Capítulo 3

ESPAÇOS VETORIAIS

3.1 Introdução

Produto de dez anos de intensa pesquisa e desenvolvimento, o primeiro ônibus espacial dos EUA (lançado em 1981) foi uma vitória da engenharia de controle de sistemas, envolvendo muitas áreas da engenharia - aeronáutica, química , elétrica, hidráulica e mecânica. Os sistemas de controle de ônibus espacial são absolutamente críticos para vôo. Ele requer um constante monitoramento por computador durante o vôo atmosférico. O sistema de vôo envia uma sequência de comandos para a superfície de controle aerodinâmico. Matematicamente , os sinais de entrada e saída de um sistema de Engenharia são funções. É importante para as aplicações que essas funções possam ser somadas e multiplicadas por escalares. Essas duas operações em funções tem propriedades algébricas que são completamente análogas às operações de soma de vetor e multiplicação de vetor por escalar no $\mathbb{R}^n$. Por esse motivo, o conjunto de todas as entradas possíveis (funções) é chamada de um **espaço vetorial**. A fundamentação matemática para a engenharia de sistemas repousa sobre espaços vetoriais de funções, portanto precisamos estender a teoria de vetores do $\mathbb{R}^n$ de modo a incluir tais funções.

Antes de apresentarmos a sua definição, analisaremos em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $F(\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$.

A soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R})$ é definida como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Note também que se $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar o escalar α pela função f , da seguinte forma:

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

resultando num elemento de $F(\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$ podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{nxn}$$

que é um elemento de M_n.

Com relação à multiplicação do escalar α pela matriz $A \in \mathbb{R}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{nxn}$$

o qual também $\in M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois exemplos acima, com a adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm em comum?

Verfica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $F(\mathbb{R})$ e para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + h$
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$
3. Se g representa a função nula então $f + g = f$
4. $f + (-f) = 0$
5. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$
6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
7. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
8. $1f = f$

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B, e C em M_n e para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Se 0 representa a matriz nula então $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $1A = A$

Observamos que o conjunto das funções bem como o das matrizes, quando munidos de soma e multiplicação por escalar, apresentam propriedades algébricas comuns. Existem muitos outros exemplos de conjuntos que apresentam as mesmas propriedades acima. Para não estudarmos separadamente cada conjunto, estudaremos um conjunto genérico e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas as operações de adição e multiplicação por escalar.

Definição 88 *Um espaço vetorial V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores, u e $v \in V$ faz corresponder um novo vetor denotado por $u + v \in V$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor denotado por αv, chamado produto de α por v. Estas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v e $w \in V$ as seguintes propriedades:*

1. Comutatividade: $u + v = v + u$
2. Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Vetor nulo: existe um vetor nulo $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$
4. Inverso aditivo: Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $-v + v = 0$
5. Distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
6. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Multiplicação por 1: $1.u = u$

Exemplo 89 *Para todo número natural n, o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas (chamadas n-uplas) $u = (x_1,x_2,x_{3,.......,}x_n), v = (y_1, y_2,y_3, ...y_n)$ de números reais. Por definição a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas*

$$x_1 = y_{1,}x_2 = y_2, ...x_n = y_n.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_{2,}....x_n + y_n)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_{1,}\alpha x_2, ...\alpha x_n)$$

Verifica-se sem dificuldades, que estas definições fazem do $\mathbb{R}^n$ um E. V. (verifique).

Exemplo 90 *O conjunto dos polinômios em* x, *de grau menor ou igual a* n *é definido por :*

$$P_n = \left\{p(x) = a_o + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ \diagup \ a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

com as operações de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial. Note que cada elemento de P_n *é uma função* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplo 91 *O conjunto das matrizes definido por*

$$M(m, n) = \{A_{m\times n} = \{a_{ij}\} \ \diagup \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i = 1, .., m \ e \ j = 1, .., n\}$$

com a soma usual de matrizes e multiplicação usual de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial.

No caso particular das matrizes quadradas de ordem n denotaremos $M(n, n)$ por M_n.

Exemplo 92 *Seja o conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ \diagup \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *com as operações assim definidas*:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ com estas operações não é um espaço vetorial, de fato:
Vamos mostrar que falha a propriedade 5) do E.V.

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta)x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta u &= = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1) \\ &\Rightarrow \ (\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u \end{aligned}$$

3.2 Subespaços

Definição 93 *Seja* V *um espaço vetorial. Dizemos que* $W \subset V$ *é um subespaço vetorial de* V *se forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. se u , $v \in W$ então $u + v \in W$
2. se $u \in W$ então $\alpha u \in W$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Podemos fazer três observações:

- as condições da definição garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afirmar que W é ele próprio um E.V.

- Qualquer subespaço W de V precisa conter o vetor nulo.

- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o conjunto formado pelo vetor nulo e o próprio E.V.

Exemplo 94 *Seja* $V = \mathbb{R}^5$ *e* $W = \{0, x_{2,} x_3, x_4, x_5)$, W *é um subespaço vetorial?*

Resolução:
verificamos as condições de subespaço: seja $u = (0, x_{2,} x_3, x_4, x_5) \in W$ e $v = (0, y_{2,} y_3, y_4, y_5) \in W$

1. $u + v = (0, x_2 + y_{2,} x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in W$
2. $\alpha u = \alpha(0, x_{2,} x_3, x_4, x_5) = (0, \alpha x_{2,} \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5) \in W$

logo W é um subespaço vetorial.

Exemplo 95 *Seja* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y + z = 0\}$, S *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$?

Resolução:
Dados $u = (x_1, y_1, z_1) \in S$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in S$

1. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Como $u = (x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Analogamente $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, e podemos concluir que $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \Rightarrow u + v \in S$

2. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ para todo $\alpha \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha 0 = 0$ e dai $\alpha u \in S$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 96 $V = M_n$ *e* W *é o subconjunto das matrizes triangulares superiores.* W *é subespaço de* V*, pois a soma das matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar (Verifique).*

Exemplo 97 *Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Por exemplo:*

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Observe que, se colocarmos este sistema na forma matricial , temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Desta forma, estamos procurando, dentro do E.V. $M(3,1)$ *das matrizes colunas de 3 linhas, aqueles vetores que satisfazem a relação (3.2) isto é, aqueles vetores solução do sistema. Queremos saber se o comjunto dos vetores solução é subespaço de* $M(3,1)$. *Para isto, teremos que tomar dois vetores-solução:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e verificar se sua soma ainda é um vetor-solução. Então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

logo a soma é uma solução. Além disso, se multiplicarmos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

por uma constante α,teremos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\alpha \left[\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right] = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

portanto, o conjunto W dos vetores-solução é subespaço vetorial de $M(3,1)$.

Exemplo 98 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R})$. *Se escolhermos* $u = (1,1)$ *e* $v = (2,4) \in W$, *temos:* $u + v = (3,5) \notin W$, *portanto* W *não é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 99 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\} W$ *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*, pois temos:*

1. Para $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2y_2) \in W$ tem-se $u + v = (x_1 + x_2, 2(y_1 + y_2)) \in W$, pois a segunda componente de $u+v$ é igual ao dobro da primeira.

2. $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W$, pois a segunda componente de αu é igual ao dobro da primeira.

3.3 Intersecção de dois Subespaços Vetorias

Definição 100 *Dados* W_1 *e* W_2 *subespaços de um espaço vetorial* V*, a intersecção* $W_1 \cap W_2$ *ainda é um subespaço de* V*.*

Exemplo 101 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; y = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; x = 0)$. $W_1 \cap W_2$ *é a reta de intersecção dos planos* W_1 *e* W_2*, ou seja* $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; x = 0 \text{ e } y = 0)$

Exemplo 102 $V = \mathbb{R}^3$. *Seja* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; x + y + z = 0)$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; x + y - z = 0)$.

Para encontrarmos a interseção do dois subespaços devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $z = 0$, $y = -x$. Portanto $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \;\; z = 0 \text{ e } y = -x)$

Exemplo 103 $V = P_4$. *Seja* $W_1 = \{p \in P_3 \;\; / \;\; p'(1) = 0\}$ *e* $W_2 = \{p \in P_3 \;\; / \;\; p''(1) = 0\}$

Como $p \in P_4$ então $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Se $p \in W_1$ então $p'(1) = 0 \Rightarrow b + 2c + 3d = 0$. Se $p \in W_2$ então $p''(1) = 0 \Rightarrow 2c + 6d = 0$. Para que p pertença a $W_1 \cap W_2$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} b + 2c + 3d = 0 \\ 2c + 6d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= -3d \\ b &= 3d \end{aligned}$$

Portanto $W_1 \cap W_2 = \{p \in P_3 \;\; / \;\; p = a + 3dx - 3dx^2 + dx^3\}$

Exemplo 104 $V = M(n, n), W_1 = \{$*matrizes triangulares superiores*$\}$*;* $W_2 = \{$*matrizes triangulares inferiores*$\}$*. Então* $W_1 \cap W_2 = \{$*matrizes diagonais*$\}$*.*

Exemplo 105 *Seja* $V = M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e*

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$W = W_1 \cap W_2$ *é um subespaço de* V*, pois*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 106 *Sejam* W_1 *e* W_2 *dados por:*

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$$

e

$$W_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$$

será que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V?
Solução :

Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$,

$u = (1, 1) \in W_2$
$v = (1, -1) \in W_1$
mas $u + v = (1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin W_1 \cup W_2$ (represente graficamente esta soma de vetores)

3.4 Combinação Linear

Definição 107 *Seja* V *um espaço vetorial real,* $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in V$ *e* $a_1, a_{2,\ldots\ldots\ldots} a_n \in \mathbb{R}$*. Então, o vetor*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots.. + a_n v_n$$

é um elemento de V *ao que chamamos de combinação linear de* $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$*.*

Exemplo 108 *Em* $\mathbb{R}^2$ *os vetor* $v = (10, 16)$ *é uma combinação linear dos vetores*

$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (3, 4)$ pois $v = 4v_1 + 2v_2$.

Exemplo 109 *Verifique se o vetor* $v = (3, 2, 1)$ *pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores* $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, -1)$.

Devemos verificar se existem números a, b, c tais que $v = av_1+bv_2+cv_3$, ou seja,

$$(3,2,1) = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1).$$

devemos então resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas esse sistema tem uma única solução $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, portanto v pode realmente ser escrito como combinação de v_1, v_2 e v_3, da forma $v = \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$.

Exemplo 110 *No espaço vetorial P_2 o polinômio $p = 7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios: $q_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $q_2 = -2x^2 + 5x - 8$, de fato $p = 3q_1 + 4q_2$ (confira).*

Exemplo 111 *Verique que em P_2 o polinômio $p(x) = 1+x^2$ é uma combinação dos polinômios $q(x) = 1$, $r(x) = 1 + x$ e $s(x) = 1 + x + x^2$.*

Resolução:

Precisamos encontrar números reais, a_1, a_2 e a_3 tais que:

$$p(x) = a_1q(x) + a_2r(x) + a_3s(x)$$

Ou seja, precisamos encontrar a_1, a_2 e a_3 satisfazendo:

$$1 + x^2 = a_1 + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2)$$

que é equivalente ao sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ \quad a_2 + a_3 = 0 \\ \qquad a_3 = 1 \end{array} \right. \quad :\Leftrightarrow a_1 = 1; a_2 = -1 \text{ e } a_3 = 1.$$

Exemplo 112 *Consideremos , no $\mathbb{R}^3$, os seguintes vetores: $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$. Escreva o vetor $v = (-4,-18,7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.*

Resolução:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2$$

$(-4,-18,7) = a_1(1,-3,2)+a_2(2,4,-1) = (1a_1,-3a_1,2a_1)+(2a_2,4a_2,-1a_2) =$
$= (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$ que é equivalente ao sistema:

$$\left\{ \begin{array}{r} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow a_1 = 2, \; a_2 = -3.$$

Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$. Agora mostre que o vetor $v = (4,3,-6)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$.

3.5 Dependência e Independência Linear

Definição 113 *Sejam* V *um espaço vetorial e* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. *Dizemos que o conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é **linearmente independente (LI),** se a equação:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

implica que

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

No caso, em que exista algum $a_i \neq 0$ *dizemos que* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é **linearmente dependente (LD)**.*

Para determinarmos se um conjunto é L.I. ou L.D. devemos fazer a combinção linear do conjunto de vetores e igualar esta combinção linear ao vetor nulo do espaço. Portanto é muito importante ter conhecimento do vetor nulo do espaço em qua estamos trabalhando.

Definição 114 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *e os conjunto de vetores:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(1,2,3), (1,1,1), (1,0,0)\} \\ \beta &= \{(1,2,3), (1,1,1), (3,5,7)\} \end{aligned}$$

Os conjuntos α e β acima são L.I ou L.D.

Solução:

Fazendo a combinação linear

$$a(1,2,3) + b(1,1,1) + c(1,0,0) = (0,0,0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a+b+c & = & 0 \\ 2a+b & = & 0 \\ 3a+b & = & 0 \end{bmatrix} \right.$$

cuja única solução é $a = b = c = 0$. Portanto o conjunto α é L.I

Fazendo a combinação linear

$$a(1,2,3) + b(1,1,1) + c(3,5,7) = (0,0,0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a+b+3c & = & 0 \\ 2a+b+5c & = & 0 \\ 3a+b+7c & = & 0 \end{bmatrix} \right.$$

que possui infinitas soluções (grau de liberdade 1). Portanto além da solução nula (que todo sistema homogêneo tem) este sistemas possui outras soluçãoes diferentes da solução nula, logo o conjunto β é L.D.

Teorema 115 *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é LD se, e somente se um dos vetores do conjunto for uma combinação linear dos outros.*

Exemplo 116 *a) Seja* $V = \mathbb{R}^3$*. Sejam* $v_1, v_2 \in V$*.O conjunto* $\{v_1, v_2\}$ *é LD se e somente se* v_1 *e* v_2 *estiverem na mesma reta que passa pela origem (um vetor é múltiplo do outro),* $v_1 = \lambda v_2$*.*

b) Em $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ são LI, pois:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0 \Longrightarrow a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0) \Longrightarrow (a_{1,} a_2) = (0,0)$$

logo $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$ portanto, e_1e e_2 são LI.

Exemplo 117 *No espaço Vetorial* M_2 *o conjunto:*

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD. Examinemos a equação: $\qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_{3.}$ .Como existem soluções $a_i \neq 0$, o conjunto é LD.

Propriedades da Dependência e da Independência Linear

Seja V um E.V

1. Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é LI.
2. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD
3. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte de A_1 de A também é LI.

3.6 Subespaços Gerados

Definição 118 *Seja* V *um espaço vetorial. Consideramos um subconjunto* $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V, A \neq \varnothing$*.O conjunto* W *de todos os vetores de* V *que são combinações lineares dos vetores de* A *é um subespaço de* V*. Simbolicamente, o subespaço* W *é:*

$$W = \{v \in V \ / \ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n\}$$

O subespaço W diz-se gerado pelos vetores $v_1, v_2, ...v_n.$, ou gerado pelo conjunto A, e representa-se por:

$$W = [v_1, v_2, ...v_n.] \;\; ou \;\; W = G(A)$$

Os vetores $v_1, v_2, ...v_n.$são chamados geradores do subespaço W, enquanto A é o conjunto gerador de W.

Para o caso particular de $A = \varnothing$, define-se $[\varnothing] = \{\overrightarrow{0}\}$

$A \subset G(A)$, ou seja, $\{ v_1, v_2, ...v_n\} \subset [v_1, v_2, ...v_n]$

Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer $G(A) = V$. Nesse caso, A é um conjunto gerador de V.

Exemplo 119 *Os vetores* $i = (1, 0)$ *e* $j = (0, 1)$ *geram o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*, pois, qualquer* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear de* i *e* j *:*

$$(x, y) = xi + ij = x(0, 1) + i(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Então: $[i, j] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 120 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$*. Determinar o subespaço gerado pelo vetor* $v_1 = (1, 2, 3)$.

Solução: Temos:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a(1, 2, 3), a \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade: $(x, y, z) = a(1, 2, 3)$ vem: $x = a$; $y = 2a$; $z = 3a$ donde: $y = 2x$ e $z = 3x$ logo ,

$$[v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \text{ e } z = 3x\} \; ou \; [v_1] = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 121 *Encontre o subespaço vetorial de* P_3 *gerado por* $U = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$

Resolução**:**

note que $t^3 = (t^3 + 1) - 1$. Assim, dado $p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in P_3$ podemos escrever

$$p(t) = (a_0 - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 (t^3 + 1) \in U$$

Ou seja, qualquer vetor (polinômio) de P_3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto U. Logo $P_3 = [U]$.

Exemplo 122 *Encontre o subespaço vetorial gerado de* M_2 *gerado por*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A \in [G]$ se e somente se existirem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, $A \in [G]$ se e somente se os elementos da diagonal principal de A são nulos.

Exemplo 123 *Encontre um conjunto de geradores para* $W = \{X \in M(4,1) \diagup AX = 0\}$ *onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in W \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ b = \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \end{cases}$$

isto é,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \\ c \\ d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textit{portanto},\ W = \left[\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

3.7 Soma de Subespaços

Definição 124 *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Então o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \diagup v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ e } \ w_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V.

Exemplo 125 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *e* $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$*,onde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Então* $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = M_2$.

Exemplo 126 *Sejam os subespaços vetoriais*

$$W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\} \text{ e } \ W_2 = \{(0, 0, c), c \in \mathbb{R}\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. A soma $W_1 + W_2 = \{(a, b, c); a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial, que nesse caso é o próprio $\mathbb{R}^3$.

Proposição 127 *Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado soma direta de W_1 com W_2, e denotado por $W_1 \oplus W_2$.*

Observação 128 *Usando os geradores podemos obter uma caracterização da soma de dois subespaços: Seja W e U subespaços de V, se $W = [u_1, ..., u_n]$ e $U = [w_1, ..., w_m]$ então $W + U = [u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m]$*

Exemplo 129 *Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$$

Resolução:
Note que W_2 é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (Verifique)
Dado $\ v \in W_1, \ v = (x, y, -x - y)$ e $\ u \in W_2, \ u = (0, 0, x + y + z)$

$$u + v = (x, y, z) = \mathbb{R}^3$$

vamos mostrar que $W_1 \cap W_2 = 0$. Seja $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Exemplo 130 *Encontre os geradores do subespaço $U + W$ onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x, , y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y + z = 0\right\}, \quad e \\ W &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x + y = 0 \text{ e } x - z = 0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: Se $v \in U \Rightarrow v = (x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$ logo $U = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$

Se $v \in W \Rightarrow v = (x, -x, x) = x(1,-1,1)$ logo $W = [(1,-1,1)]$

Usando a teoria acima explicada temos que

$$U + W = [(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)]$$

3.8 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

3.8.1 Base

Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do E.V se:

1. β é LI
2. β gera V

Exemplo 131 $\beta = \{(1,1),(-1,0)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$*. De fato:*

1. β é LI pois $a(1,1) + b(-1,0) = (0,0) \Longrightarrow a = b = 0$
2. β gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se :

$$(x,y) = y(1,1) + (y-x)(-1,0)$$

   Realmente , a igualdade $(x,y) = a(1,1) + b(-1,0) \Longrightarrow a = y$ e $b = y - x$.

Exemplo 132 *O conjunto* $\{(0,1),(0,2)\}$*não é base de* $\mathbb{R}^2$ *pois é um conjunto LD. Se*

$$(0,0) = a(0,1) + b(0,2)$$

temos $a = -2b$*. Assim para cada valor de* b *conseguimos um valor para* a*, ou seja, temos infinitas soluções.*

Exemplo 133 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *então* $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$ *(verifique!).*

Exemplo 134 *O conjunto* $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base do espaço vetorial* P_n*. De fato:*

1. $a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$, portanto, β é LI.
2. β gera o espaço vetorial $P_{n,}$ pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito assim:

$$p = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

   que é uma combinação linear de $1, x, x^2, ..., x^n$.

Logo, β é uma base de P_n.Essa é a base canônica de P_n e tem $n+1$ vetores.

Exemplo 135 *Encontre uma base para* $U+W$ *onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x+y+z=0\right\} \ e \\ W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x+y=0 \ e \ x-z=0\right\} \end{aligned}$$

Resolução: $U = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$ e $W = [(1,-1,1)]$ (Já vimos este exemplo)

$$U+W = [(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)].$$

Já temos um conjunto que gera a soma, se este conjunto for L.I. então ele será uma base.

$a(1,0,-1)+b(0,1,-1)+b(1,-1,1)=(0,0,0)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ logo o conjunto é L.I e portanto. $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é uma base de $U+W$

Exemplo 136 *Encontre uma base para* $U+W$ *onde*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x-y+z=0 \ e \ x-y=0\right\}, \ e \\ W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagup x+y-z=0 \ e \ x-z=0\right\} \end{aligned}$$

Se $v=(x,y,z) \in U \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow v=(x,x,0)$

Usando a teoria acima explicada temos que $U+W = [(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)]$

Como o conjunto $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,1)\}$ é LI (verifique isto) e gera o espaço $U+W$ então ele é uma base do espaço $U+W$.

Exemplo 137 *Dados:*

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^t\} \ \ e \qquad W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \ em \ M_2$$

encontre uma base para $U, W, U \cap W, W+U$

Resolução:

Para $U:\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow c=b$ portanto, $A \in U$ se existirem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pode-se verificar facilmente que as matrizes

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

são L.I e portanto, como geram U, formam uma base de U.

Para W: Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera W, ela serve para base de W

Para $U \cap W$:

$A \in U \cap W \Leftrightarrow A = A^t$ e existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

, isto é, se e somente se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

que é satisfeita quando $\alpha = 0$, ou seja, $A = \mathbf{0}$.Desse modo $U \cap W = \{0\}$. Uma base para $U \cap W$ é $\beta = \phi$. Veja a observação a seguir para elucidar esse fato.

Observação: Seja V um espaço vetorial e $\overrightarrow{0} \in V$ o vetor nulo de V. Como o conjunto $\beta = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ é LD (mostre isto) temos que este conjunto não pode ser uma base do conjunto $N = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$. Este é um caso patológico e para que não seja contrariada a definição de base tomamos $\beta = \phi$ (conjunto vazio) como sendo base para o espaço $N = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$

Para $U + W$: Como $U \cap W = \{0\}$ temos $U + W$ é soma direta e, portanto, uma base é :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposição 138 *"Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado ".*

Exemplo 139 *O conjunto $\beta = \{(1,2,1), (-1,-3,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\}.$$

Então, β é base de W, pois β é LI e gera W.

Teorema 140 *Sejam $v_1, v_2, ...v_n$, vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Proposição 141 *Seja um E.V V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, ...v_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

3.8.2 Dimensão

Seja V um Espaço Vetorial.

Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se $\dim V = n$.

Se V não possui uma base, ou seja, a base é $\beta = \phi$ então $dimV = 0$

Se V possui uma base com infinitos vetores, então dim$V$ é infinita e anota-se $\dim V = \infty$

Exemplo 142 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *pois toda base de* $\mathbb{R}^2$ *tem 2 vetores*

Exemplo 143 $\dim M(2,2) = 4$

Exemplo 144 $\dim M(m,n) = m.n$

Exemplo 145 $\dim P_n = n + 1$

Proposição 146 *Seja* V *um E. V. tal que* $\dim V = n$

Se W é um subespaço de V então $\dim W \leq n$. No caso de $\dim W = n$, tem-se $W = V$. Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3(\dim \mathbb{R}^3 = 3)$.

A dimensão de qualquer subespaço W do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser $0, 1, 2$ ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

1. $\dim W = 0$, então $W = \{0\}$ é a origem
2. $\dim W = 1$, então W é uma reta que passa pela origem
3. $\dim W = 2$, então W é um plano que passa pela origem
4. $\dim W = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$.

Proposição 147 *Seja* V *um E.* V *de dimensão* n*. Então, qualquer subconjunto de* V *com mais de* n *vetores é Linearmente Dependente (LD).*

Proposição 148 *Sabemos que o conjunto* β *é base de um espaço vetorial se* β *for LI e gera* V*. No entanto, se soubermos que* $\dim V = n$ *, para obtermos uma base de* V *basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita.*

Exemplo 149 *O conjunto* $\beta = \{(2,1), (-1,3)\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^2$*. De fato, como* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do* $\mathbb{R}^2$*.*

3.8.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 150 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V então* $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

No exemplo (137) de base , para encontrar a base de $U+W$ podemos usar esta proposição: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3+1-0 = 4 = \dim M_2$, portanto, $U+W = M_2$ e uma base pode ser dada por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3.8.4 Coordenadas

Seja V um espaço vetorial gerado e β uma base de V formada pelos vetores $u_1, u_{2\,....}u_n$.

$v \in V$ sendo

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$$

Os coeficientes $x_1, x_2, ...x_n$ são chamados componentes ou coordenadas de v em relação a base β e se representa por :

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 151 *No $\mathbb{R}^2$ consideremos as bases $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}, \beta = \{(2,0),(1,3)\}$ e $\gamma = \{(1,-3),(2,4)\}$. Dado o vetor $v = (8,6)$ tem-se:*

$(8,6) = 8(1,0) + 6(0,1)$
$(8,6) = 3(2,0) + 2(1,3)$
$(8,6) = 2(1,-3) + 3(2,4)$

temos: $\quad [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $[v]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 152 *Mostre que os vetores $(1,1,1),(0,1,1)$ e $(0,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas de $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base β formada pelos vetores acima.*

Resolução:

Já sabemos que dim $\mathbb{R}^3 = 3$.Então verificamos se os vetores acima são LI. Os vetores são LI se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, portanto, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI.

$$(1,2,0) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (a, a+b, a+b+c)$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 2 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 1 \ e \ c = -2$$

. Desse modo, as coordenadas de $(1,2,0)$ em relação à base β é dado por $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3.9 Mudança de Base

Sejam $\beta = \{u_{1,\dots,}u_n\}$ e $\beta' = \{w_{1,\dots\dots,}w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} v &= x_1u_1 + \dots. + x_nu_n \qquad (3.3) \\ v &= y_1w_1 + \dots. + y_nw_n \end{aligned}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β'

$$[v]_{\beta^{;\prime}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

já que $\{u_{1,\dots,}u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores w_i como combinação linear dos u_j, isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots. + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots. + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots. + a_{nn}u_n \end{cases} \qquad (3.4)$$

Substituindo em (3.3) temos:

$v = y_1w_1 + \dots + y_nw_n = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots. + a_{n1}u_n) + \dots + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots. + a_{nn}u_n) =$

$= (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n)u_1 + \dots.. + (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n)u_n$

Mas $v = x_1u_1 + ... + x_nu_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ &: \qquad : \qquad : \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & : & a_{1n} \\ : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ : \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo ,se usarmos a notação

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & : & a_{1n} \\ : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ temos}$$

temos a relação

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz mudança de base β' para a base β.

Compare $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com (3.4) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i-ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]_{\beta}^{\beta'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base β' (supostamente conhecida).

Exemplo 153 *Sejam* $\beta = \{(2,-1),(3,4)\}$ *e* $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$. *Procuremos inicialmente* $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$

Isto implica que $a_{11} = \frac{4}{11}$ *e* $a_{21} = \frac{1}{11}$

$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$

Resolvendo, $a_{12} = \frac{-3}{11}$ *e* $a_{22} = \frac{2}{11}$

Portanto, $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

Podemos usar esta matriz para encontrar por exemplo, $[v]_{\beta}$ *para* $v = (5,-8)$

$[(5,-8)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [(5,-8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Isto é, $(5,-8) = 4(2,-1) - 1(3,4)$

Exemplo 154 *Considere as bases em* $\mathbb{R}^3$

$$\beta = [(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)] \ e \ \acute{\beta} = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).$$

Encontre $I_{\beta}^{\beta'}$.

Resolução:
$(1,0,0) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(1,1,1) + a_{31}(1,1,2)$
$(0,1,0) = a_{12}(1,0,1) + a_{22}(1,1,1) + a_{32}(1,1,2) \Leftrightarrow$
$(0,0,1) = a_{31}(1,0,1) + a_{23}(1,1,1) + a_{33}(1,1,2)$

$$\begin{aligned}
(a_{11} + a_{21} + a_{31,}a_{21} + a_{31}, a_{11} + a_{21} + 2a_{31}) &= (1,0,0)\\
(a_{12} + a_{22} + a_{32,}a_{22} \ + a_{32}, a_{12} + a_{22} + 2a_{32}) &= (0,1,0)\\
(a_{13} + a_{23} + a_{33,}a_{23} \ + a_{33}, a_{13} + a_{23} + 2a_{33}) &= (0,0,1)
\end{aligned}$$

Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma e o que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z, basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$
Tomando $(a,b,c) = (1,0,0)$,obtemos $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (1,1,-1)$
Tomando $(a,b,c) = (0,1,0)$,obtemos $(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (-1,1,0)$
Tomando $(a,b,c) = (0,0,1)$,obtemos $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0,-1,1)$. Desta forma obtemos:

$$I_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.10 A Inversa da Matriz de Mudança de Base

Se em (3.3)começarmos escrevendo os u_i em função dos w_j, chegaremos à relação:

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ são inversíveis e

$$\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Exemplo 155 *No exemplo (153) anterior podemos obter* $[I]_{\beta}^{\beta'}$ *a partir de* $[I]_{\beta'}^{\beta}$
Note que $[I]_{\beta'}^{\beta}$ *é fácil de ser calculada , pois* β' *é a base canônica*

$$\begin{array}{c} (2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1) \\ (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

3.11 Oitava lista de exercícios

1) Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido com as operações:

a) $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V
$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y) \in V$.

b) $(x, y) + (s, t) = (x + t, y + s)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V
$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V.

Em cada item verifique se V com as operações definidas é um espaço vetorial.

2) Verifique se o conjunto $W = \{(1, 2, 3), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.

3) Dado o conjunto $W = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.

4) Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ e $\mathbf{w} = (-3, 2, 7)$, encontre a e b tais que $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$

5) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial e encontre uma base para W.

6) Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de M_2. Em caso afirmativo exiba geradores:

a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b \right\}$

b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b - 1 = c + 1 \right\}$

7) Seja W o conjunto dos polinômios de $grau \leq 3$ cujos gráficos "passam por (0,0)"; com as operações usuais. Verifique se W é uma subespaço vetorial de P_3.

O conjunto $C[A] = \{X \in M_n \ \ \diagup AX + XA\}\}$ das matrizes que comutam com A, é um subespaço de M_n?.

O conjunto $S = \{X \in M_2 \ \ \diagup det(X) = 0\}$ das matrizes singulares, é um subespaço de M_2

O conjunto $Id = \{X \in M_2 \diagup X^2 = X\}$ das matrizes idempotentes, é um subespaço de M_2

8) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in\} \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in\} \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

9) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{com a}, b, c, d \in \mathbb{R} \ a = b \text{ e } d = c \right\}$

$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d \right\}$

subespaços de $M(2, 2)$, onde $M(2, 2)$ é espaço vetorial das matrizes de ordem dois por dois.

a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.

b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

10) a) Qual seria uma base "natural" para o espaço P_n? Dê a dimensão deste espaço vetorial.

b) Verifique se o conjunto $W = \{p \in P_n;\ p'(0) = 0\}$ é um subespaço de P_n

11) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$. Qual é a dimensão deste espaço?

c) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?

12) Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre a matrizes mudança de base:

i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3.

c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em relação à base β_1 são dadas por

$$[\mathbf{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base: i) β ii) β_1 iii) β_2

13) Se

$$[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

encontre

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

14) Considere o seguinte subespaço de M_2 : $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \diagup d = 0 \right\}$. Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

a) Detemine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

b) Se $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_{\alpha}$.