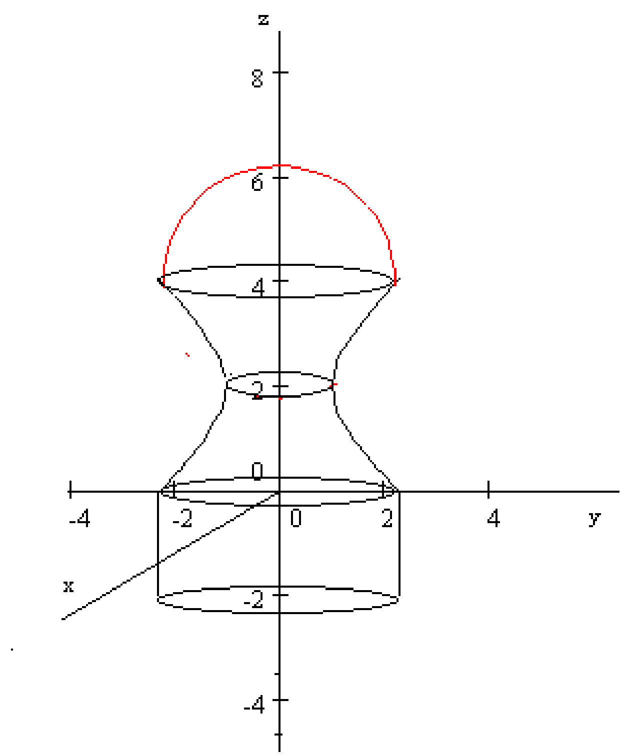
EXAME DE ÁLGEBRA II
Primeiro semestre de 2006 - 27/07/06

1) Construir o volume do sólido delimitado pelas seguintes superfícies: Lateralmente por $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$ para $0 \leq z \leq 4$; Lateralmente por $x^2+y^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ para $-2 \leq z \leq 0$; Superiormente por $x^2+y^2+(z-4)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$; Inferiormente por $z = -2$.



2) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine a solução do sistema $AX = X_1$ onde $AX_1 = B_1$

Solução: Determina-se a solução do sistema $AX_1 = B_1$ que é $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, substitui X_1 em $AX = X_1$ e determina-se X .

$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Outra maneira de fazer é substituir $X_1 = AX$ em $AX_1 =$

B_1, com isso temos os sistema $A^2X = B_1$. Resolvendo este sistema chegamos a mesma solução X.

3) Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de V formada por autovetores de $T : V \to V$, onde v_1, v_2, v_3 e v_4 são autovetores associados aos autovalores $5, 6, 7$ e 8 respectivamente. Seja $\beta = \{v_4, v_3, v_2, v_1\}$, determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$.

Solução:

$T(v_1) = 5v_1 = 0v_4 + 0v_3 + 0v_2 + 5v_1$

$T(v_2) = 6v_2 = 0v_4 + 0v_3 + 6v_2 + 0v_1$

$T(v_3) = 7v_3 = 0v_4 + 7v_3 + 0v_2 + 0v_1$

$T(v_4) = 8v_3 = 8v_4 + 0v_3 + 0v_2 + 0v_1$

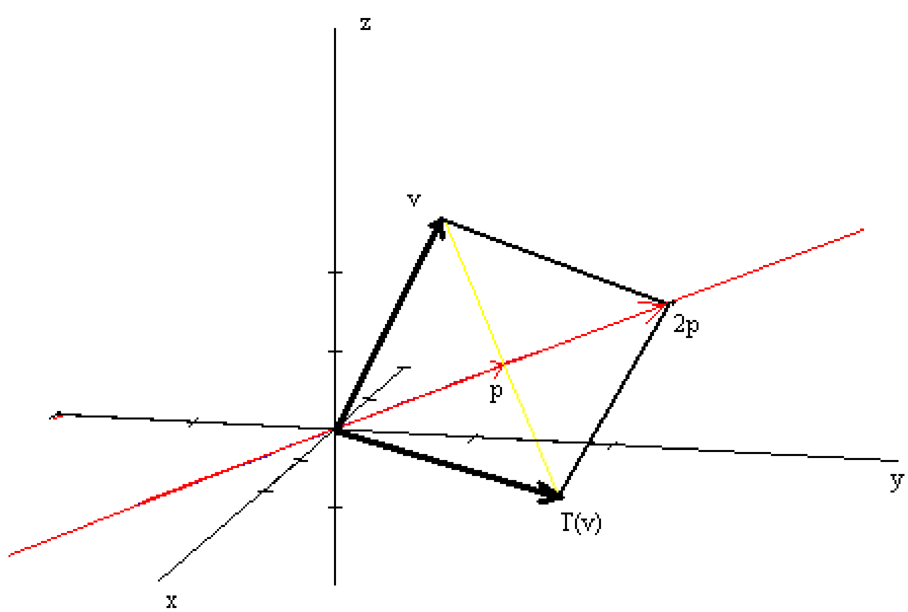
$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) 2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador que é a reflexão em torno da reta

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

Determinar $T(x, y, z)$.

Solução:



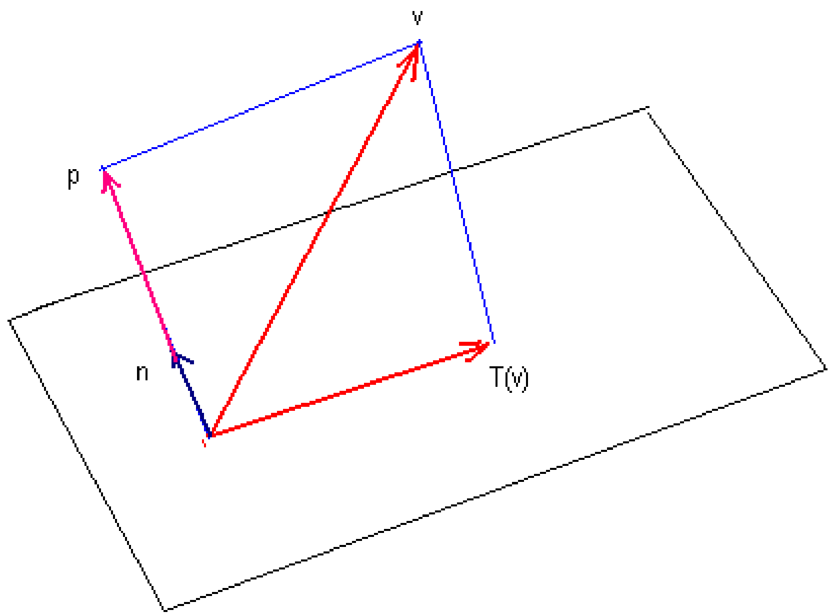


Figure 1:

a) Tomando $u = (1, 1, 1)$ como vetor diretor da reta temos que

$$\begin{aligned}
T(v) + v &= 2p \\
T(v) &= 2p - v \\
T(v) &= 2proj_u v - v \\
T(x, y, z) &= 2\left[\frac{(1, 1, 1).(x, y, z)}{(1, 1, 1).(1, 1, 1)}\right](1, 1, 1) - (x, y, z) \\
T(x, y, z) &= 2\left(\frac{x + y + z}{3}\right)(1, 1, 1) - (x, y, z) \\
T(x, y, z) &= \left(\frac{2x + 2y + 2z}{3}, \frac{2x + 2y + 2z}{3}, \frac{2x + 2y + 2z}{3}\right) - (x, y, z) \\
T(x, y, z) &= \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)
\end{aligned}$$

5) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ A transformação linear que a cada vetor v associa a projeção de v no plano $x + y + z = 0$. Encontre os autovalores e autovetores de T

Solução:

$$\begin{aligned}
T(v) + p &= v \\
T(v) &= v - p \\
T(v) &= v - proj_n v \\
T(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{(x,y,z).(a,b,c)}{(a,b,c).(a,b,c)}(a,b,c)
\end{aligned}$$

Como o vetor normal do plano é $n = (1,1,1)$ temos que $a = 1, b = 1, c = 1$.

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= (x,y,z) - \frac{(x,y,z).(1,1,1)}{(1,1,1).(1,1,1)}(1,1,1) \\
T(x,y,z) &= (x,y,z) - \left(\frac{x+y+z}{3}\right)(1,1,1) \\
T(x,y,z) &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)
\end{aligned}$$

$A = [T] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{bmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - \lambda^3 = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
y &= z \\
x &= z
\end{aligned}$$

Para $\lambda_1 = 0$ temos $v_1 = (x,x,x)$

$\lambda_2 = 1$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0$

$$z = -x - y$$

Para $\lambda_2 = 1$ temos $v_2 = (x, y, -x-y)$