GABARITO SEGUNDA PROVA DE ALGEBRA II

Primeiro semestre de 2006 - 20/05/2006

1) Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar.

Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 **horas** por semana, a bancada para tingir, 11 **horas** por semana, e a bancada para envernizar, 18 **horas** por semana. Quantos móveis devem ser fabricados (por semana) de cada tipo para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?

Solução

	fixar	*tingir*	*envernizar*
Cadeira	10 min	6 min	12 min
Mesinha	12 min	8 min	12 min
Mesa	15 min	12 min	18 min

	fixar	*tingir*	*envernizar*
Horas disponíveis	$16h$	$11h$	$18h$

	fixar	*tingir*	*envernizar*
Horas disponíveis	960 min	660 min	1080 min

x=Quantidade de Cadeiras
y=Quantidade de Mesinhas
z=Quantidade de Mesas

$$\begin{cases} 10x + 12y + 15z = 960 \\ 6x + 8y + 12z = 660 \\ 12x + 12y + 18z = 1080 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 12y + 15z = 960 \\ 3x + 4y + 6z = 330 \\ 2x + 2y + 3z = 180 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 180 \\ 3 & 4 & 6 & 330 \\ 10 & 12 & 15 & 960 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 180 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 60 \\ 0 & 0 & -3 & -60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 30 \\ y &= 30 \\ z &= 20 \end{aligned}$$

2) a) Encontre a condição sobre $a, b,\ c$, ou seja, uma relação entre a, b, c para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2y + 2z = b \\ -x - y + z = c \end{cases}$$

tenha solução. (1,5 pt)

b) Este sistema pode ter uma única solução? Justifique sua resposta. (0,5 pt)

Solução:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 & b \\ -1 & -1 & 1 & c \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & a - \frac{1}{2}b + c \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução devemos ter $a - \frac{1}{2}b + c = 0$ ou seja, $a = \frac{1}{2}b - c$

b) Não este sistema não pode ter única solução pois para isso acontecer deve-se ter ter necessariamente $p_a = p_c = 3$

No nosso caso $p_c = 2$, logo a única possibilidade de existir solução é com $p_a = 2$, mas neste caso $p = 2$. Ou seja ou o sitema tem infinitas soluções ou não tem solução.

3) Dados os seguintes subespaços vetoriais:

$W = \{(x, y, z, t)R^4 |\ x + y = 0$ e $z - t = 0\}$

$U = \{(x, y, z, t)R^4 |\ 2x + y - t = 0$ e $z = 0\}$

Determine:

a) o subespaço $W \cap U$ e exiba uma base

b) o subespaço $W + U$

c) uma base para $W + U$ e diga qual é a dimensão de $W + U$?

d) $W + U$ é soma direta? Justifique.

Solução:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ 2x + y - t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) $W \cap U = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$

b) $w \in W \Longrightarrow w = (x, -x, z, z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1) \Rightarrow W = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$

$u \in U \Rightarrow u = (x, y, 0, 2x + y) = x(1, 0, 0, 2) + y(0, 1, 0, 1) \Rightarrow U = [(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1)]$

Portanto

$$W + U = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1)]$$

c) Como o conjunto $\beta = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1)\}$ gera o subespaço $W + U$, devemos verificar se este conjunto é LI ou LD. De fato

$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \Longrightarrow$ Como o determinante é diferente de zero o conjunto é LI, portanto

$\beta = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,2),(0,1,0,1)\}$ é uma base de $W+U \Rightarrow$ $\dim(W+U) = 4$

d) $W+U$ é soma direta pois $W \cap U = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

4) Considere o subconjunto de M_2, dado por

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 \;/\; b = a \text{ e } d = -a \text{ e } c = 0 \right\}.$$

. Verifique se o subconjunto W é um subespaço vetorial de M_2.

Solução

$w \in W \Longrightarrow w = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$

i) $w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & a_2 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & a_1+a_2 \\ 0 & -a_1-a_2 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} a_1+a_2 & a_1+a_2 \\ 0 & -(a_1+a_2) \end{bmatrix}$

Logo $w_1 + w_2 \in W$

ii) $kw = k\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak & ak \\ 0 & -ak \end{bmatrix} \Rightarrow kw \in W$

Por i) e ii) W é subespaço de W

5) Sejam $\alpha = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0)\}$ e $\beta = \{(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Determine:

$$[I]^{\alpha}_{\beta}$$

.solução

$(1,1,-1) = a_1(2,1,-1) + b_1(-1,0,1) + c_1(0,0,1)$

$(2,-1,0) = a_2(2,1,-1) + b_2(-1,0,1) + c_2(0,0,1)$

$(3,2,0) = a_3(2,1,-1) + b_3(-1,0,1) + c_3(0,0,1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$