APOSTILA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Chefe do Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE
Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page: www.joinville.udesc.br/dmat/rogerio

Professores Integrantes do Projeto de Álgebra II
Graciela Moro - Coordenadora
Fernando Deeke sasse
Ivanete Zucki
João de Azevedo
Jorge Mota
Marnei Luis mandler
Milton Procópio de Borba
Rogério de Aguiar

25 de fevereiro de 2008

Sumário

Capítulo 1

SUPERFÍCIES E CURVAS NO ESPAÇO

1.1 As Cônicas

O conhecimento das equações das cônicas no plano e de seus desenhos é fundamental para o entendimento das superfícies já que na maioria das vezes as seções das superfícies (principalmente das superfícies quádricas) serão curvas cônicas. As cônicas foram estudadas em Geometria Analítica I e sendo assim apresentaremos uma breve revisão enfocando os aspectos mais relevantes para que não haja dificuldades no estudo de superfícies.

Definição: Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação do segundo grau em x e y da forma geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Em nosso estudo vamos estudar as cônicas cujas equações são da forma reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

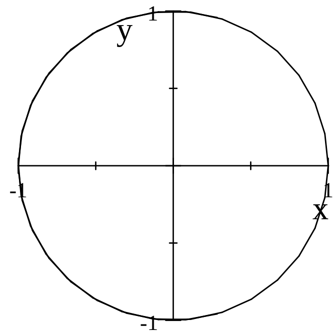
pois toda equação na forma geral pode ser escrita na forma reduzida mediante uma conveniente escolha de eixos coordenados. Vamos agora apresentar as cônicas cujo conhecimento é indispensável para o estudo das superfícies:

1.1.1 Circunferência

a) Circuferência: A equação de uma circunferência de raio r e centro no ponto $C(0,0)$ é dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Exemplo 1 *: Se* $r = 1$ *temos a circuferência de equação* $x^2 + y^2 = 1$



Exemplo 2 *: Faça um desenho da circunferência* $x^2 + y^2 = 15$

Neste caso $r^2 = 15$ e portanto $r = \sqrt{15}$, logo temos uma circunferência de raio $\sqrt{15} = 3.873$

Exemplo 3 *: Faça um desenho da circuferência* $x^2 + y^2 = 36$

b) A circunferência com centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e raio r tem a seguinte equação:

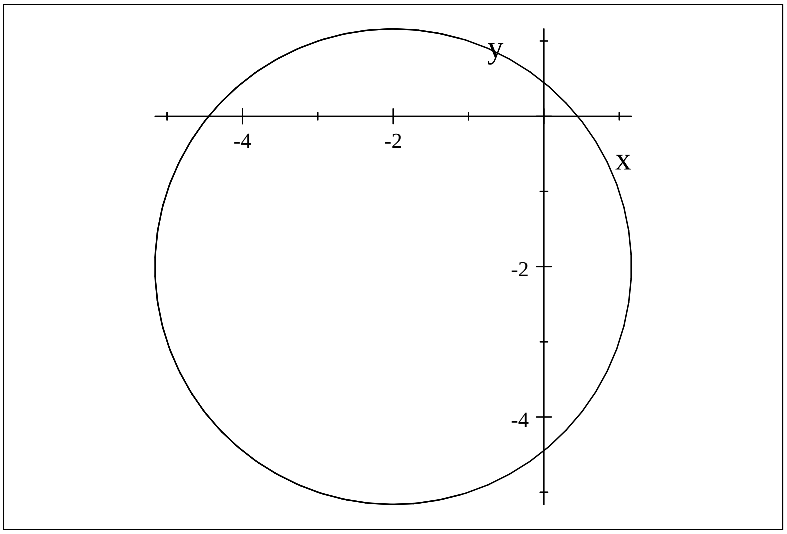
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Exemplo 4 *: Faça um desenho da circunferência* $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

É fácil ver que o centro da circunfência é $C(1, 2)$ e raio $r = 2$

Exemplo 5 *: Faça um desenho da circunferência* $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 10$

Observe que neste caso $x - x_0 = x + 2 = x - (-2)$ e portanto $x_0 = -2$, analogamente $y_0 = -2$. O centro da circunferência é $C(-2, -2)$ e o raio é $r = \sqrt{10} = 3.1623$



Exemplo 6 *: Faça um desenho da circunferência* $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

Neste caso não sabemos de imediato identificar a circunferência pois sua equação não está na forma padrão que nós conhecemos. Devemos então trabalhar com a equação de modo que possamos expressá-la na forma padrão. Isso pode ser feito usando o que chamamos de "completar os quadrados" do seguinte modo: Agrupando os termos em x e y temos

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$$

De modo a obter um quadrado perfeito em x devemos ter a expressão $x^2 - 6x + 9$, e como não podemos alterar a equação acima vamos somar e diminuir 9 na equação . Da mesma maneira para obter um quadrado perfeito em y devemos ter a expressão $y^2 + 4y + 4$ e para isso vamos somar e diminuir 4 na equação . Note que este é um procedimento correto pois na realidade estamos adionando *zero* a equação o que a mantém inalterada. Fazendo isso obteremos a mesma equação, apenas escrita de uma forma conveniente de modo a identificarmos a circunferência:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 &= 0 \\
x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 12 &= 0 \\
\left(x^2 - 6x + 9\right) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 12 &= 0 \\
(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 12 &= 0 \\
(x-3)^2 + (y+2)^2 - 1 &= 0 \\
(x-3)^2 + (y+2)^2 &= 1
\end{aligned}$$

Assim temos uma circunferência de raio $r = 1$ e centro em $C(3, -2)$. Complete este exemplo fazendo o desenho desta circunferência

1.1.2 Elipse

a) Elipse: A equação da elipse com centro na origem do sistema coordenado e semieixos a e b é da forma:

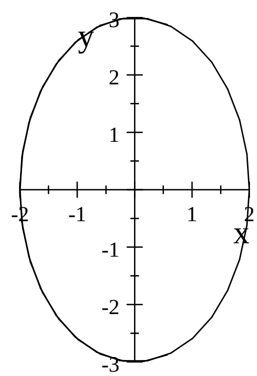
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que a circunferência é um caso particular da elipse quando $a = b = r$.

Exemplo 7 *: Faça um desenho da elipse*

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Observe que o semi-eixo menor ocorre no eixo x e tem comprimento 2, o semi-eixo maior ocorre no eixo y e tem comprimento 3.



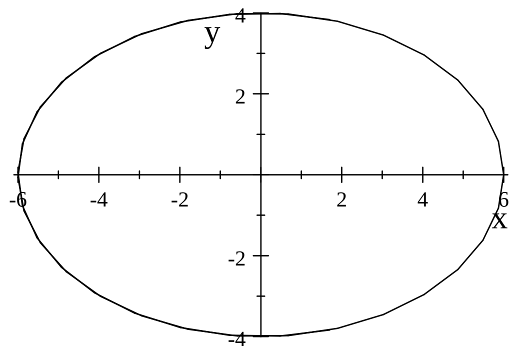
Exemplo 8 *: Faça um desenho da elípse*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$$

Para fazermos o desenho da elipse devemos colocar a equação na forma padrão:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Neste caso temos $a^2 = 36$ e $b^2 = 16$, portanto o semi-eixo maior é $a = 6$ e o semi-eixo menor é $b = 4$



b) A elipse com os eixos paralelos aos eixos coordenados e com centro no ponto $C(x_0, y_0)$ tem equação da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Para desenharmos esta elipse fazemos a mudança de variável

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

e temos a equação da elipse no novbo sistema de coordenadas

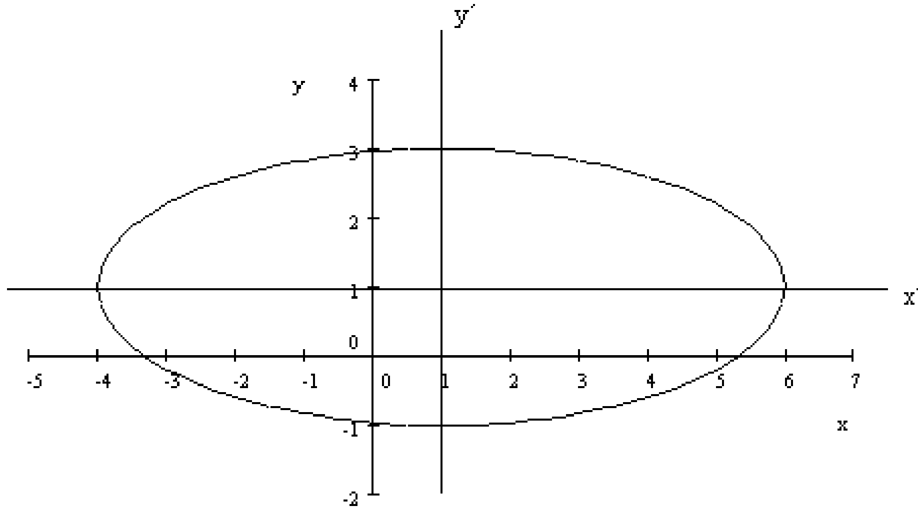
$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Neste novo sistema $x'y'$ o centro da elipse será no ponto $C'(0, 0)$ e os semi-eixos serão a e b, enquanto que no sistema xy o centro é $C(x_0, y_0)$.

Exemplo 9 *Faça um desenho da elipse*

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

Neste caso a elipse tem centro no ponto $C(1, 1)$ e semi-eixos $a = 5$ e $b = 2$



Exemplo 10 *: Faça um esboço da elipse*

$$\frac{(x+2)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{11} = 1$$

Exemplo 11 *: Faça um desenho da elipse* $25x^2 + 4y^2 - 50x + 8y - 59 = 0$

Sugestão: Complete os quadrados e coloque a equação na forma padrão da elipse

1.1.3 Parábola

A equação geral da parábola é da forma $y = ax^2 + bx + c$ (eixo de simetria paralelo ao eixo y) ou $x = ay^2 + by + c$,(eixo de simetria paralelo ao eixo x).

Na equação $y = ax^2 + bx + c$, se $a > 0$ então a parábola tem concavidade voltada para cima e se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Os elementos que são úteis para o desenho da parábola são os pontos onde a parábola corta o eixo dos x, as abcissas destes pontos podem ser encontradas resolvendo-se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, e o vértice V da parábola é dado por $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. Caso a parábola não corte o eixo dos x deverá ser calculado o vértice e determinado alguns pontos pertencentes à parábola para facilitar o esboço da parábola.

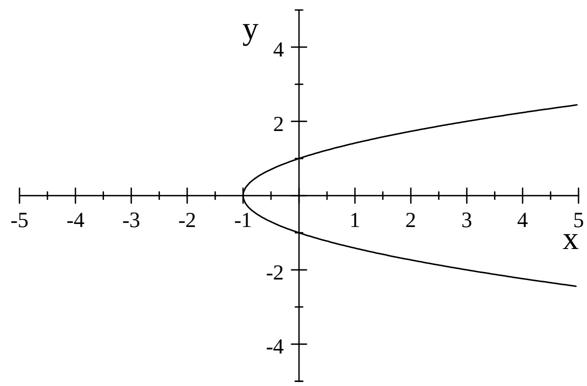
. Na equação $x = ay^2 + by + c$ se $a > 0$ então a parábola tem concavidade voltada para a direita e se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda. Os elementos que são úteis para o desenho da parábola são os pontos onde a parábola corta o eixo dos y, as ordenadas destes pontos podem ser encontradas resolvendo-se a equação $ay^2 + by + c = 0$, e o vértice V da parábola é dado por $V(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a})$. Caso a parábola não corte o eixo dos y deverá ser calculado o vértice e determinado alguns pontos pertencentes à parábola para facilitar o esboço da parábola.

Exemplo 12 *: Faça um desenho da parábola* $y^2 - x = 1$

Neste caso o eixo de simetria é paralelo ao eixo x e podemos escrever a equação na forma

$$x = y^2 - 1$$

Note que a parábola corta o eixo dos y nos pontos $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$ que são as raízes da equação $y^2 - 1 = 0$ e possui a concavidade voltada para a direção positiva do eixo x já que o coeficiente de y^2 é 1 (positivo):



Exemplo 13 *: Faça um esboço da párábola* $y = 8x^2$

Exemplo 14 *: Faça um desenho da parábola* $2y^2 - 4y - 2x - 2 = 0$

Sugestão: Isole o x, encontre as raizes da equação de segundo grau em y (que são pontos onde a parábola corta o eixo dos y, fazendo $x = 0$) e encontre o vértice. Use seus conhecimentos de cálculo I.

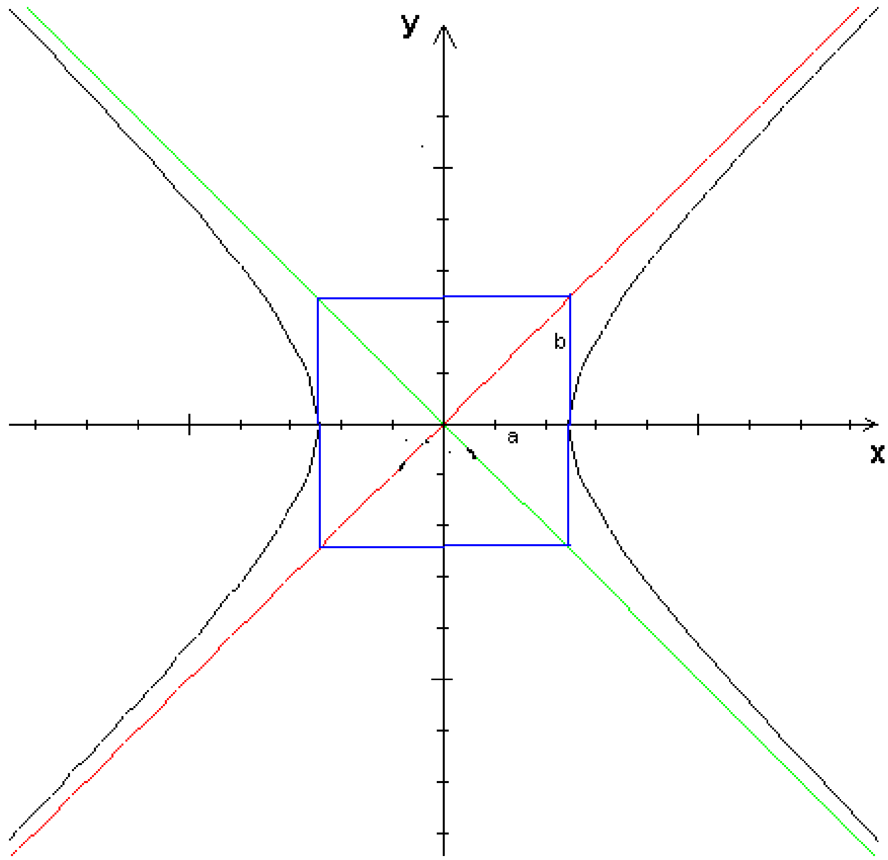
1.1.4 Hipérbole

Equação da hipérbole com centro no origem do sistema de coordenadas

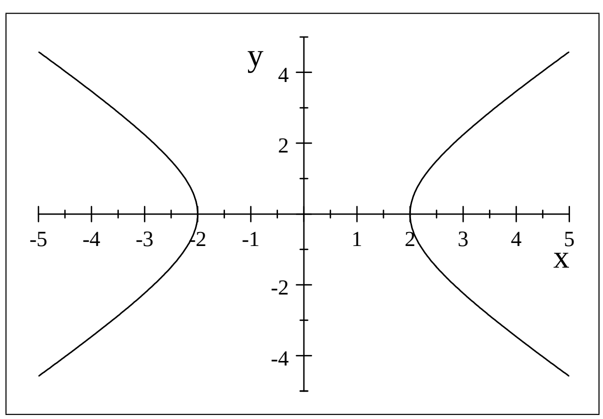
A equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quando o eixo real está sobre o eixo dos x e seu centro é a origem do sistema coordenado. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são chamadas assíntotas dessa hipérbole e os pontos $V_1(a, 0)$ e $V_2(-a, 0)$ são chamados vértices dessa hipérbole.



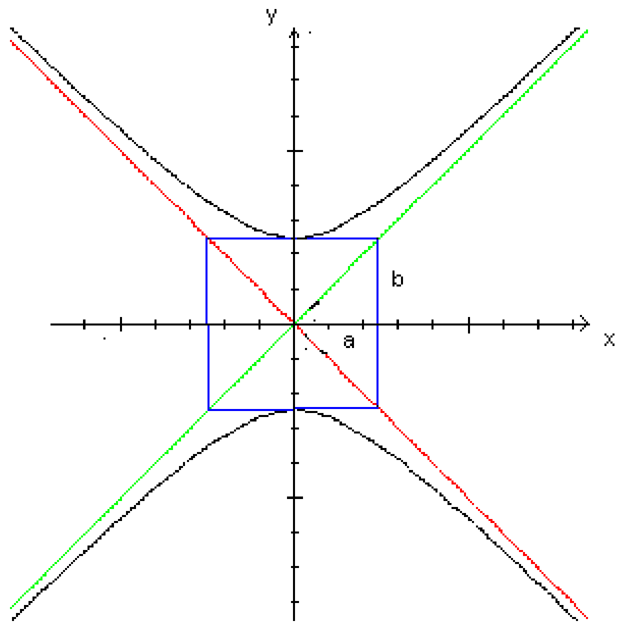
Exemplo 15 *:* $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$



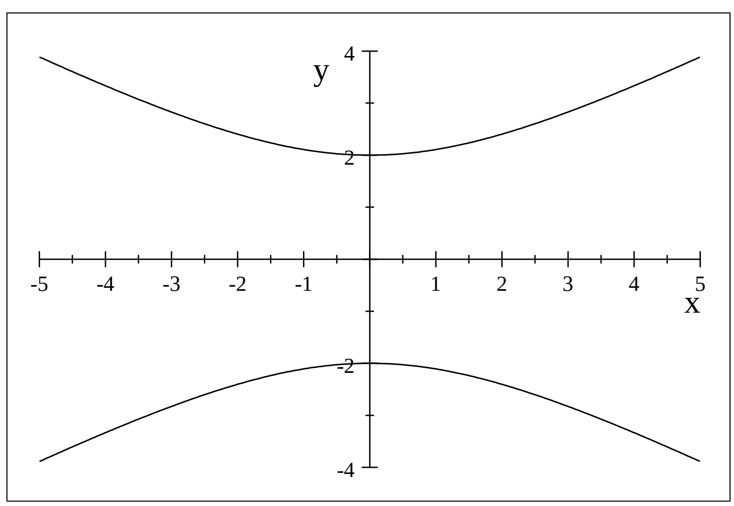
A equação da hipérbole é:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

quando o eixo real está sobre o eixo dos y e seu centro é a origem do sistema coordenado. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são as assíntotas dessa hipérbole e os ponto $V_1(0, b)$ e $V_2(0, -b)$ são os vértices.



Exemplo 16 : $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$



Para desenhar uma hipérbole é conveniente inicialmente desenhar as assíntotas e marcar os vértices (pontos $P(a, 0)$ e $P(-a, 0)$ para o caso da hipérbole com eixo real no eixo dos x) e logo em seguida determinar mais dois ou tres pontos da hipérbole; quanto mais pontos da hipérbole forem obtidos melhor será o traçado.

Exemplo 17 : *Fazer o desenho da hipérbole*

$$9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$$

Note que a equação desta hipérbole não está na forma padrão. Colocando na forma padrão temos:

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação reduzida da hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x.

Neste caso, $a^2 = 7$ e $b^2 = 9$, portanto $a = \sqrt{7}$ e $b = 3$. As assíntotas são as retas $y = \frac{3}{\sqrt{7}}x$ e $y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$. Os vértices serão os pontos $V_1 = (\sqrt{7}\ ,0)$ e $V_2 = (-\sqrt{7}\ ,0)$. Observe que para marcar os pontos devemos tomar $x \geq \sqrt{7}$ e $x \leq -\sqrt{7}$. Vamos agora determinar alguns pontos da hipérbole:

Para $x = 3$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{3^2}{7} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\ -\frac{y^2}{9} &= 1 - 1.2857 \\ -\frac{y^2}{9} &= -.2857 \\ y^2 &= 2.5713 \\ y &= \pm 1.6036 \end{aligned}$$

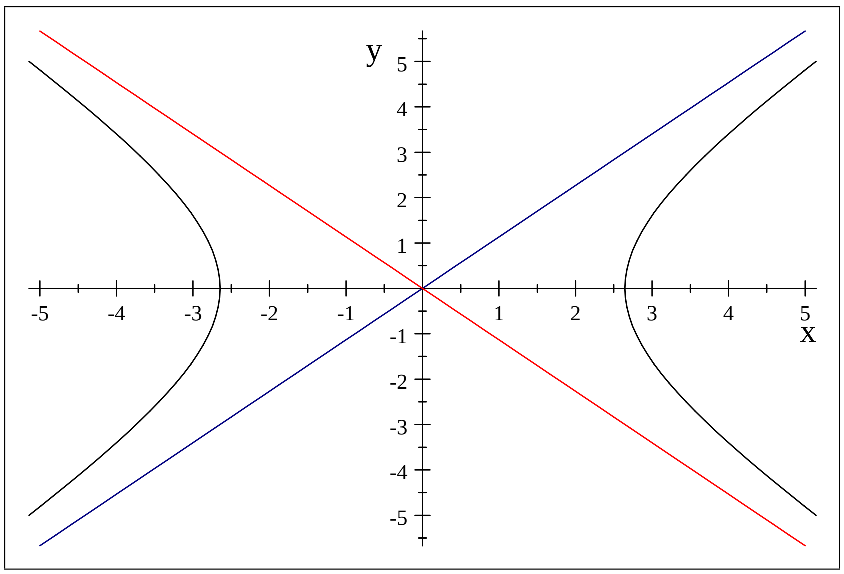
Para $x = 4$ temos

$$\begin{aligned} \frac{4^2}{7} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\ -\frac{y^2}{9} &= 1 - 2.2857 \\ -\frac{y^2}{9} &= -1.2857 \\ y^2 &= 11.571 \\ y &= \pm 3.4017 \end{aligned}$$

Analogamente temos para $x = -3, y = \pm 1.6036$ e para $x = -4, y = \pm 3.4017$.

Colocando numa tabela de pontos temos

x	y
$\sqrt{7}$	0
$-\sqrt{7}$	0
3	± 1.6036
-3	± 1.6036
4	± 3.4017
-4	± 3.4017



Faça o desenho da hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Equação da hipérbole com centro fora da origem do sistema de coordenadas

A equação da hipérbole com centro no Ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo dos x é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

A equação da hipérbole com centro no Ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo dos y é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

Para fazermos o desenho de uma hipérbole com centro fora da origem procedemos da seguinte maneira: Consideramos os eixos auxiliares $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, logo temos as equações

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(x')^2}{a^2} = 1$$

Procedemos como descrito anteriormente usando os novos eixos auxiliares x' e y'

Exemplo 18 *: Fazer um desenho da hipérbole:*

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$$

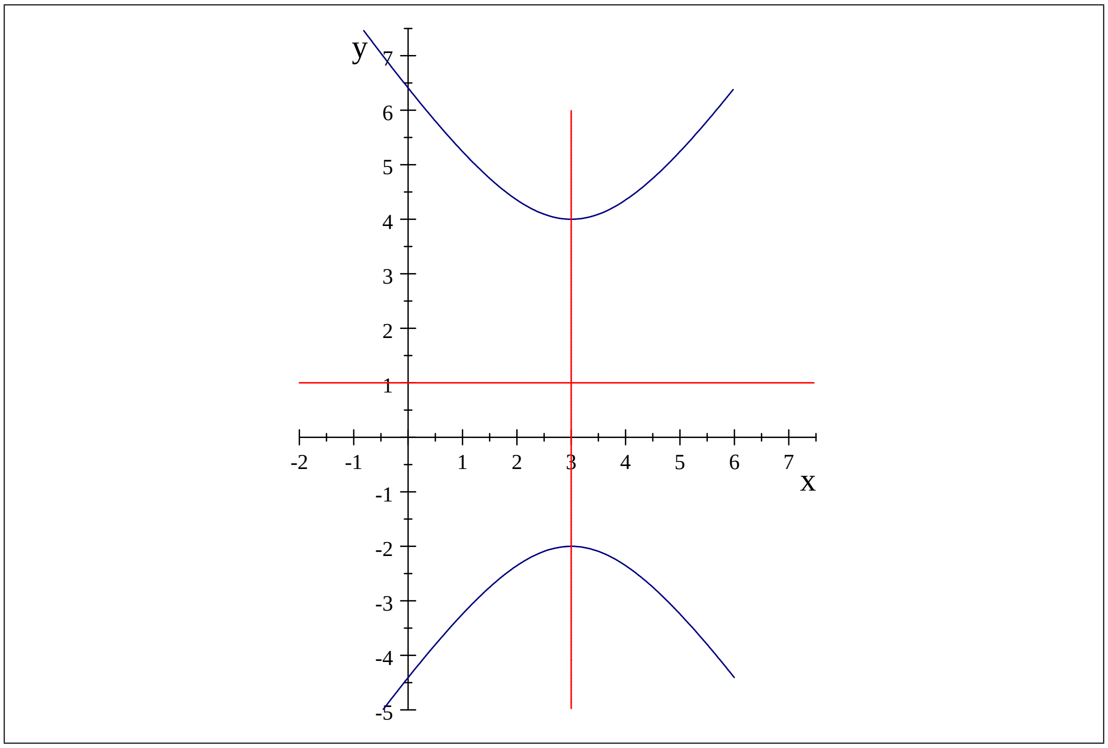
Devemos completar os quadrados e colocar a equação na forma padrão (faça isso como exercício) para obter:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

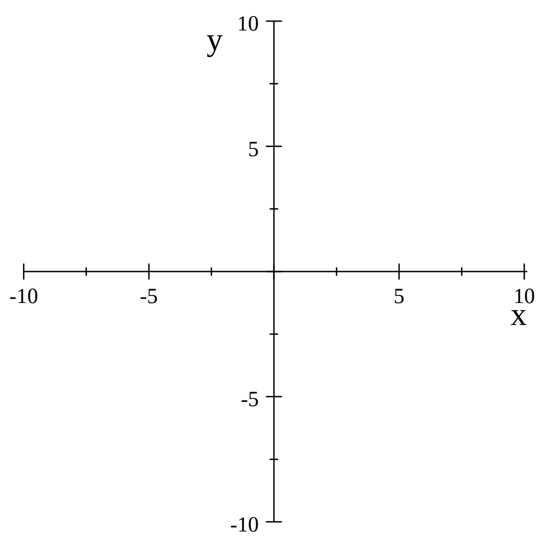
neste caso $x' = x - 3$ e $y' = y - 1$

$$\frac{(y')^2}{9} - \frac{(x')^2}{4} = 1$$

Neste novo sistema temos que os vértices são os pontos $V_1' = (0, 3)$ e $V_2' = (0, -3)$.Observe que no sistema xy os vértices são $V_1 = (3, 4)$ e $V_2 = (3, -2)$ e o centro é o ponto $C(3, 1)$



Exemplo 19 *: Faça um desenho da hipérbole* $7x^2 - 9y^2 + 28x + 54y - 116 = 0$



1.2 Superfícies

1.2.1 Introdução

Passaremos agora ao estudo das superfícies que será de grande auxílio em outras disciplinas e também na vida prática do acadêmico. Existem muitas definições de superficícies dependendo do nível de profundidade, mas nesta breve explanação de caráter introdutório daremos a definição mais simples e mais usual.

Definição: O conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem uma única equação da forma $F(x,y,z)=0$ é denominada superfície.

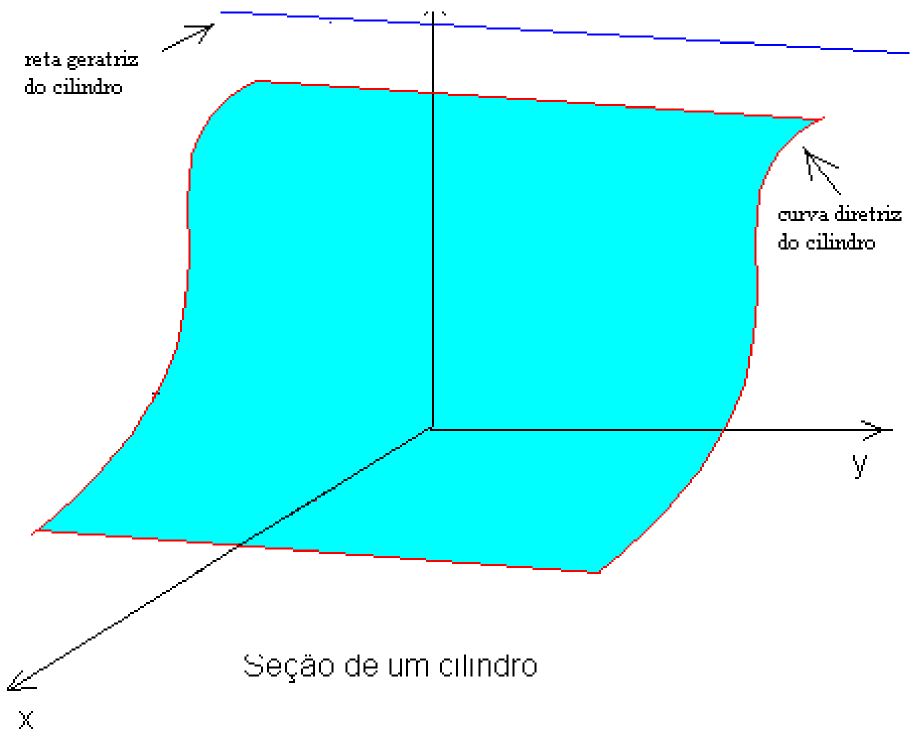
Exemplo 20 *:*

Plano: $x+y+z=0$
Cilindro: $x^2+y^2=4$
Esfera: $x^2+y^2+z^2=1$

1.2.2 Superfície Cilíndrica

É a superfície gerada por uma linha reta que se move de maneira que é sempre paralela a uma dada reta fixa e passa sempre por uma curva dada também fixada. A reta que se move é denominada **geratriz** e a curva dada fixa é a **diretriz** da superfície cilíndrica. Em nosso estudo de superfície cilíndrica consideraremos a **diretriz** como sendo uma curva que se encontra num plano coordenado e a reta fixa será sempre o eixo coordenado que é ortogonal ao plano coordenado que contém a curva **diretriz**. A **diretriz** terá então uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \text{ e } z=0 \\ f(x,z) &= 0 \text{ e } y=0 \\ f(y,z) &= 0 \text{ e } x=0 \end{aligned}$$



Observação: Um cilindro é uma supefície que se estende ao infinito e nos desenhos apenas desenhamos uma parte do cilindro onde subetende-se em qual direção o cilindro se estenderá. O desenho serve apenas para termos uma visualização parcial do cilindro no espaço para podermos melhor operar com eles analiticamente.

1.2.3 Cilindros Retos

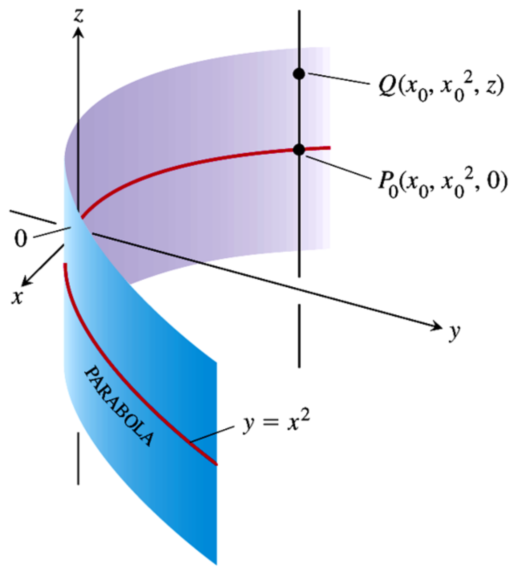
Definimos cilindro reto como sendo o cilindro cuja diretriz é uma curva que está em um dos planos coordenados e a geratriz é o eixo do sistema cartesiano que é ortogonal ao plano que contém a curva. Em vista desta definição termos tres casos:

a) Se a curva diretriz está no plano xy de equação $f(x, y) = 0$ e $z = 0$ então a geratriz será o eixo z

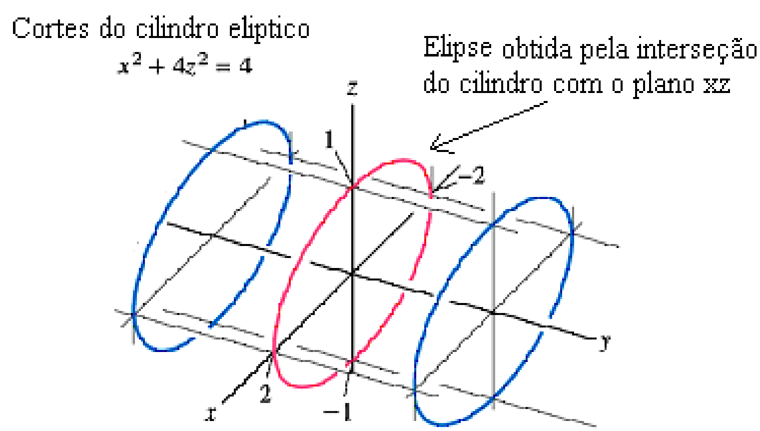
b) Se a curva diretriz está no plano xz de equação $f(x, z) = 0$ e $y = 0$ então a geratriz será o eixo y

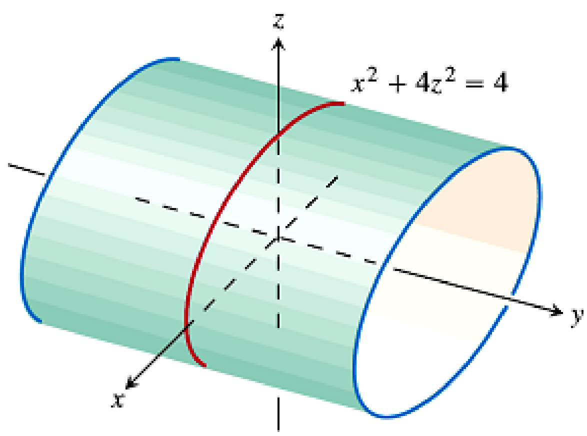
c) Se a curva diretriz está no plano xy de equação $f(y, z) = 0$ e $x = 0$ então a geratriz será o eixo x

Exemplo 21 *Cilindro parabólico* $y = x^2$ *e* $z = 0$ *(geratriz é o eixo* z*)*



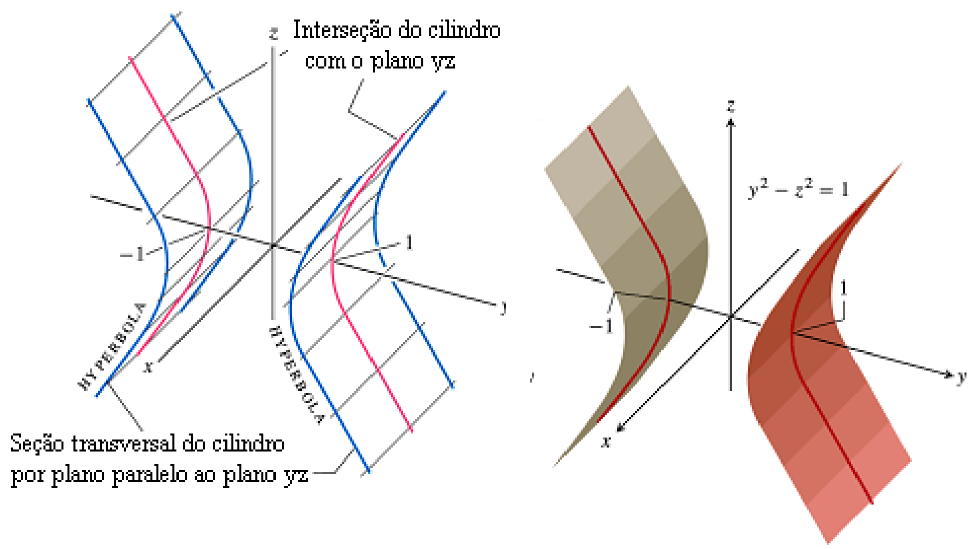
Exemplo 22 *Cilindro elíptico* $x^2 + 4z^2 = 4$ *e* $y = 0$ *(geratriz é o eixo y)*





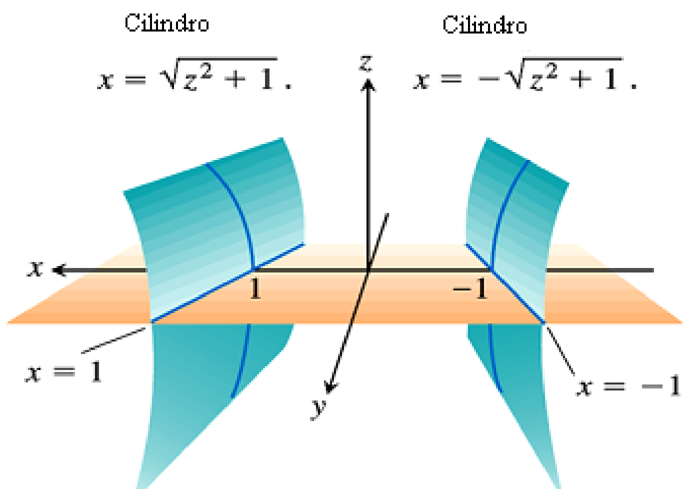
Observação 23 *De agora em diante omitiremos a variável que é igual a zero e forneceremos apenas a equação da curva em determinado plano subentendendo-se que se trata de um cilindro cuja diretriz é dada pela equação da curva indicada e a geratriz é o eixo ortogoanal ao plano que contém a curva*

Exemplo 24 *Cilindro* $y^2 - z^2 = 1$



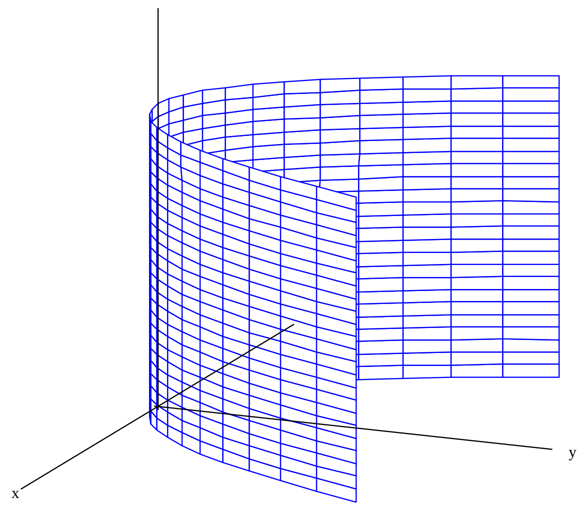
Exemplo 25 *Cilindro Hiperbólico* $x^2 - z^2 = 1$

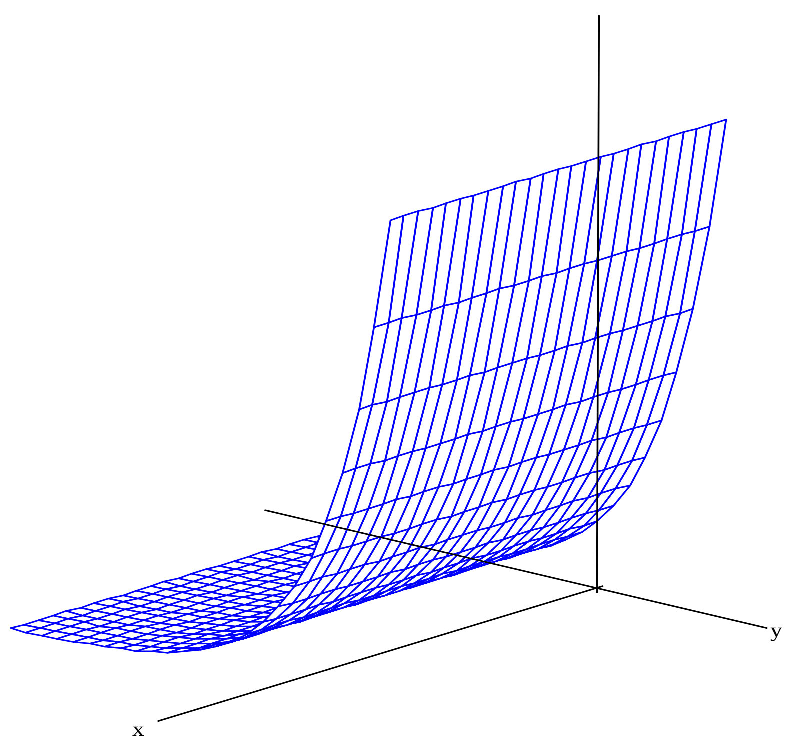
Exemplo 26 *: Construir o cilindro cuja diretriz é a parábola* $x^2 = 4y \quad e\ z = 0$



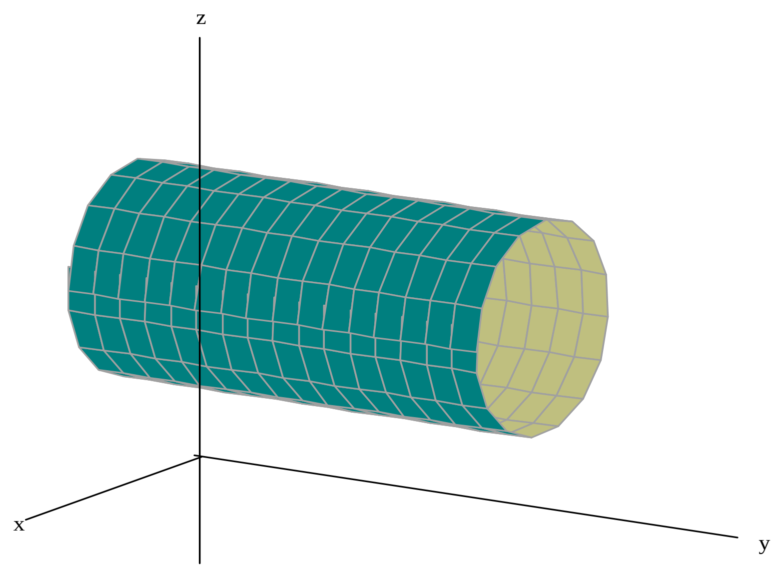
Observe que neste caso a curva está no plano xy e portanto a geratriz é o eixo z.

Exemplo 27 *: Construir o cilindro* $z = e^y$



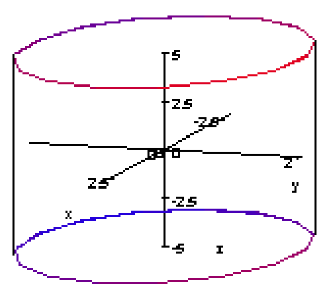


Exemplo 28 *: Construir o cilindro dado pela diretriz* $(x-1)^2 + (z-2)^2 = 1, y = 0$

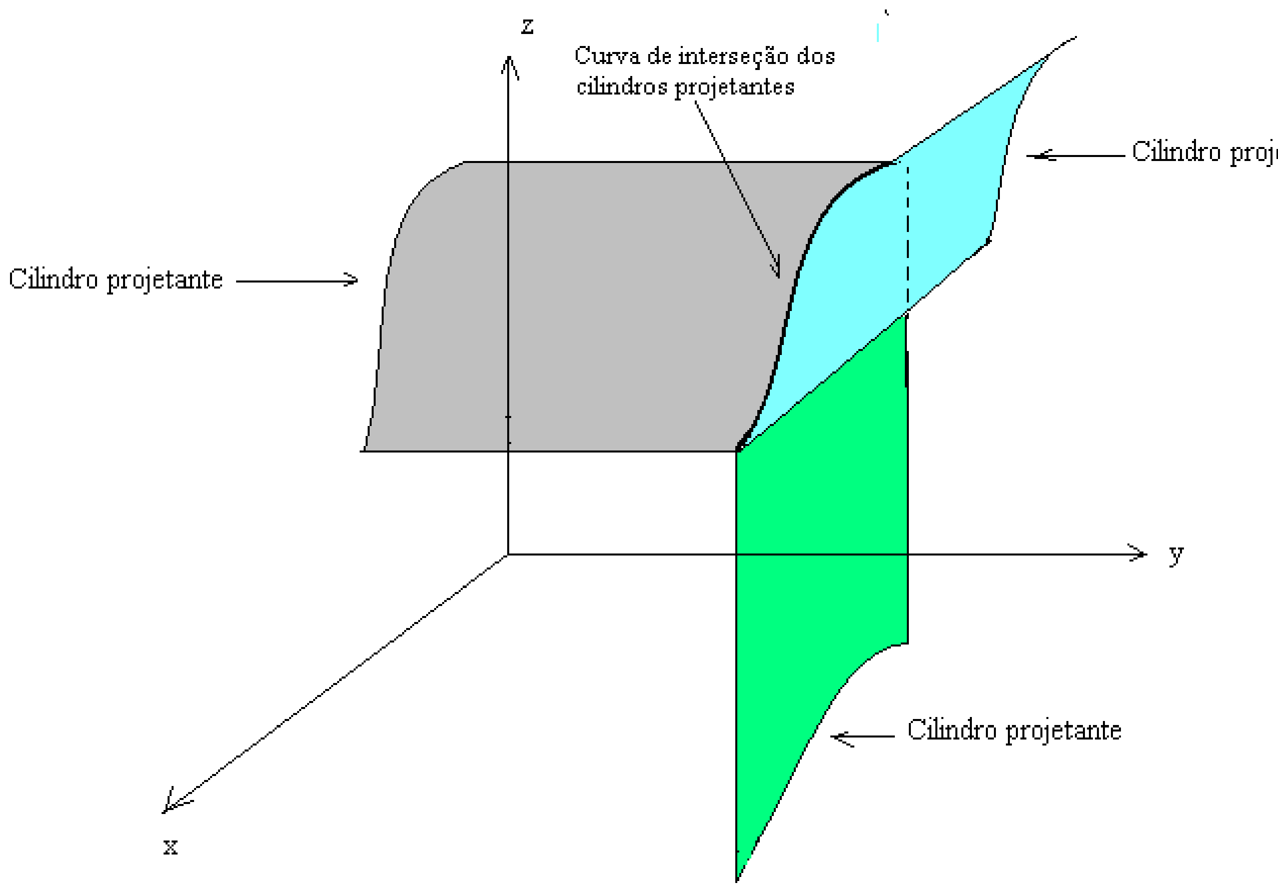


Exemplo 29 : *Construir o cilindro elíptico* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

.



Exemplo 30 : *Construir o cilindro cuja diretriz é a curva dada por* $x^2+y^2 = 4$ *e* $z = 0$



1.3 Cilindros projetantes de uma curva

Dada uma curva C no espaço é possível obter tres cilindros retos cujas interseções fornecem a curva C. Estes cilindros são obtidos projetando-se a curva em cada um dos planos coordenados. Portanto projetando a curva no plano xy teremos um cilindro cuja diretriz é a curva C e a geratriz é o eixo z, projetando a curva no plano xz teremos um cilindro cuja diretriz é a curva C e a geratriz é o eixo y e projetando a curva no plano yz teremos um cilindro cuja diretriz é a curva C e a geratriz é o eixo x.

Dada uma curva no espaço representada pela interseção das superfícies

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= 0 \\ f(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

podemos representá-la analiticamente por qualquer das equações de duas superfícies que se interceptam segundo a mesma curva. As superfícies mais amenas para se trabalhar são os cilindros e dada uma curva no espaço podemos sempre obter esta mesma curva através da interseção de dois cilindros. Com efeito, consideramos os sistemas equivalentes ao sistema (1.1) formado por um par qualquer das equações

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ G(y,z) &= 0 \\ H(x,z) &= 0 \end{aligned}$$

resultante da eliminação respectiva das variáveis z, x, y. Cada um desses sistemas representa a mesma curva C.

Geometricamente estes cilindros são obtidos projetando-se a curva nos três planos coordenados e por isso estes cilindros são chamados **cilindros projetantes da curva.**

Exemplo 31 *: Determinar os cilindros projetantes da curva dada pela interseção das superfícies*

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Eliminando a variável x : Multiplicamos a segunda equação por 2 e a primeira por -1 e em seguida somamos as duas equações:

$$\begin{aligned} -4x^2 - y^2 - z^2 + 7 &= 0 \\ 4x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y^2 - 3z^2 + 9 = 0$$

$$3z^2 - y^2 = 9 \quad \text{(Cilindro hiperbólico)}$$

Eliminando a variável y : Voltamos ao sistema (1.2) multiplicamos a segunda equação por -1 e somamos com a primeira equação

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ -2x^2 - y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2z^2 - 8 = 0$$

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{(Cilindro circular)}$$

Eliminando a variável z : Voltamos ao sistema (1.2) e adicionamos as duas equações

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$6x^2 + 2y^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 + y^2 = 3 \quad \text{(Cilindro Circular)}$$

A mesma curva representada pelo sistema (1.1) pode ser ser substituido por qualquer um dos sistemas seguintes formados pelos cilindros projetantes da curva:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 & = & 3 \\ x^2 + z^2 & = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 & = & 3 \\ 3z^2 - y^2 & = & 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 & = & 4 \\ 3z^2 - y^2 & = & 9 \end{cases}$$

1.4 Construção geométrica da curva formada pela interseção de seus cilindros projetantes

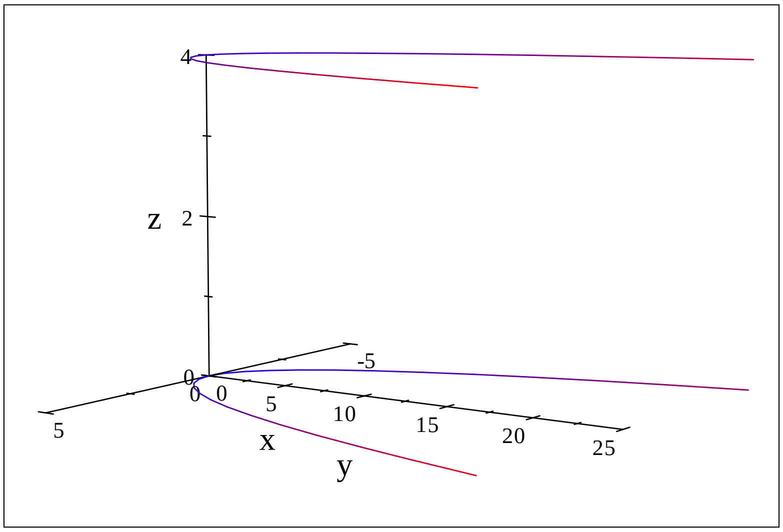
Para traçarmos a curva de interseção de dois cilindros projetantes não necessitamos desenhar os cilindros completos, basta apenas desenharmos as curvas diretrizes de cada cilindro nos planos coordenados correspondentes e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados podemos obter cada ponto da curva de interseção.

Consideremos os dois cilindros projetantes

$$\begin{cases} y & = & x^2 \\ y^2 + z^2 & = & 4 \end{cases}$$

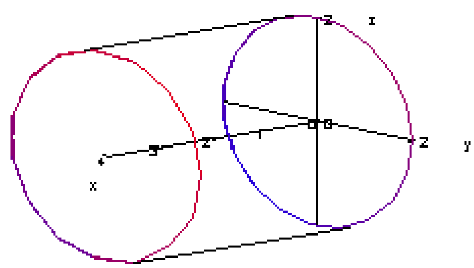
Inicialmente vamos desenhar cada cilindro separadamente e em seguida vamos construir a curva de interseção dos dois cilindros:

a) Cilindro parabólico $y \;\; = \;\; x^2$



Note que no plano xy temos a parábola $y = x^2$

b) Cilindro circular $y^2 + z^2 = 4$

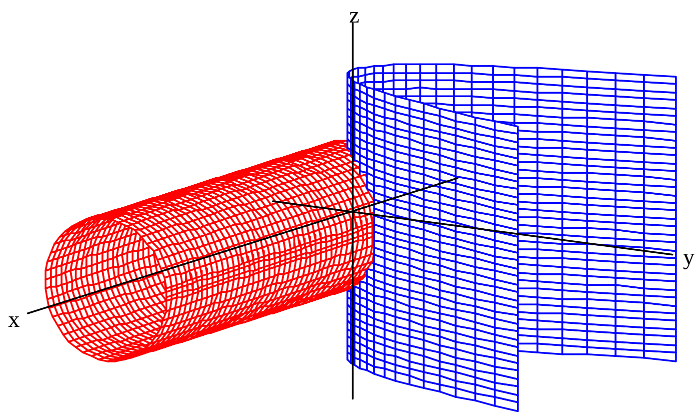


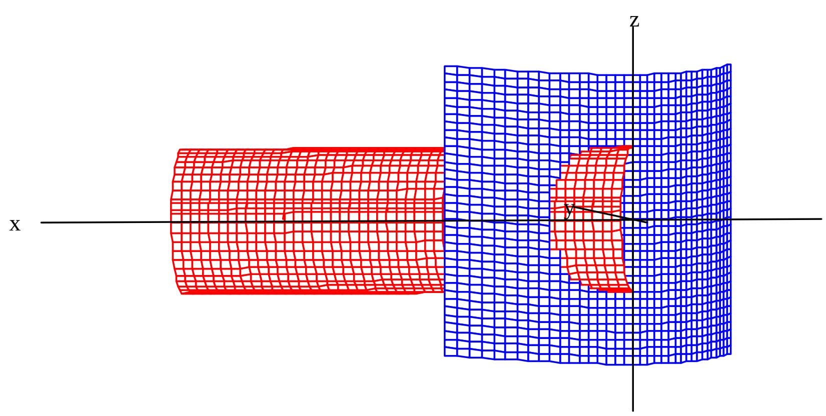
Note que no plano yz temos a circunferência $y^2 + z^2 = 4$

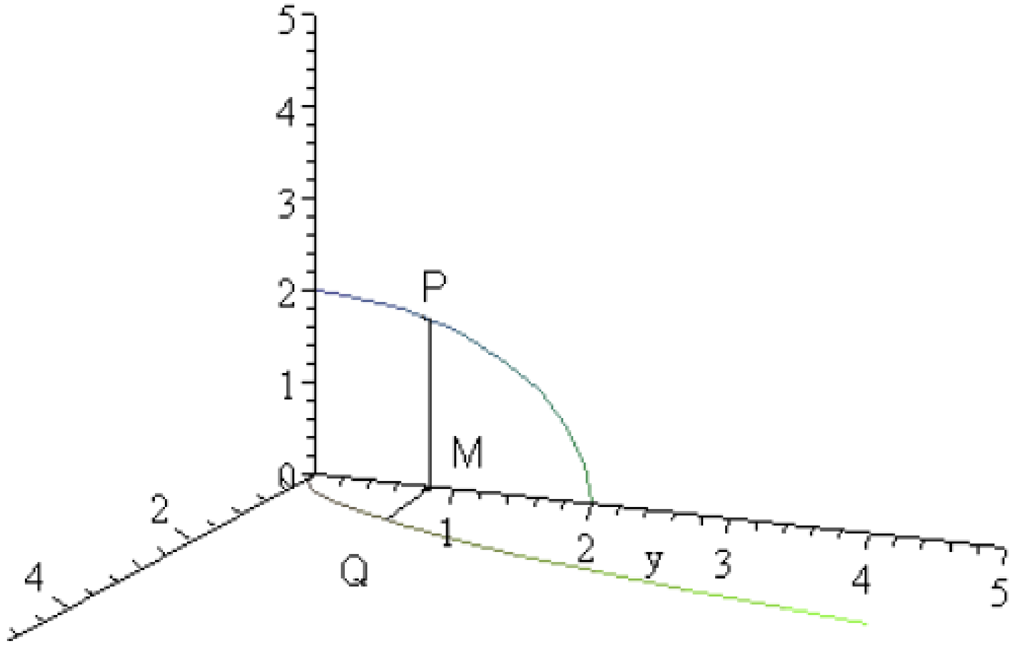
c) Vamos agora desenhar os dois cilindros conjuntamente no mesmo sistema de coordenadas

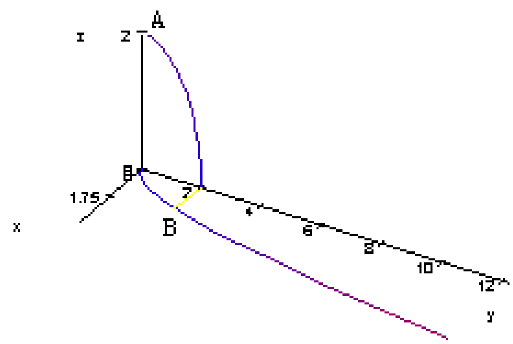
d) Vamos agora traçar a curva de interseção dos dois cilindros e para isso necessitamos apenas das curvas diretrizes nos respectivos planos coordenados. Depois de se obter a curva de interseção podemos então desenhar os cilindros para termos uma visualização completa dos cilindros e da curva de interseção.

Para simplicar a obtenção da curva de interseção adotaremos sempre o primeiro octante para efetuarmos o traçado sendo que para os outros octantes o procedimento é o mesmo e além disso por simetria podemos sempre inferir qual será a curva completa.


z
x
y

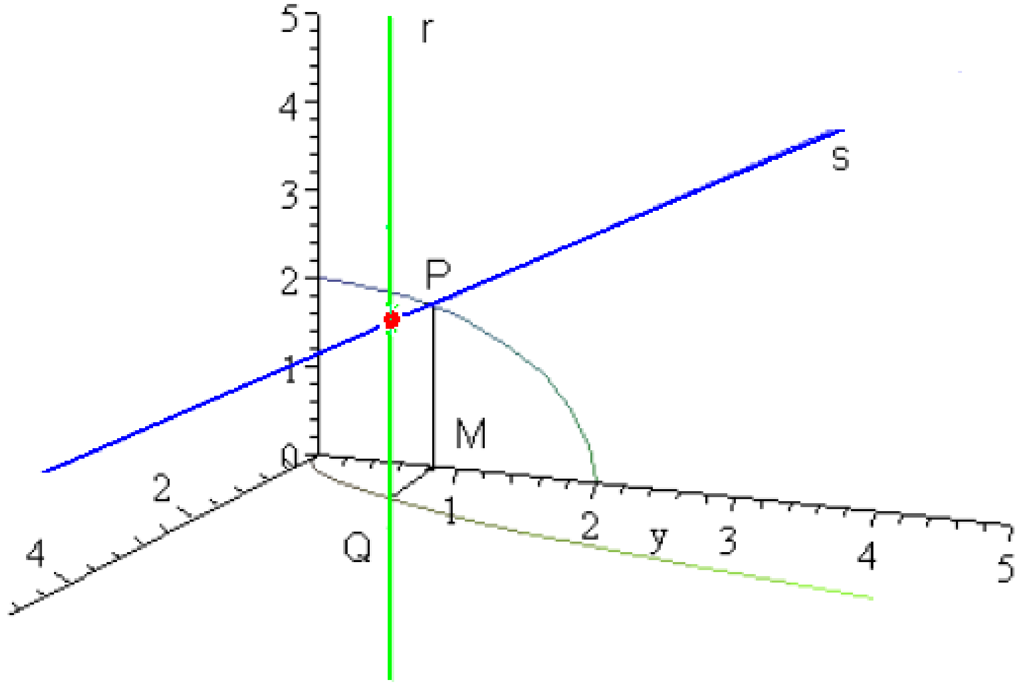

z
x
y





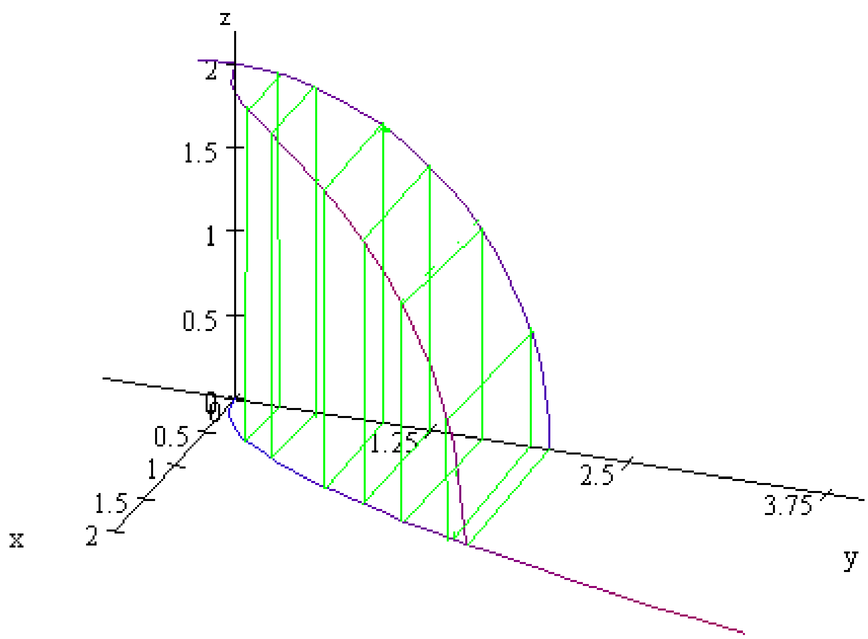
Claramente os pontos A e B pertencem a curva de interseção mas também podem ser obtidos usando-se a técnica geral de construção da curva de interseção que vamos agora descrever.

Vamos tomar um ponto P qualquer de uma das curvas e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados "ir de encontro" a um ponto da outra curva. Na figura abaixo partimos do ponto P da curva $z^2+y^2=4$ e vamos de encontro ao ponto Q da curva $y=x^2$. Para isso traçamos inicialmente o segmento PM paralelo ao eixo z e em seguida o segmento MQ paralelo ao eixo x.



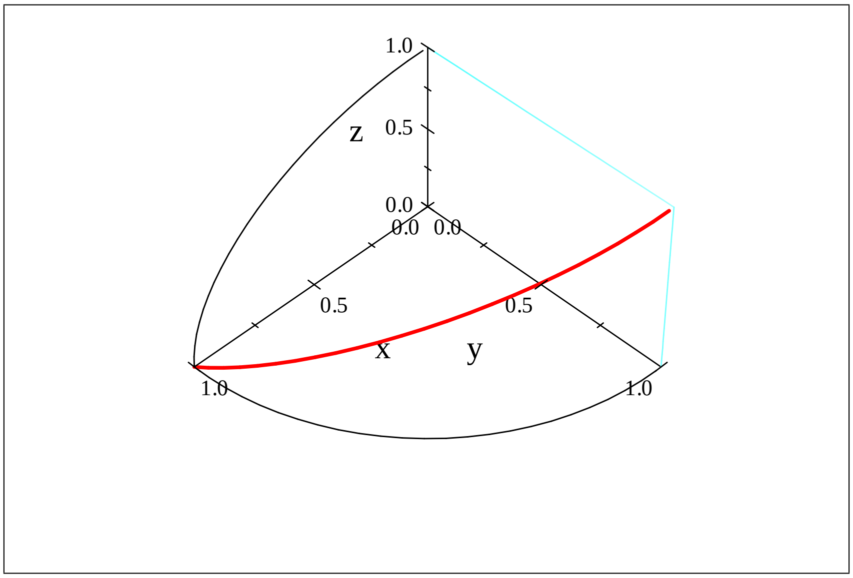
O ponto C da curva de interseção dos dois cilindros é agora obtido através da interseção da reta r que passa pelo ponto Q e é paralela ao segmento PM com a reta s que passa pelo ponto P e é paralela ao segmento QM.

Utilizando este mesmo procedimento com vários pontos obtemos a curva de interseção:

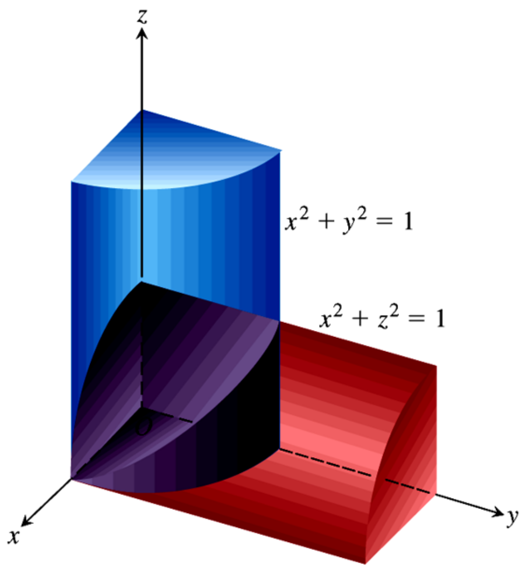


Exemplo 32 *: Obter a curva de interseção dos cilindros* $x^2+y^2 = 1$ *e* $x^2+z^2 = 1$.

Vamos apenas desenhar as curvas diretrizes nos planos coordenados (utilizando somente o primeiro octante) e através do processo descrito acima vamos encontrar a curva de interseção dos cilindros.



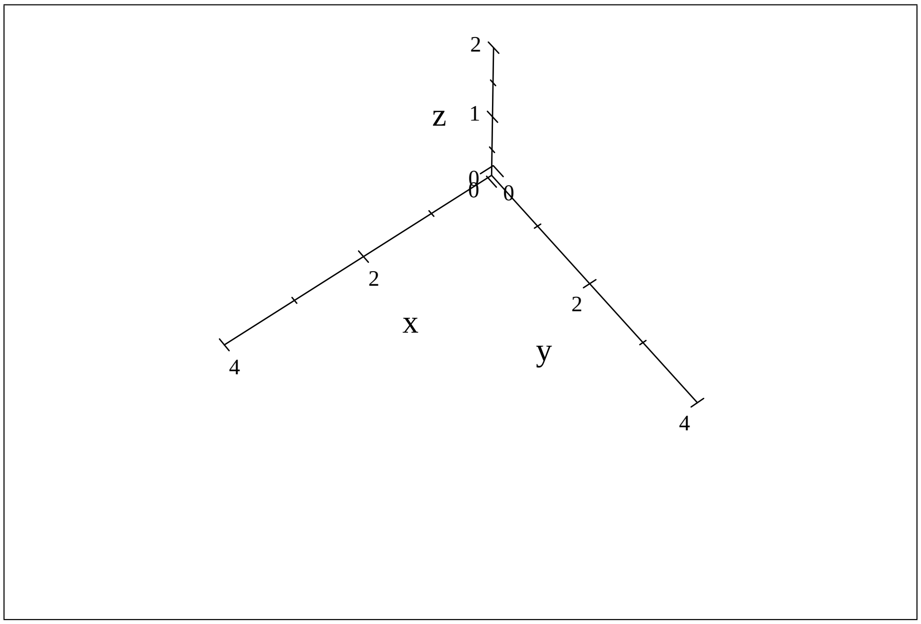
Agora desenhamos no primeiro octante o desenho completo da interseção dos dois cilindros,



Exemplo 33 *: Utilizando o procedimento descrito acima obtenha a curva de interseção dos cilindros, no primeiro octante, dados por:*

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y} \\ x^2 + (y-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Note que neste caso devemos ter $y > 0$.



Exemplo 34 *: Determine dois cilindros projetantes da curva dada pela interseção das superfícies dadas abaixo e faça um desenho da curva de interseção das superfícies no primeiro octante do sistema* $0x, 0y$ *e* $0z$.

$$\begin{cases} 7x^2 + 14y^2 + 63z^2 - 28y = 63 \\ 6x^2 + 3y^2 - 27z^2 - 24y + 27 = 0 \end{cases}$$

Solução: Para obter os cilindros projetantes devemos trabalhar com as equações de modo a eliminar sucessivamente as variávieis x, y e z. Para melhor trabalhar com as equações observe que podemos simplificá-las um pouco, dividindo a primeira equação por 7 e a segunda por 3. Fazendo isso temos:

$$x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9 \tag{1.3}$$

$$2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \tag{1.4}$$

Observe que facilmente podemos eliminar a variável z somando as equações:

$$+\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$$

Para eliminar a variável x multiplicamos a primeira equação por 2 e subtraimos a segunda equação da primeira:

$$-\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 8y = 18 \\ 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases}$$

$$3y^2 + 27z^2 = 27$$

Observe que neste caso não vamos conseguir eliminar facilmente a variável y, mas como já temos dois cilindros projetantes vamos usá-los para obter a curva de interseção. Os cilindros projetantes são:

$$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$$

$$3y^2 + 27z^2 = 27$$

Note que na equação $3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$ temos y e y^2, logo devemos "completar os quadrados" de modo a obter uma equação mais simples para podermos identificar a curva e fazer seu desenho:

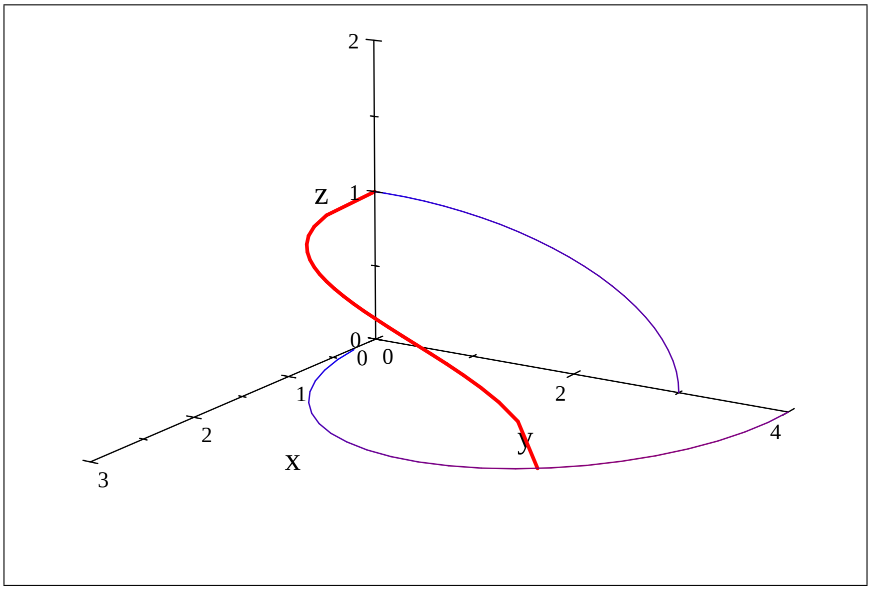
$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 12y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ x^2 + \left(y^2 - 4y + 4\right) - 4 &= 0 \\ x^2 + \left(y^2 - 4y + 4\right) &= 4 \\ x^2 + (y-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Portanto os cilindros projetantes são:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{(Cilindro Circular)}$$

$$\tfrac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad \text{(Cilindro Elíptico)}$$

Observe que o primeiro cilindro é gerado por uma circunferência de raio 2 no plano xy com centro no ponto $C(0,2)$ e o segundo cilindro é gerado por uma elipse no plano yz com semi-eixo maior 3 no eixo y e semi-eixo menor 1 no eixo z



1.5 Primeira lista de exercícios

1) Determinar os cilíndros projetantes e construir a curva dada pela interseção das superfícies:

a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + z^2 + z = 124$ e $x^2 - y^2 - z^2 + 3z = 0$
c) $4x^2 + y^2 + z^2 = 72$ e $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
d) $x^2 - 3y^2 - 3x + z = 0$ e $x^2 + y^2 + x + z = 0$
e) $2x^2 + 3y^2 + z = 12$ e $2x^2 - y^2 - 3z + 4 = 0$
f) $3y^2 + x + 2z = 12$ e $y^2 - x + 2z = 4$
g) $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$ e $y^2 - z^2 + 2x = 0$
h) $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$ e $y^2 - z^2 + 2x = 4$
i) $x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 92$ e $x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y + 9 = 0$
j) $180y + 9x^2 + 4z^2 = 180 \sin x + 36$ e $36y + 9x^2 + 4z^2 = 36 \sin x + 36$
k) $x^2 - y^2 + 8z + 4y = 0$ e $2x^2 + y^2 + 4z - 4y = 0$

1.6 Equações Paramétricas

Uma curva no espaço pode se representada por três equações da forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

onde cada coordenada do ponto da curva depende de um parâmetro t. Convenciona-se usar a notação t para o parâmetro em virtude das equações paramétricas serem usadas na física para representar o movimento de uma partícula em função do tempo. Mas poderemos usar outras notações para o parâmetro, como por exemplo θ e s.

Se na primeira equação isolarmos o valor de t e substituimos este valor nas outras duas equações teremos as equações da curva na forma cartesiana:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ G(x,z) &= 0 \end{aligned}$$

Estas são as equações cartesianas dos cilindros projetante da curva (1.5)

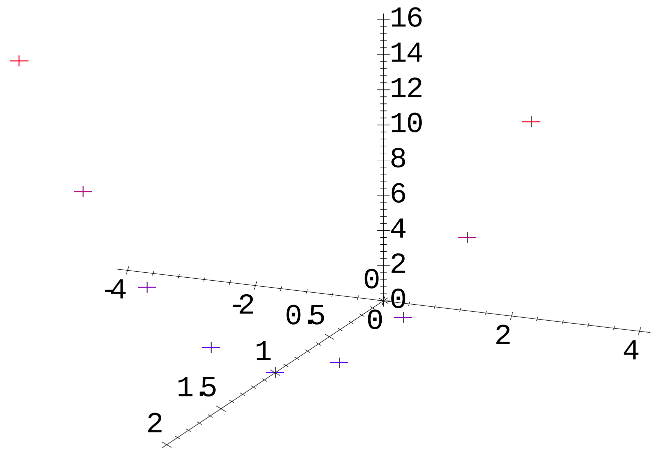
Exemplo 35 *: Fazer um desenho da curva*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

Para fazer o esboço da curva podemos proceder de dois modos:
a) Determinamos cada ponto da curva atribuindo valores ao parâmetro t :

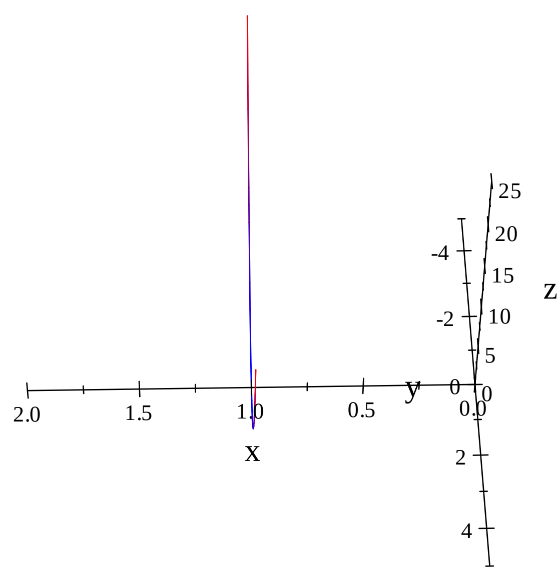
t	x	y	z
-4	1	-4	16
-3	1	-3	9
-2	1	-2	4
-1	1	-1	1
0	1	0	0
1	1	1	1
2	1	2	4
3	1	3	9
4	1	4	16

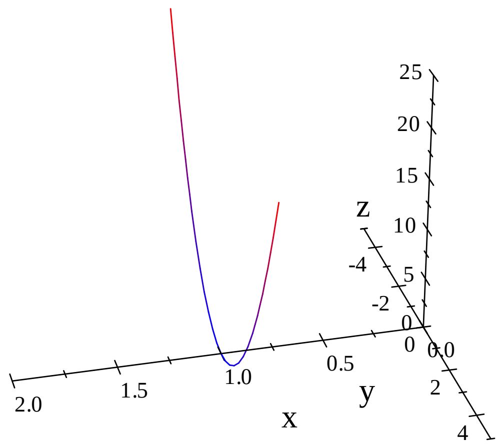
Marcamos cada um dos pontos no sistema tridimensional
$P_1(1,-4,16), P_2(1,-3,9), P_3(1,-2,4), P_4(1,-1,1), P_5(1,0,0), P_6(1,1,1),$
$P_7(1,2,4), P_8(1,3,9), P_9(1,4,16)$



8

Em seguida unimos os pontos para visualizarmos a curva. É claro que quanto mais pontos tivermos mais preciso será o traçado da curva. As equações paramétricas são ideais para fazermos traçados de curvas no computador pois o computador pode computar em pouquissimo tempo uma grande quantidadade de parâmetros e pontos da curva.



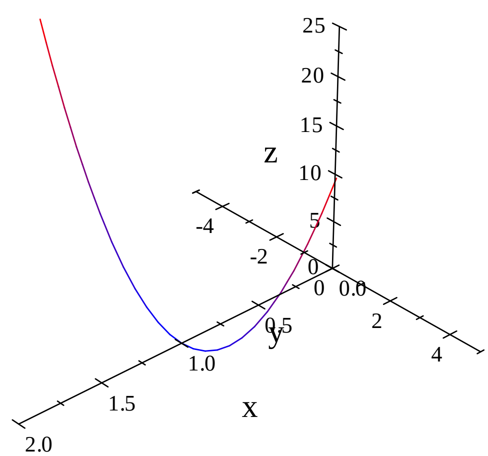


b) Outra maneira é passar as equações paramétricas para as equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = y^2 \end{cases}$$

logo temos uma parábola em cima do plano $x = 1$. A projeção da parábola no plano zy te equação $z = y^2$



Equações paramétricas de algumas curvas:
Circunferência com Centro $C(x_0, y_0)$ e raio r no plano:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + r\cos\theta \\ y(\theta) &= y_0 + r\sin\theta \end{aligned}$$

elipse com centro $C(x_0, y_0)$ e semi-eixos a e b no plano.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + a\cos\theta \\ y(\theta) &= y_0 + b\sin\theta \end{aligned}$$

Reta com vetor diretor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ no espaço

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + at \\ y(t) &= y_0 + bt \\ z(t) &= z_0 + c(t) \end{aligned}$$

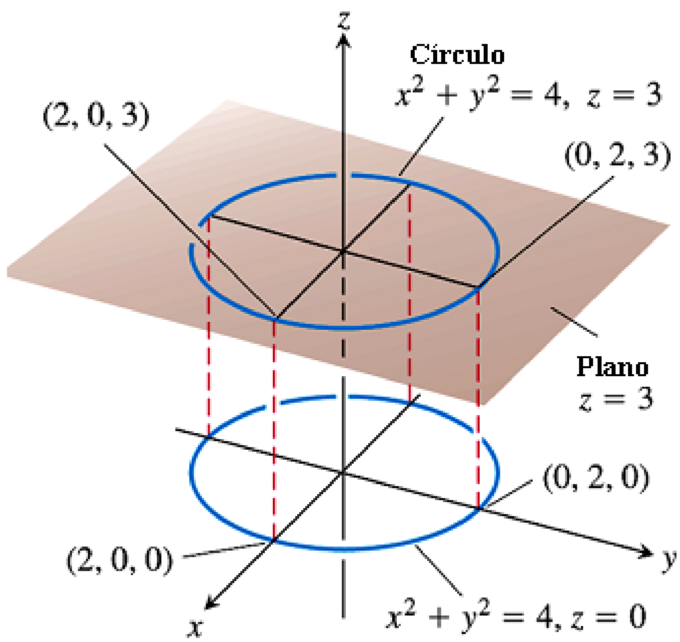
Exemplo 36 *Desenhe a curva*

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 3 \end{cases}$$

Passando para coordenadas cartesianas temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

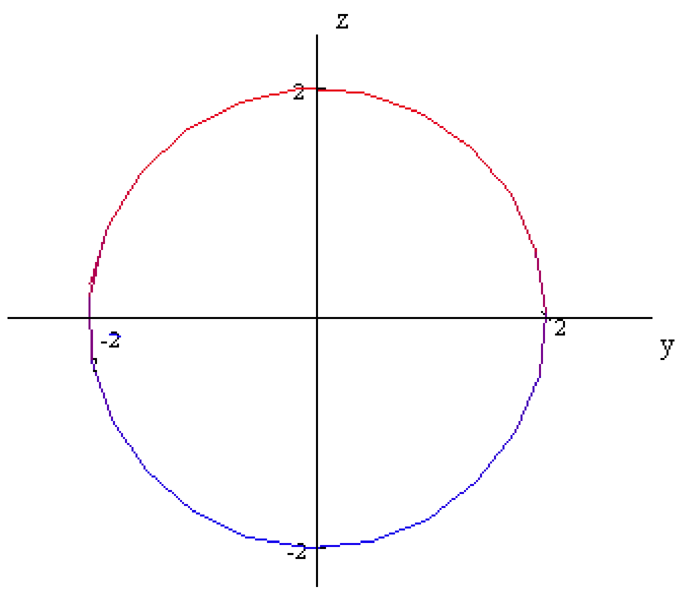
logo a curva é uma circuferência em cima do plano $z = 3$ *e a projeção dessa curva no plano* xy *é a circunferência* $x^2 + y^2 = 4$:

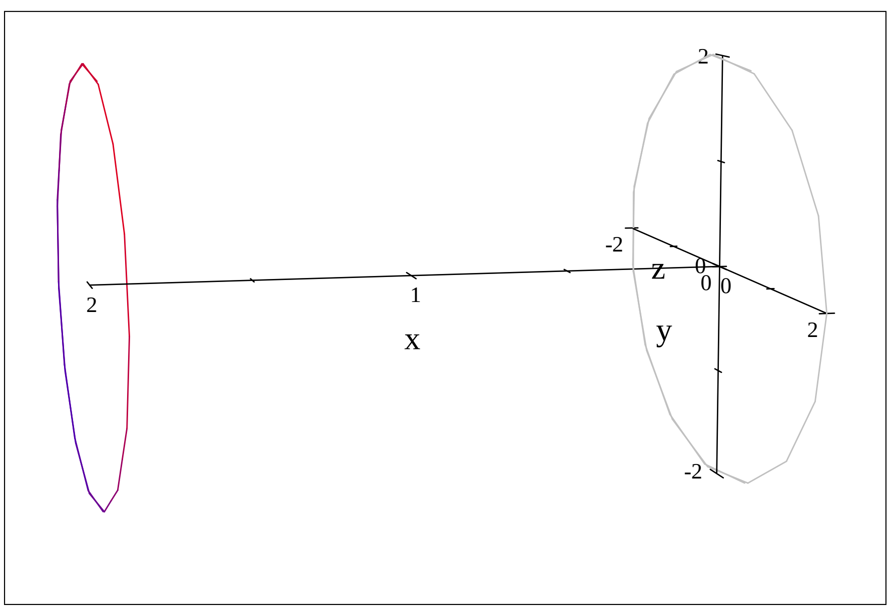


Exemplo 37 : *Desenhe a curva*

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2\cos\theta \\ z = 2\sin\theta \end{cases}$$

Observe que a projeção da curva no plano yz é uma circuferência de raio 2. Portanto temos uma circuferência de raio 2 em cima do plano $x = 2$





Projeção no plano yz

Exemplo 38 *: Desenhe a curva*

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2\cos\theta \\ z = 3\sin\theta \end{cases}$$

1.7 Equação Vetorial das curvas

Uma curva pode ser determinada pelo vetor posição de cada ponto da curva. Neste caso cada ponto da curva será dado por um vetor cuja extremidade se encontra em um ponto da curva.

E equação vetorial é da forma:

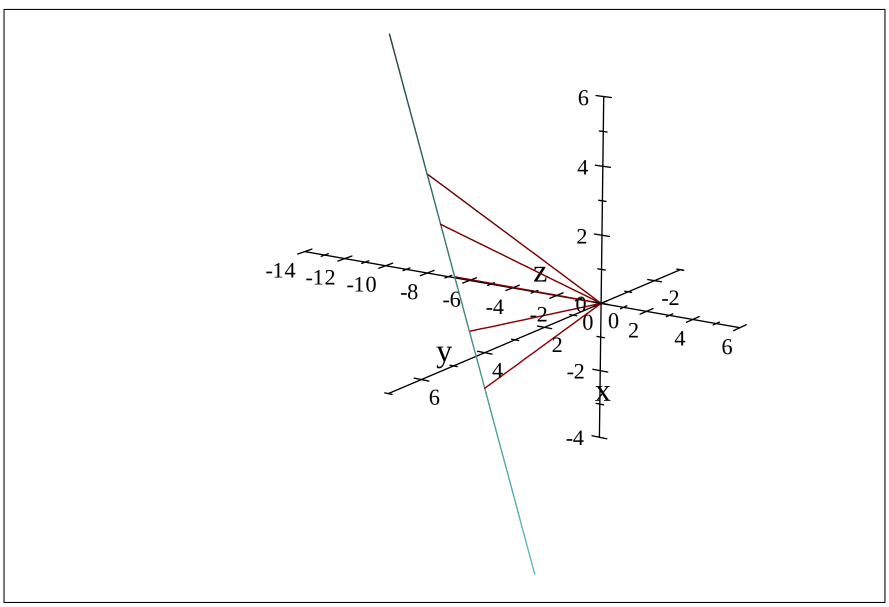
$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$$

Exemplo 39 *: Desenhar a curva:* $\overrightarrow{r}(t) = (t+2)\overrightarrow{i} + (2t-4)\overrightarrow{j} + (1-t)\overrightarrow{k}$

Para cada valor de t teremos um vetor que indicará um ponto da curva

$$\begin{bmatrix} t & | & \overrightarrow{r}(t) \\ 0 & | & 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\ -1 & | & \overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ 1 & | & 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \\ -2 & | & -8\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \\ 2 & | & 4\overrightarrow{i} - 1\overrightarrow{k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2t \\ -4t \\ t \end{bmatrix}$$



Assim como no caso da equações paramétricas necessitamos um grande número de vetores para traçarrmos a curva. Podemos ter uma idéia da curva passando a equação vetorial para equações paramétricas e daí para equações cartesianas. Deste modo podemos usar todo o nosso conhecimento anterior.

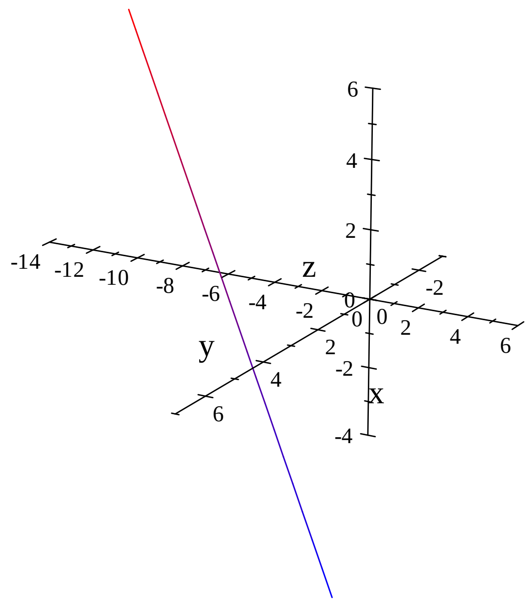
A equação vetorial é:

$$\overrightarrow{r}(t) = (t+2)\overrightarrow{i} + (2t-4)\overrightarrow{j} + (1-t)\overrightarrow{k}$$

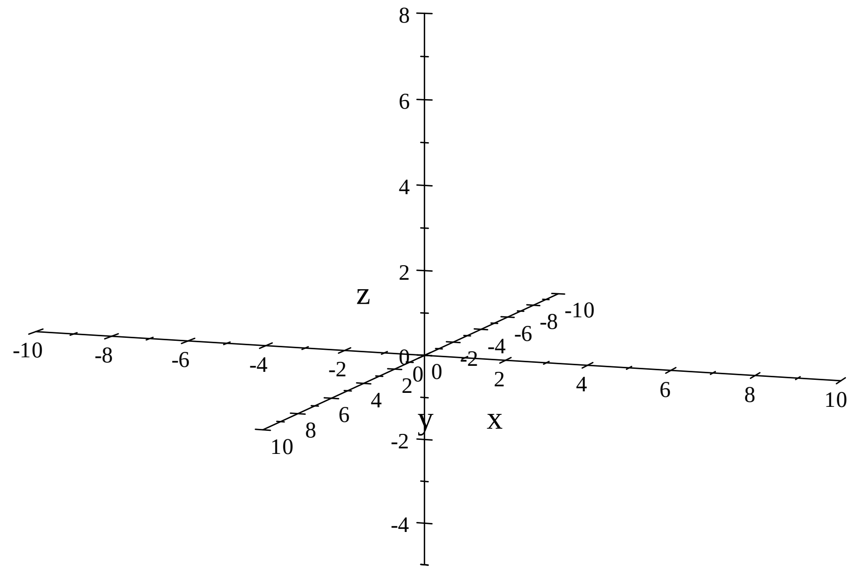
Note que da equação vetorial podemos ver que:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -4 + 2t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta que tem vetor diretor $\overrightarrow{v} = (1, 2-1)$ e passa pelo ponto $P(2, -4, 1)$



Exemplo 40 *: Desenhe a curva* $r(t) = \cos(t)\overrightarrow{i} + 2\sin(t)\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$



1.8 Segunda lista de exercícios

1) Escrever as equações paramétricas das seguintes curvas

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z = 2$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $y = 2x$

c) $x^2 + y^2 = 1$ e $y = z$

d) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y - z = 0$

2) Desenhar a curva $x = 4\cos t,\ y = 9\sin t,\ z = 1$

3) Desenhar a curva $x = t, y = 0, z = e^t$

4) Escrever a equação cartesiana da curva $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t + \sin t$

5) Construir a curva cujas equações vetoriais são dadas abaixo:

a) $\overrightarrow{r}(t) = (-2t - 3)\overrightarrow{i} + (2t - 4)\overrightarrow{j} + (4t - 7)\overrightarrow{k}$

b) $\overrightarrow{r}(t) = 2t\overrightarrow{i} + 4t^2\overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$

c) $\overrightarrow{r}(t) = \cos\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j} + \sin\theta\overrightarrow{k}$

d) $\overrightarrow{r}(t) = 4\sin^2\theta\overrightarrow{i} + 2\cos\theta\overrightarrow{j} + 2\sin\theta\overrightarrow{k}$

6) Fazer o desenho, no primeiro octante, da curva cujas equações paaramétrica são dadas por

$$\begin{cases} x = -24\sin^2 t + 6 \\ y = 6\cos t \\ z = 4\sin t \end{cases}$$

7) Determine a equação vetorial que representa a curva cuja intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$. Faça um esboço da curva.

8) Parametrize a curva de intersecção dessas superfícies:

a) $\begin{cases} 2x = -y^2 + z^2 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 9 - 2x^2 - 4z^2 \end{cases}$

9) Represente no 1^o octante a curva cuja equação vetorial é

a) $\overrightarrow{r}(t) = (t, t^2, \cos t)$

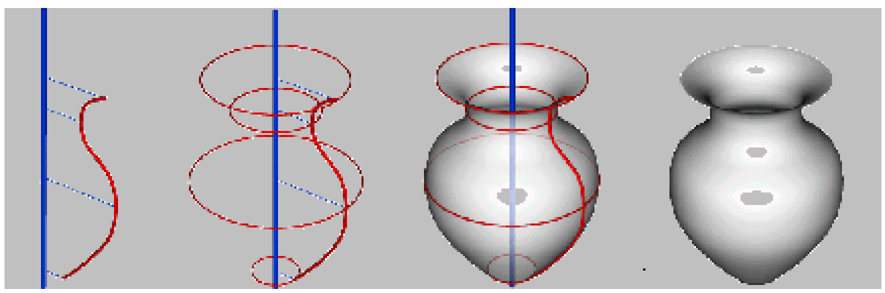
b) $\vec{r}(t) = (3 - 12\cos^2 t, 3\sin t, 2\cos t)$

1.9 Superfícies de revolução

1.9.1 Introdução

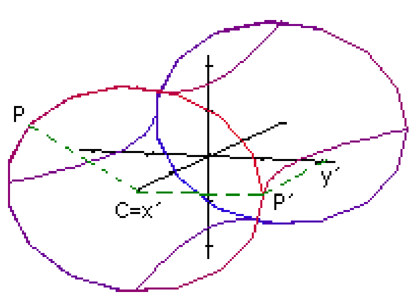
Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação de uma curva plana dada em torno de uma reta fixa no plano da referida curva. A curva plana que será rotacionada é denominada **geratriz** e a reta fixa é o eixo de revolução ou simplesmente eixo da superfície.

Na figura abaixo, a reta vertical é o eixo de revolução e a curva a direita da reta é a geratriz



1.9.2 Equação de uma Superficie de Revolução

Seja G a geratriz no plano xy e tendo equações $f(x, y) = 0$ e $z = 0$ e seja x o eixo de revolução da superfície. Vamos agora determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo x. Considere $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície de revolução e seja $P'(x', y')$ um ponto da curva geratriz G, ambos pertencentes a um mesmo plano $x = C$ (Note que o ponto $P(x, y, z)$ é gerado pela rotação do ponto $P'(x', y')$ em tono do eixo x).



Vemos que $\left|\overline{CP}\right| = \left|\overline{CP'}\right|$. Mas$\left|\overline{CP}\right|^2 = y^2 + z^2$ e portanto $\left|\overline{CP}\right| = \pm\sqrt{y^2+z^2}$. Como P' pertence a curva G temos $\left|\overline{CP'}\right| = y'$. Como P e P' se encontram no mesmo plano $x = C$ concluimos que $x = x'$. Logo,

$$\begin{aligned} y' &= \pm\sqrt{y^2+z^2} \\ x' &= x \end{aligned}$$

Da equação $f(x', y') = 0$ vem que $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$ é a equação da superfície de revolução.

Exemplo 41 *: Seja G a geratriz no plano xz tendo equações $f(x, z) = 0$ e $y = 0$ e seja z o eixo o eixo de revolução da superfície. Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo z.*

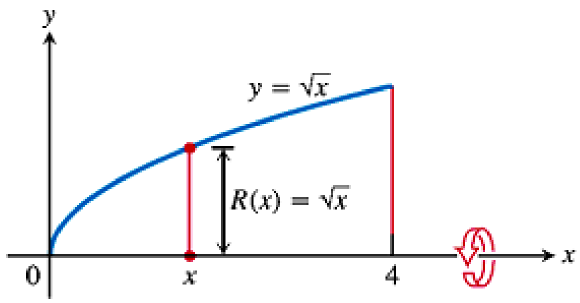
Observe que a curva está no plano xz e o eixo de revolução é o eixo z. Como vimos acima não devemos alterar a variável que define o eixo, portanto não alteramos a variável z, logo devemos substituir a variável x pela expressão $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Portanto a equação da superfície será $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)$.

Exemplo 42 *: Seja G a geratriz no plano yz tendo equações $f(y, z) = 0$ e $x = 0$ e seja y o eixo o eixo de revolução da superfície. Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo y.*

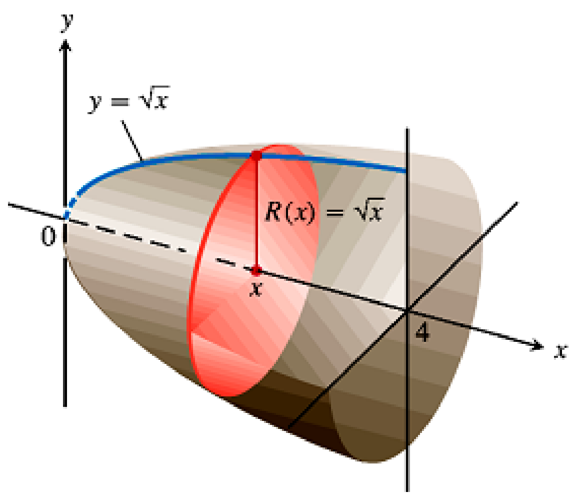
Exemplo 43 *: Determinar a equação da superfície de revolução determinada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo x e obter o desenho da superfície de revolução*

Como o eixo de revolução é o eixo x devemos substituir a variável y pela expressão $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ na equação da curva geratriz. Portanto a equação da superfície é:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ \pm\sqrt{y^2+z^2} &= \sqrt{x} \\ y^2+z^2 &= x \end{aligned}$$



(a)

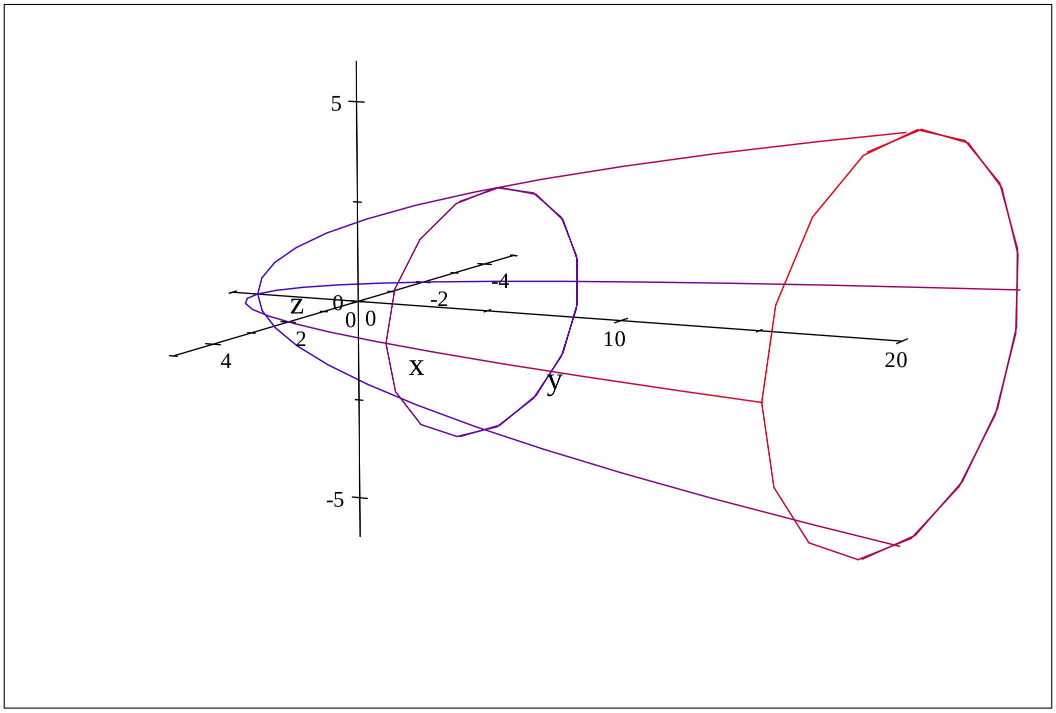


(b)

Exemplo 44 *: Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da parábola $y = x^2 - 4$ em torno do eixo y e fazer um desenho da superfície de revolução:*

Como o eixo de revolução é o eixo y devemos substituir a variável x pela expressão $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação da curva geratriz. Portanto a equação da superfície é:

$$
\begin{aligned}
y &= (\pm\sqrt{x^2+z^2})^2 - 4 \\
y &= x^2+z^2-4 \\
y+4 &= x^2+z^2
\end{aligned}
$$



Exemplo 45 *: Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $y = \sin x$ em torno do eixo x e fazer um desenho da superficie:*

Como o eixo de revolução é o eixo x devemos substituir y pela expressão $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ na equação da curva geratriz:

$$\pm\sqrt{y^2+z^2} = \sin x$$

De modo a "eliminar os sinais" elevamos ambos os membros da equação ao quadrado:

$$\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 = (\sin x)^2$$

Portanto a equação da superfície é

$$y^2+z^2 = \sin^2 x$$

Faça o desenho dessa superfície.

1.10 Terceira lista de exercícios

1) Encontre a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x e faça o desenho da superfície.

2) O segmento de reta que une a orígem ao ponto (a, b) rotaciona em torno do eixo y. Encontre a equação e faça um desenho desta superfície.

3) A superfície chamada "Toro" é obtida quando se rotaciona o circulo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo x. Encontre a equação deste "Toro" e faça um desenho desta superfície

4) Encontre a equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y^2 = 4ax$ em torno do eixo x. Faça um desenho desta superfície.

5) Faça um desenho das seguintes superfícies de revolução:

a) Curva $y = e^x$ em torno do eixo y.
b) Curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$ em torno do eixo x
c) Curva $y = \frac{2}{1+(x-2)^2}$ em torno do eixo x
d) Curva $y = 2 + \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x
e) Curva $y = e^{-x^2}, -1 \leq x \leq 1$, em torno do eixo x.
f) Curva $y = |x|$ em torno de $\overrightarrow{Ox}$
g) Curva $y = |x|$ em torno de $\overrightarrow{Oy}$
h) Curva $x = |y| + 1$ em torno de $\overrightarrow{Oy}$
i) Curva $y^2 + z^2 = 4$ em torno de $\overrightarrow{Oz}$
j) Curva $x = \frac{1}{y^2}$ em torno de $\overrightarrow{Ox}$

Algumas das superfícies acima obtidas são quádricas? Justifique.

6) Determinar o eixo de revolução e a curva geratriz de cada superfície de revolução cuja equação é dada por:

a) $x^2y^2 + x^2z^2 = 1$
b) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 0$
c) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$ (Faça um desenho dessa superfície)
d) $x^2 - 4y^2 + 8y + z^2 = 8$
e) $z = e^{-x^2-y^2}$

7) Faça um esboço da superfície de equação $x^2y + z^2y = 1$.

8) Obter a equação da superfície de revolução obtida pela rotação da curva

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = \cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases} \quad \text{em torno do eixo } x.$$

1.11 Quádricas

1.11.1 Introdução

Definição 46 *Uma **quádrica** ou **superfície quádrica** é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação* *do segundo grau, a no máximo, três variáveis:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

denominada ***equação cartesiana da superfície quádrica.***

Observação: Se o termo independente J da equação acima for nulo, a quadrática passa pela origem, pois o ponto $O(0, 0, 0)$ satisfaz tal equação.

1.11.2 Exemplos de quádricas

Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2^0 grau), cones (do 2^0 grau) constituem as mais coinhecidas superfícies quádricas.

Acrescem-se: pares de planos, pontos ou conjuntos vazios, que podem ser representados por uma equação de segundo grau em três variáveis no $\mathbb{R}^3$ e constituem as **quádricas degeneradas**.

Exemplos:
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$ (esfera)
b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ (elipsóide)
c) $xy + yz + xz - 2x + 2 = 0$ (hiperbolóide)
d) $x^2 + y^2 - z = 4$ (parabolóide)
e) $x^2 + 2y^2 - y + z - 3xy + xz - yz = 0$ (superfície cilíndrica)
f) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 2xz - 2yz = 0$ (superfície cônica)
g) $x^2 - 25 = 0$ (dois planos paralelos)
h) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + 10 = 0$ (um ponto - quádrica degenerada)
I) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 0$ (conjunto vazio)

Apesar de existirem infinitos tipos de quádricas existem dois grupos de quádricas muito importantes em aplicações e qualquer quádrica sempre poderá ser colocado num desses grupos mediante uma mudança de sistema de coordenadas. Veremos agora estes dois importantes conjuntos de quádricas:

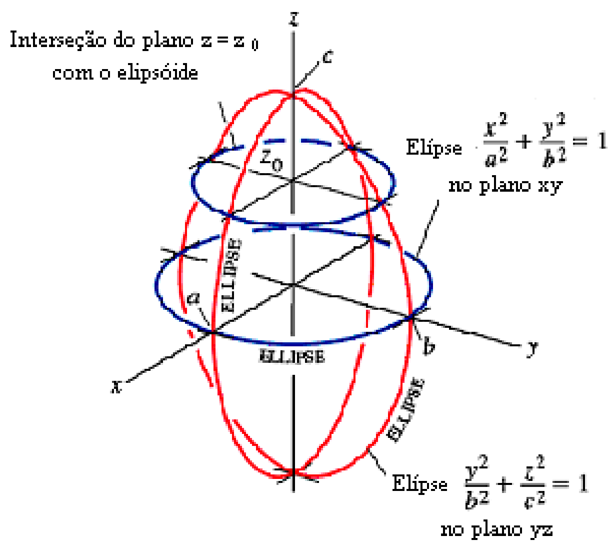
1.11.3 Classificação das quádricas cêntricas

Elipsóide Equação

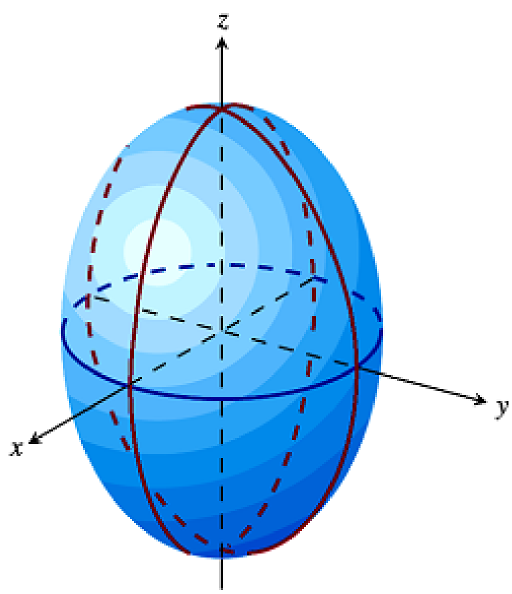
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Propriedades:
- Centrado na origem
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados:

$P_1(a, 0, 0), P_2(-a, 0, 0), P_3(0, b, 0), P_4(0, -b, 0), P_5(0, 0, c)$ e $P_6(0, 0, -c)$
- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: elipses
- Secções paralelas ao plano YZ: elipses
- As distâncias a, b, c são chamados de semi-eixos do elipsóide
- Se dois dos semi-eixos são iguais obtemos um elipsóide de revolução.
- Se todos os semi-eixos são iguais obtemos uma esfera.



Superfície



Exemplo 47 *:*

1) Elipsóide

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$$

2) Esfera de raio 2

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

Hiperbolóide de uma folha

Equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Propriedades

- Centrado na origem

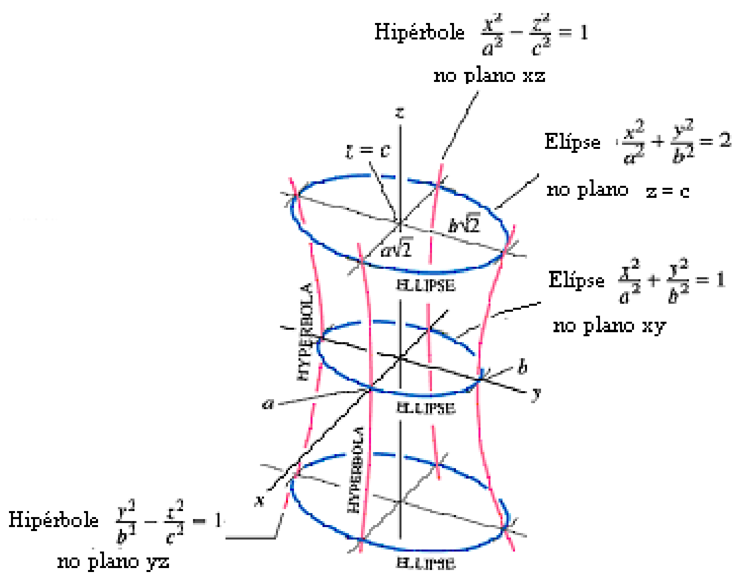
· Pontos de intersecção com os eixos coordenados: $P_1(a,0,0), P_2(-a,0,0), P_3(0,b,0), P_4(0,-b,0)$

· Secções paralelas ao plano XY: elipses

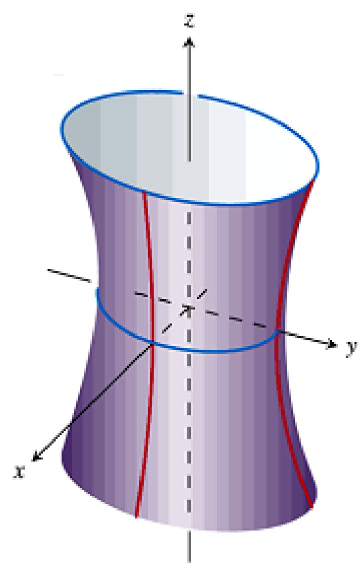
· Secções paralelas ao plano XZ: hipérboles

· Secções paralelas ao plano YZ: hipérboles

Se $a = b$ obtemos um hiperbolóide de revolução.



Superfície



Exemplo 48 *:*

1) Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = 1$$

2) Hiperbolóide de uma folha de revolução

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$$

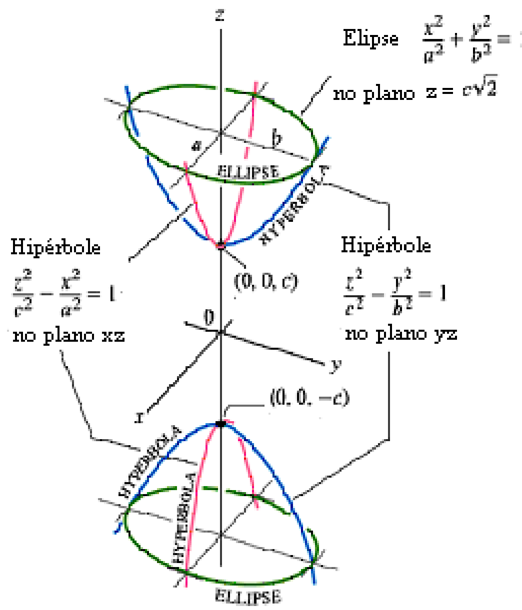
Hiperbolóide de duas folhas Equação:

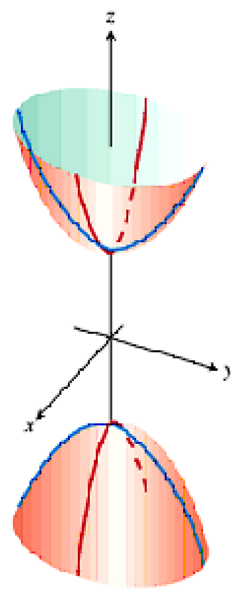
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Propriedades

- Centrado na origem
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados: $P_1(0,0,c)$, $P_2(0,0,-c)$
- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: hipérboles
- Secções paralelas ao plano YZ: hipérboles
- Se $a = b$ obtemos um hiperbolóide de duas folhas de revolução.

Superfície





1) Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{4^4} - y^2 + z^2 = 1$$

2) Hiperbolóide de duas folhas de revolução

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

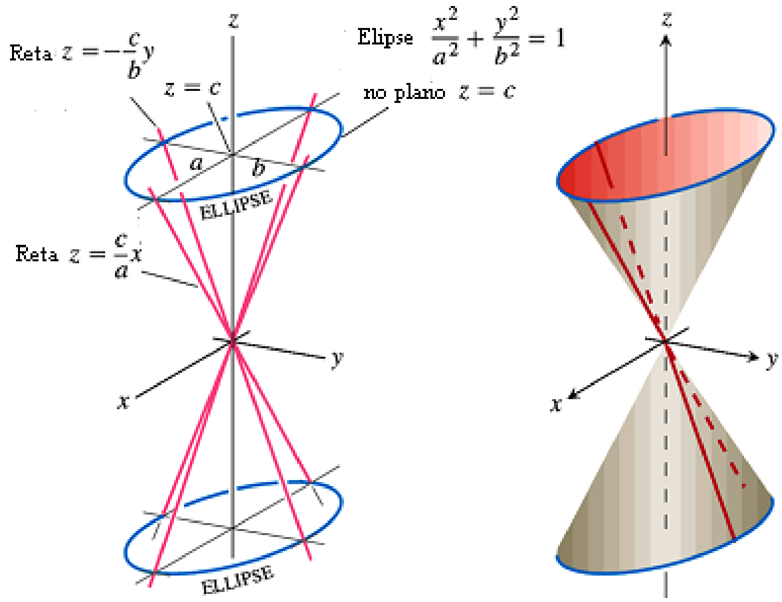
Cone elíptico

Equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Propriedades
- Pontos de intersecção com os eixos coordenabdos:$P_0(0,0,0)$
- Secções paralelas ao plano XY (Plano $z = 0$): Ponto $P_0(0,0,0)$, caso contrário elipses
- Secções paralelas ao plano XZ (Plano $y = 0$): duas retas concorrentes, caso contrário hipérboles
- Secções paralelas ao plano YZ (Plano $x = 0$): duas retas concorrentes, caso contrário hipérboles
- Se $a = b$ obtemos um cone de revolução.

Superfície



Cone Elíptico

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}-\frac{z^2}{4^2}=0$$

Cone circular ou cone de revolução

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{5^2}-\frac{z^2}{4^2}=0$$

1.11.4 Classificação das quádricas não cêntricas

Veremos agora as quádricas não cêntricas que possuem vértices na origem e eixos em cima dos eixos coordenados

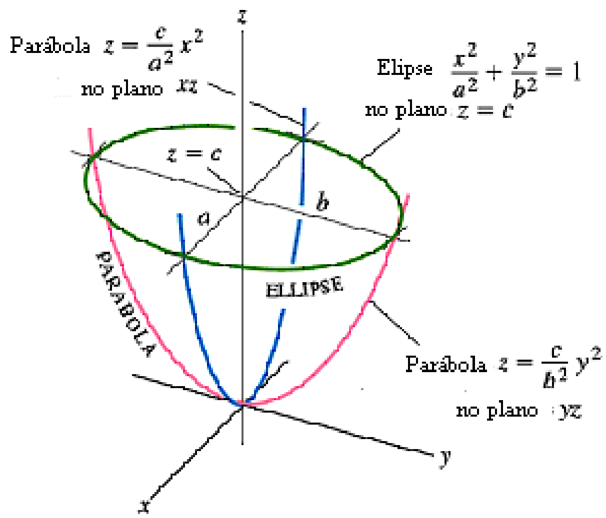
Parabolóide elíptico

Equação

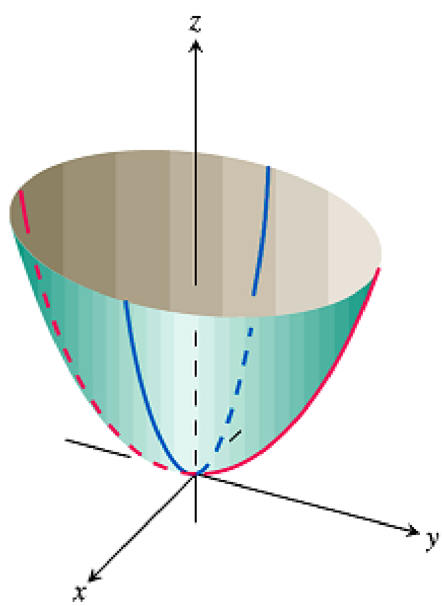
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Propriedades

- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: parábolas
- Secções paralelas ao plano YZ: parábolas
- O ponto $P_0(0,0,0)$ é chamado de vértice
- Se $a=b$ temos um paraboloide de revolução.



Superfície



Exemplo 49 : *Parabolóide elíptico*

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = z$$

Exemplo 50 *: Parabolóide de revolução*

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} = z$$

Parabolóide hiperbólico

Equação

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

que é a forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z.

As outras formas canônicas são:

$$\tfrac{z^2}{c^2} - \tfrac{x^2}{a^2} = by \qquad \tfrac{z^2}{c^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = ax$$

Propriedades

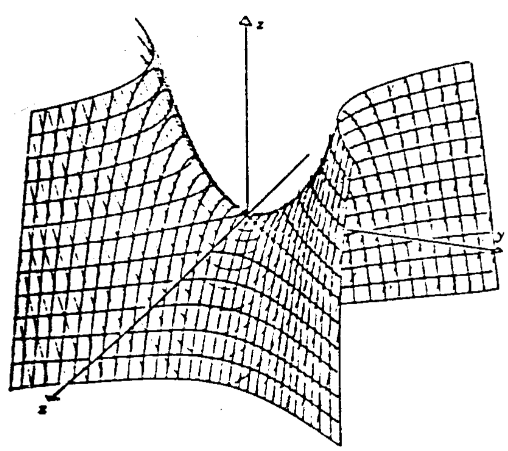
No caso da equação do tipo

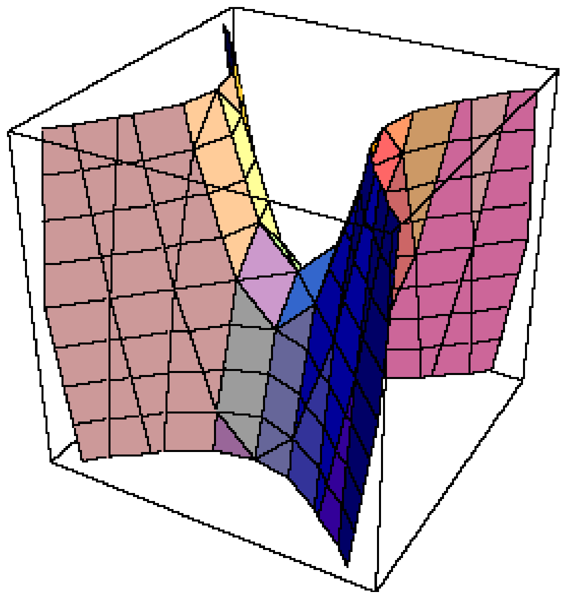
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

temos

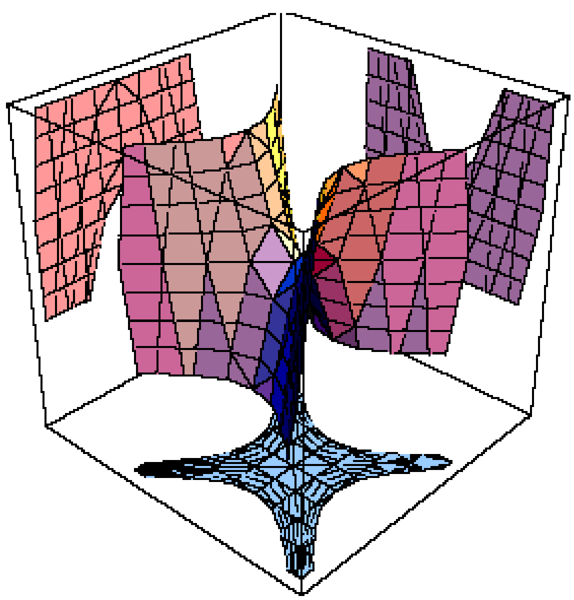
- Secções paralelas ao plano XY: duas linhas concorrentes na origem, caso contrário hipérboles
- Secções paralelas ao plano XZ: parábolas
- Secções paralelas ao plano YZ: parábolas
- O ponto $P_0(0,0,0)$ é chamado ponto de sela ou ponto de minimax da superfície
- As hipérboles acima de XY abrem-se na direção de y e abaixo de XY abrem-se na direção de x.

Superfície





Na figura a seguir vemos as projeções nos planos coordenados



1.12 Quarta lista de exercícios

1) Identificar as superfícies quádricas representadas pelas equações

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$	g) $4x^2 - y^2 = z$
b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$	h) $z^2 = x^2 + y^2$

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$
d) $z = y^2 + 1$
e) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$
f) $x^2 + z^2 + 4z = 0$
i) $z = x^2 + y^2$
j) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$
k) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$
l) $4x^2 + 9y^2 = 36z$

2) Identificar e construir o gráfico da quádrica representada pelas equações

a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$
b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$
c) $x^2 + y^2 - 9z = 0$
d) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$
e) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
f) $y^2 = x^2 + z^2$
g) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$
h) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$
i) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

3) Quais das seguintes superfícies de revolução são quádricas? Cite o nome da quádrica resultante.

a) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em torno do eixo y
b) Rotação da curva $y = x$ em torno do eixo x
c) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ em torno do eixo x
d) Rotação da curva $y = 1 + \cos x$ em torno do eixo x
e) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y}{9} = 1$ em torno do eixo x

4) Classifique as superfícies de equações $2x^2 - y^2 + z^2 = 7$ e $-2x^2 + 3y^2 + z^2 = -5$. A seguir, obtenha as equações dos cilindros projetantes da curva de intersecção destas superfícies e represente esta curva no 1^o octante.

5) Qual a equação do Elipsóide de revolução simétrico em relação ao eixo $\overrightarrow{oz}$, com vértices $V_1(0,0,4)$ e $V_2(0,0,-4)$ e que contém o ponto $P(1,1,2\sqrt{2})$? Faça um esboço da superfície obtida.

6) Abaixo representa-se a quádrica $z = -x^2 + \frac{y^2}{4}$. Pedem-se:

a) a equação vetorial da curva C_1
b) a equação vetorial da curva C_2
c) a equação vetorial da curva C_3

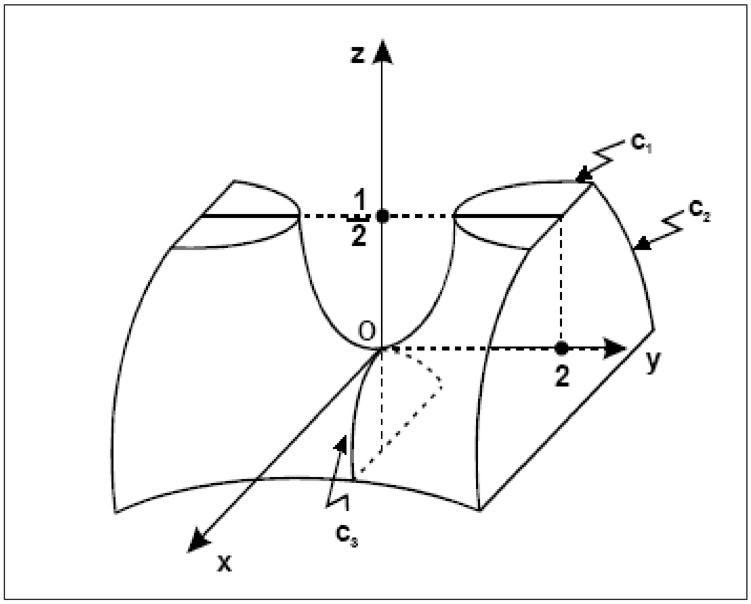
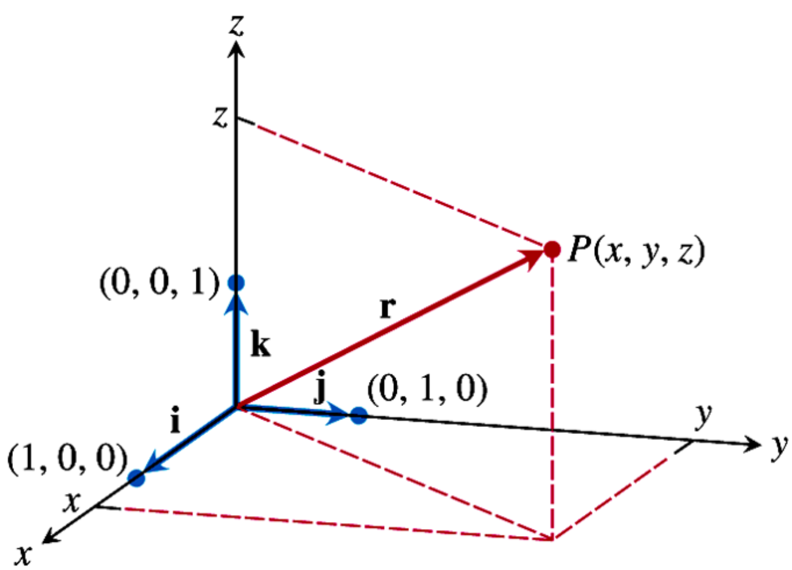


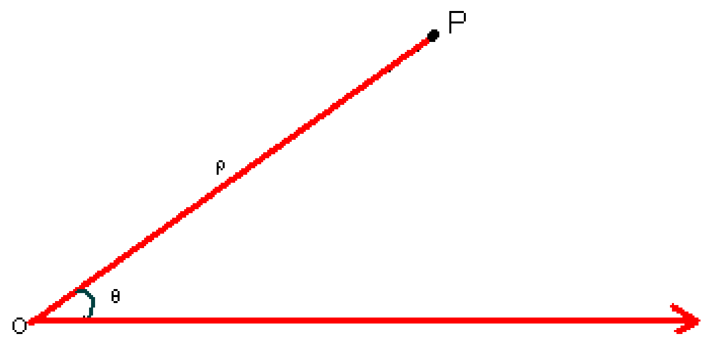
Figura exercício 6

1.13 Sistema de Coordenadas

1.13.1 Sistema de coordenadas cartesianas

No sistema de coordenadas cartesianas são usados três eixos de referência perpendiculares entre si, chamados eixos x, y e z.





Um ponto no sistema cartesiano será dado por $P(x, y, z)$ onde x será será a projeção ortogonal do ponto no eixo x, y a projeção ortogonal no eixo y e z a projeção ortogonal no eixo z.

1.13.2 Sistema de coordenadas polares

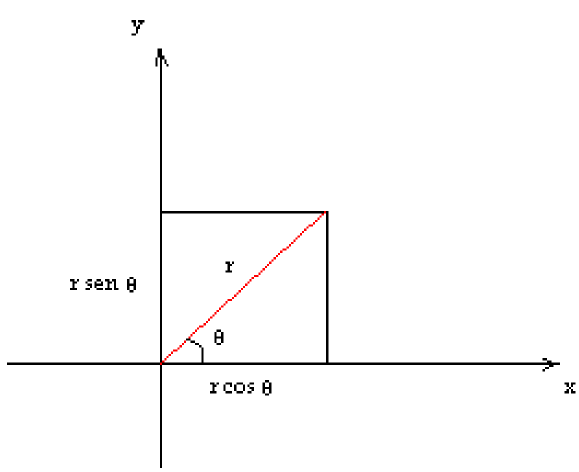
Coordenadas polares: O Sistema de coordenadas polares usa como referência uma segmento de reta chamado raio e denotado por r (usa-se denotar também por ρ) e um ângulo que o raio faz com uma semi-reta fixada a partir de um ponto chamado origem do sistema, denotado por O:

Um ponto no sistema de coordenadas polares será dado por $P(r, \theta)$ onde r é o comprimento do raio e θ é o ângulo que o raio θ faz com o semi-eixo horizontal.

Exemplo 51 *: Marque os pontos* $P(3, \frac{\pi}{3})$ *e* $P(1, \frac{\pi}{2})$

Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

Para obtermos a relação entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas fazemos a origem do dois sistemas coincidir e o semi-eixo horizontal das coordenadas polares coincidir como o eixo positivo dos x no sistema cartesiano



Usando triogonometria podemos observar que:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Portanto se temos um ponto em coordenadas polares usamos as relações acima para obter o mesmo ponto em coordenadas cartesianas:

Se tivermos um ponto em coordenadas cartesianas $P(x, y)$ obtemos o mesmo ponto em coordenadas polares através das relações:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Exemplo 52 *: Dado o ponto $P(3, \frac{\pi}{4})$ obter este ponto em coordenadas cartesianas:*

Usando as relações acima vemos que: $3 \sin \frac{\pi}{4} = 2.1213$

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos \frac{\pi}{4} = 2.1213 \\ y &= 3 \sin \frac{\pi}{4} = 2.1213 \end{aligned}$$

Portanto em coordenadas cartesianas temos o ponto $P(2.1213, 2.1213)$

Exemplo 53 *: Dado o ponto $P(4, 2)$ obter este ponto em coordenadas polares:*

Usando as relações acima vemos que: $r = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.4721$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.4721 \\ \theta &= \arctan(\frac{2}{4}) = 0.46365 \text{ rad} \end{aligned}$$

Portanto em coordenadas polares temos o ponto $P(4.4721, 0.46365)$.

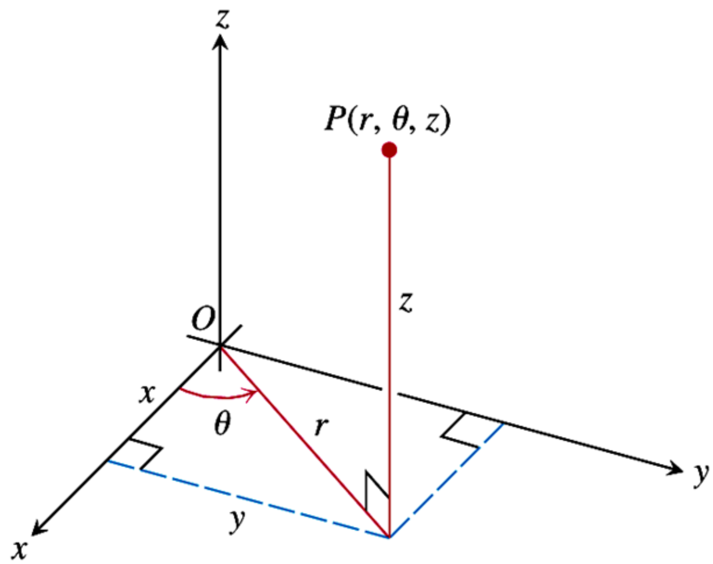
1.13.3 Sistema de coordenadas cilindricas

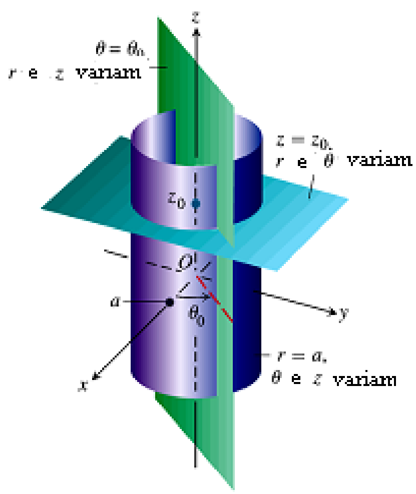
No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto P é representado por uma tripla (r, θ, z), onde (r, θ) representa um ponto em coordenadas polares e z é a terceira coordenada usual do sistema cartesiano. Para converter do sistema de coordenadas cilindricas para o sistema cartesiano usamos as relações:

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta \qquad z = z$$

Para passar do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cilindricas usamos as relações:

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$





1.13.4 Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas denotadas pela tripla ordenada (ρ, θ, ϕ)localizam um ponto P no espaço dando a distância ρ da origem, o ângulo θ projetdo sobre o plano xy (o ângulo polar) e o ângulo ϕ que o raio ρ faz com o eixo positivo z (o ângulo vertical).

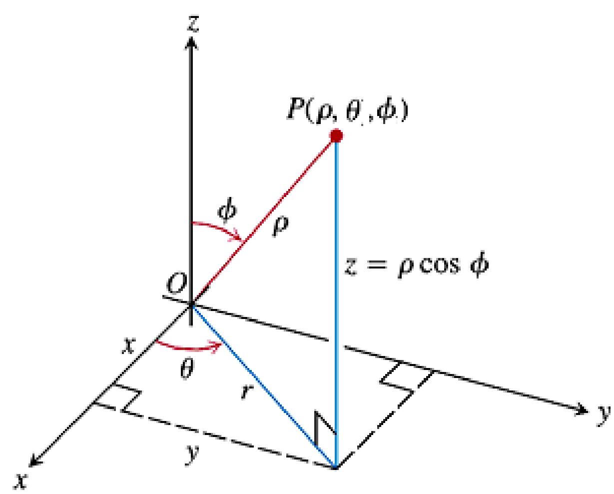
Para converter um ponto em coordenadas esféricas $P(\rho, \theta, \phi)$ para coordenadas cartesianas usamos as relações:

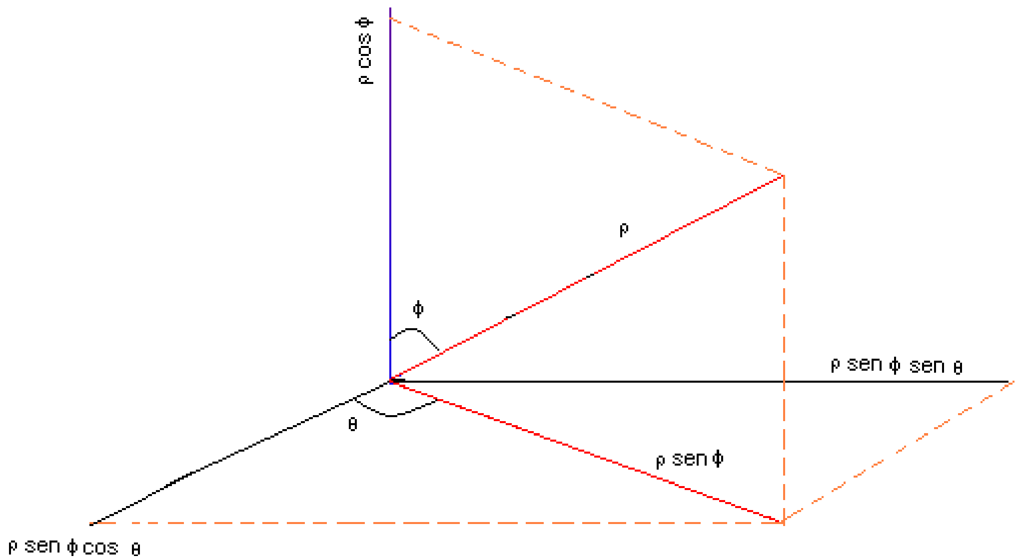
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \qquad y = \rho \sin \phi \sin \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Para converter um ponto $P(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas para coordenadas polares usamos as relações:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
\phi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)
\end{aligned}$$

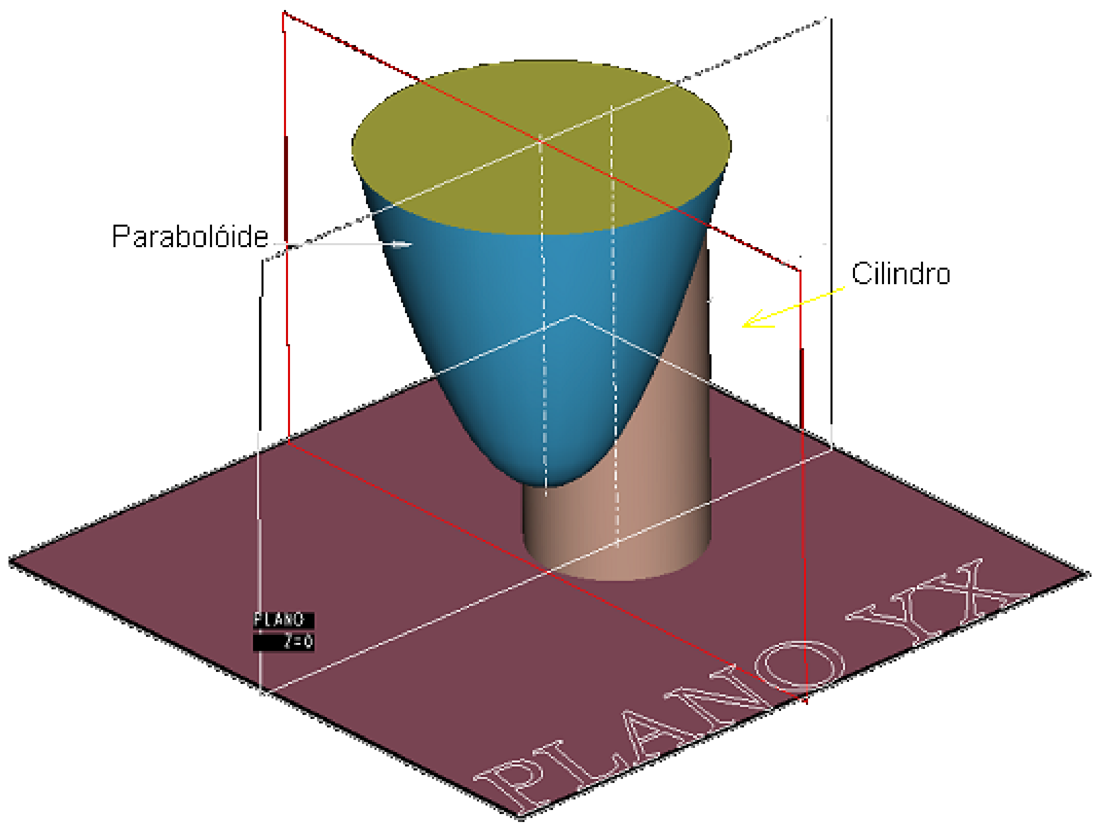
Geometricamente

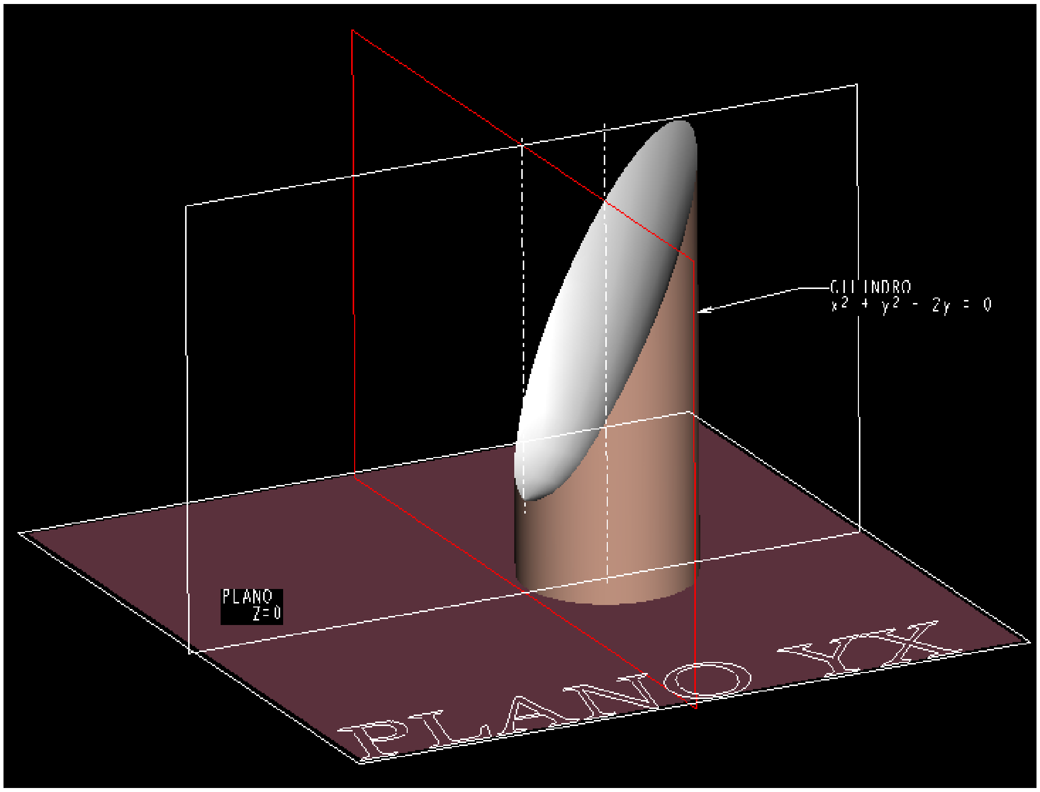


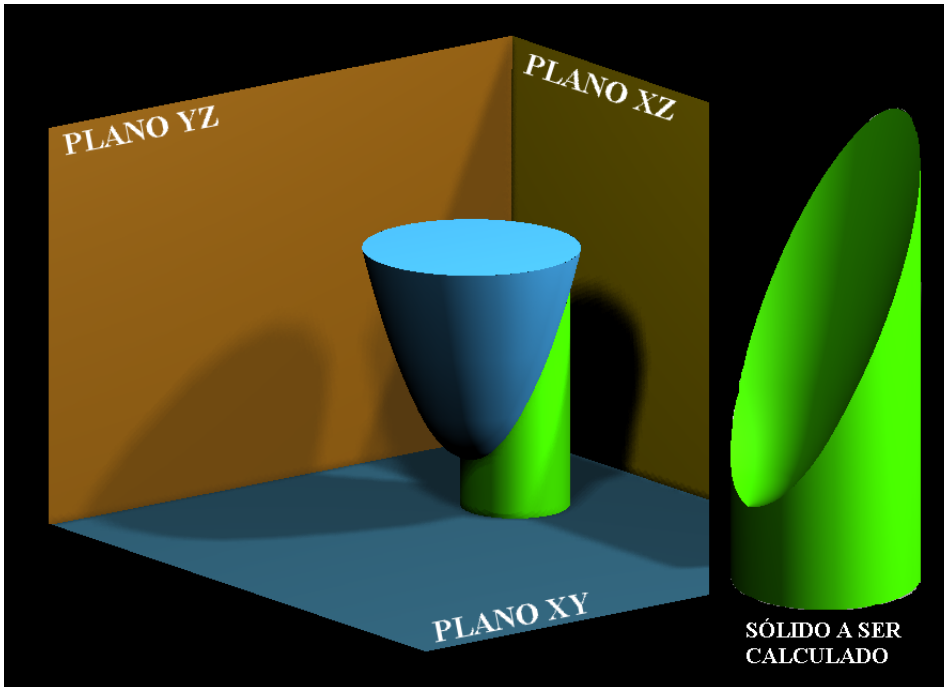


1.14 Construção de volumes

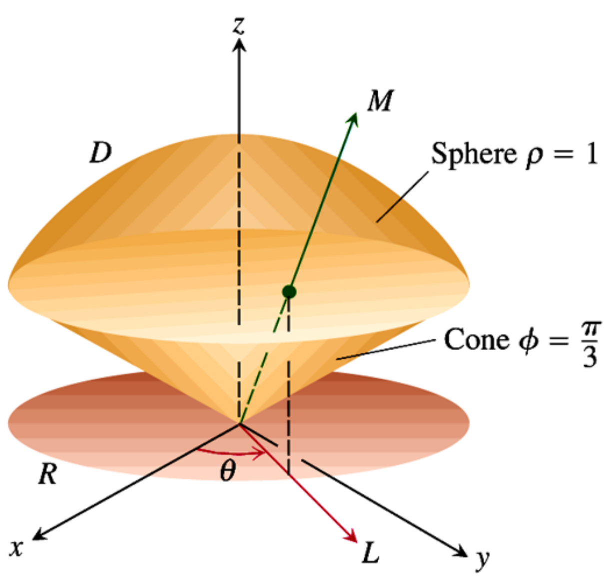
Exemplo 54 *Desenhar o volume do sólido delimitado superiormente pelo parabolóide* $y^2 + x^2 + 1 - z = 0$, *inferiormente pelo plano* $z = 0$ *, e lateralmente pelo cilindro* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.


Parabolóide
Cilindro
PLANO
Z=0
PLANO YX

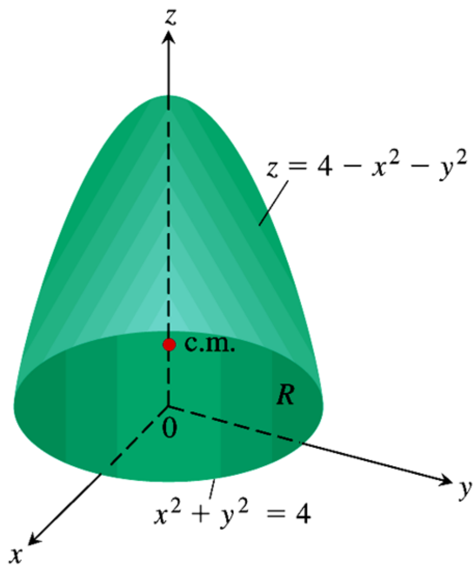

CILINDRO
$x^2 + y^2 - 2y = 0$
PLANO
Z=0
PLANO YX



Exemplo 55 : *Desenhar o volume do sólido delimitado inferiormente pelo cone $\phi = \frac{\pi}{3}$ e superiormente pela esfera $\rho = 1$.*



Exemplo 56 : *Desenhar o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $z + x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.*



1.15 Quinta lista de exercícios

1) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$z = y^2$, $x = 0$ $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ e $z = -2$

2) Construir o volume do sólido delimitado superiomente por $z = 4 - x - y$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e $z = 0$

3) Construir o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$

4) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$y = 0$, $y = 1 - x^2$ e $x^2 + z = 1$ e $z = 0$.

5) Construir o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x = 4 - y^2$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$

6) Construir o volume do sólido , no primeiro octante, delimitado por $y+x = 2$ e $z = x^2 + y^2$

7) Construir o volume do sólido delimitado superiormente por $z = 16 - x^2 - y^2$, lateralmente por $y^2 + x^2 = 2\sqrt{y^2 + x^2} + x$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.

8) Construir, no primeiro octante, o volume do sólido delimitado acima pelo cilindro $z = 4 - x^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente pelo plano $z = 0$

9) Construir o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

10) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$y^2 + x^2 + z = 12$ e $3x^2 + 5y^2 - z = 0$.

11) Construir o volume do sólido delimitado interno à esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ e externo ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

12) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 4 - x^2$ e $z = 3x^2 + y^2$.

13) Construa o volume da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4y$

14) Construir, no primeiro octante, o volume do sólido delimitado por $y = x^2$ e $x = y^2$

15) Construir o volume do sólido em comum delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

16) Construir o volume do sólido em comum delimitado pelas superfícies $\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$

17) Construir o volume do sólido delimitado por $z = 4x^2 + y^2$ e $z = 8 - 4x^2 - y^2$

18) Construir o volume interno a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e externo ao parabolóide $x^2 + y^2 = 3z$

19) Construir o volume acima do plano xy, limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$

20) Construir o volume de $x = y^2$, $z = x$, $z = 0$ e $x = 1$

21) Construir o volume que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$

22) Construir o volume delimitado por $z^2 + x^2 + y^2 = 4$, $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ e $z^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$ nos pontos em que $z > 0$.

23) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 9$.

24) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 0$ e $z = 5$ $(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16})^2 = \dfrac{2xy}{4}$.

26) Desenhar o volume do sólido obtido pela interseção das seguintes superfícies: $z = 3$, $\frac{z^2}{9} =$ e $z = 8 - y$

27) Contruir o volume do sólido delimitado lateralmente pela superfície de revolução obtida pela rotação da curva $z = y^3$ em torno do eixo z, superiormente pela superfície $9 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ e inferiormente pela superfície $z + 9 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$.

28) Construir o volume do sólido delimitado lateralmente pela superfície $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$, superiomrnete por $10 - z = \frac{x^2}{(\sqrt{2})} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})}$ e inferiormentepor $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

29) Construa o sólido delimitado superiormente por $z = 4 - r$ (com $r \geq 0$), lateralmente por $r = 2$ e inferiormente por $z = 0$.

30) Construa o sólido delimitado inferiormente por $\phi = \frac{\pi}{4}$ e superiormente por $\rho = 2\sec\phi$.

31) Construa o sólido delimitado inferiormente por $z = 0$, lateralmente por $r = 4$ e por $z = \sqrt{25 - r^2}$ e superiormente por $z = 4$.