, sem sombra de dúvida, no decorrer do curso.

Ainda hoje, a didática de ensino adotada nas disciplinas do ciclo básico sobre o problema clássico de autovalores e autovetores é baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos. Tal metodologia é apresentada a seguir, respaldada por uma breve revisão sobre as definições de autovalor e autovetor, como visto tradicionalmente na disciplina de Álgebra Linear, LIPSCHUTZ (1977), NETTO e ADÃO (1995).

Senão vejamos: Seja T uma transformação linear em um espaço vetorial real V aplicada a um corpo $\Bbbk$. Denomina-se autovalor o escalar real pertencente a $\Bbbk$ ($\lambda \in \Bbbk$) se, para esta transformação linear T, existe um vetor não-nulo pertencente a V ($\nu \in V$) para o qual:

$$T(v) = \lambda\nu \tag{5.12}$$

Todo vetor não-nulo ν que satisfaça a "equação 5.12" é chamado autovetor de T correspondente ao autovalor ■. Portanto, sendo A uma matriz quadrada de ordem nxnsobre um corpo $\Bbbk$, existe um autovalor λ se, para uma matriz coluna $v_{n\times 1}$, denominada autovetor, $A\nu = \lambda\nu$ é verdadeiro.

Obs: Nos cursos de engenharia geralmente utilizamos como corpo $\Bbbk$ o corpo dos números reais, ou seja, no nosso caso $\Bbbk = \mathbb{R}$Para a obtenção dos autovalores, reescreve-se a "equação 5.12" de modo que $(\lambda I - A)\nu = 0$, que admitirá $v \neq 0$ como solução se, e somente se, $det(A - \lambda I) = 0$. A expressão $det(A - \lambda I) = 0$ é denominada equação característica, onde I é a matriz identidade.

A contribuição mais relevante deste trabalho de pesquisa é caracterizar que o ensino do problema de autovalor como feito no ciclo básico da engenharia, de acordo com o exposto acima, é absolutamente contrário ao que se deveria informar a um futuro engenheiro. Não há relação alguma entre os termos específicos (tais como, espaço vetorial, corpo, etc.), utilizados no ensino da disciplina de Álgebra Linear e as grandezas empregadas correntemente na engenharia. Ressalta-se que esses elementos têm o mesmo significado das grandezas conhecidas usualmente pelo engenheiro. Além disso, em nenhum momento existe um indicativo de onde e como o aluno de graduação, deve utilizar esses conceitos, extremamente relevantes para a vida prática de um profissional da área, SILVA

(2001).

Uma sugestão para uma abordagem mais apropriada ao ensino do problema de autovalor para os alunos de graduação em engenharia seria, inicialmente, associar o termo autovalor às freqüências naturais e o termo autovetor aos modos de vibração de um elemento ou sistema estrutural qualquer, dando ênfase ao significado físico dessas grandezas, ROEHL (1981).

Senão vejamos: para um sistema estrutural qualquer sob vibração livre não amortecida, com vários graus de liberdade, pode ser escrita uma equação matricial de movimento tal que,

$$M\ddot{V} + KV = 0 \tag{5.13}$$

onde, M é a matriz de massa, K é a matriz de rigidez, $\ddot{V}$ é o vetor das acelerações e V é o vetor dos deslocamentos.

As equações que tornam possível a resolução do problema de autovalor, cujo sistema vibra livremente e sem amortecimento, são as seguintes:

$$\left(M^{-1}K - \varpi_{0i}^2 I\right)\phi_i = 0 \tag{5.14}$$

onde ϕ_i é o i-ésimo modo de vibração, com i variando de 1 *a* n. A "equação 5.14" é verdadeira, para qualquer ϕ_i, se

$$\det\left(M^{-1}K - \varpi_{0i}^2 I\right) = 0 \tag{5.15}$$

onde I representa a matriz identidade.

A "equação 5.15" é comumente designada como equação característica e suas raízes são os valores característicos, ou autovalores, e correspondem ao quadrado das freqüências naturais de um sistema estrutural, ϖ_{0i}^2. A cada uma dessas raízes corresponde um vetor característico, ϕ_i, ou autovetor, que representa o modo de vibração do referido sistema.

Deve-se ressaltar, novamente, que o problema clássico de autovalores é absolutamente essencial para a compreensão e análise de estruturas simples, tais como treliças, vigas, pórticos, placas, etc, como também de sistemas estruturais mais complexos, dentre os quais podem ser citados os seguintes: edificações residenciais, pontes rodoviárias e ferroviárias, torres de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, estádios de futebol, passarelas de pedestres, edifícios altos, plataformas off-shore, etc.

Observação 199 *Algumas correções e adaptações a nossa apostila foram necessárias porém não foi alterado o conteúdo. Transcrevemos aqui apenas parte do tgrabalho para ressaltar a aplicação de autovalore e autovetores. Créditos são dados ao autor e o trabalho original pode ser obtido através dos anais do COBENGE 2003 ou me enviando um email solicitando o artigo original que terei a maior satisfação de enviá-lo.*