TERCEIRA PROVA DE ÁLGEBRA II
Primeiro Semestre de 2006 - 24/06/06

1) Verifique quais das transformações abaixo são transformações lineares

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada p or $F(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por $G(x) = (0, 0, 0)$.

Solução:

a) $F(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = x - y + 2z$

$F(x, y, z) = x - y + 2z$

$u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + 2z_1 + 2z_2 \\ &= x_1 - y_1 + 2z_1 + x_2 - y_2 + 2z_2 \\ &= F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2) \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(ku) &= F(k(x_1, y_1, z_1)) \\ &= F(kx_1, ky_1, kz_1) \\ &= kx_1 - ky_1 + 2kz_1 \\ &= k(x_1 - y_1 + 2z_1) \\ &= kF(u) \end{aligned}$$

Logo F é uma transformação linear

b) $G(x + y) = (0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = G(x) + G(y)$

$G(kx) = (0, 0, 0) = k(0, 0, 0) = kG(x)$

Logo G é uma transfroamção Linear

2) Considere a base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Seja $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz da tranformação T associada à base canônica de $\mathbb{R}^2$,ou seja , $[T]$.

Solução:

$$\begin{aligned}
T(1,1) &= 1(1,1)+0(1,-1)=(1,1)\\
T(1,-1) &= 0(1,1)+5(1,-1)=(5,-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,y) &= a(1,1)+b(1,-1)\\
(x,y) &= (\frac{x+y}{2})(1,1)+(\frac{x-y}{2})(1,-1)\\
T(x,y) &= (\frac{x+y}{2})T(1,1)+(\frac{x-y}{2})T(1,-1)\\
T(x,y) &= (\frac{x+y}{2})(1,1)+(\frac{x-y}{2})(5,-5)\\
T(x,y) &= (3x-2y,-2x+3y)
\end{aligned}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} 3 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}.$$

3) Encontre a transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,2)=(3,-1,5)$ e $T(0,1)=(2,1,-1)$.

Solução

$$\begin{aligned}
(x,y) &= a(1,2)+b(0,1)\\
T(x,y) &= xT(1,2)+(y-2x)T(0,1)\\
T(x,y) &= x(3,-1,5)+(y-2x)(2,1,-1)\\
T(x,y) &= (-x+2y,-3x+y,7x-y)
\end{aligned}$$

4) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x,y,z)=(3x,x-y,2x+y+z)$

a) Determine uma base para o Ker(T)

b) Determine uma base para Im(T)

Solução:

a)

$$T(x,y,z)=(3x,x-y,2x+y+z)=(0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{c} 3x=0\\ x-y=0\\ 2x+y+z=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}\right.$$

$$Ker(T)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Portanto $Ker(T)$ não possui base, ou seja, $\beta=\varnothing$ é a base de $Ker(T)$

b) Se $w \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow w = T(x,y,z) \Rightarrow w = (3x, x-y, 2x+y+z)$

$$\begin{aligned} w &= (3x, x-y, 2x+y+z) \\ w &= x(3,1,2) + y(0,-1,1) + z(0,0,1) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}(T) = [(3,1,2),(0,-1,1,(0,0,1)]$$

Como o conjunto $\beta = \{(3,1,2),(0,-1,1,(0,0,1)\}$ é um conjunto LI e gera a imagem de T, temos que

$$\beta = \{(3,1,2),(0,-1,1,(0,0,1)\}$$

é uma base para $\mathrm{Im}(T)$

5) Seja $T : M_2 \to M_2$ a transformação linear dada por $T(X) = AX + X$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Seja $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Determine a matriz $[T]_\beta^\alpha$..

Solução

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$