

DÉCIMA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA II

- 1) Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$
 - a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal
 - b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $T(v) \bullet w = v \bullet T(w)$
- 2) Seja A é uma matriz de ordem n fixada. Seja $T : M(m, n) \rightarrow M(m, n)$ definida por $T(N) = AN - NA$. Mostre que T não é inversível.
- 3) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear e $T^2 - T - I = 0$ mostre que T é inversível
- 4) Sejam $T : V \rightarrow V$ é um operador linear e α e β bases distintas de V . Mostre que $\det [T]_{\alpha}^{\alpha} = \det [T]_{\beta}^{\beta}$
- 5) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- 6) Se k é um número inteiro, λ um autovalor da matriz A e v um autovetor de A associado ao autovetor λ . Mostre que λ^k é um autovalor da matriz A^k associado ao autovetor v .
- 7) Encontre os autovalores de A^9 se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
- 8) Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:
 - a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
 - b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
 - c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
 - d) $T : P_2 \rightarrow P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
 - e) $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$ tal que $A \rightarrow A^T$
- 9) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.
- 10) Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11) Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Mostre que

- a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são LI
- b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI.

12) Seja $T : V \rightarrow V$ linear

- a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T , mostre que T não é injetora.
- b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T ?

13) Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D : P_n \rightarrow P_n$, $D(p) = p'$.

14) Para todo auto-valor λ do operador linear $T : V \rightarrow V$ seja $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$. Mostre que V_λ é um subespaço de V .

ALGUMAS RESPOSTAS

2) Sugestão: Mostre que T não é injetiva

4) Sugestão: Use a semelhança das matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ e propriedades de determinantes.

8b) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $v_1 = (x, \sqrt{2}x)$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $v_2 = (x, -\sqrt{2}x)$

8c) $\lambda = 1$, $v = ax^2 + bx + b$

10a) $\lambda = 1$, $v = (x, 0, 0)$

10b) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-y, y, 0)$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (x, 2x, -x)$; $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, 0, x)$