NONA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALGA II

1) Seja $T : V \to W$ uma função. Mostre que
a) Se T é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
b) Se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ então T não é uma tranformação linear.

2) Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:
a) $f : \Re^2 \to \Re^2, \ \ f(x,y) = (x+y, x-y)$
b) $g : \Re^2 \to \Re, \ f(x,y) = xy$
c) $h : M(2,2) \to \Re$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

d) $m : \Re \to \Re, \ \ m(x) = |x|$.

3) a) Encontre a transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.
b) Encontre $v \in \Re^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

4) a)Encontre a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.
b) Escreva-a em forma matricial.

5) No plano, uma rotação anti-horária de 45^0 é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

6) Dados $T : U \to V$ linear e injetora e $u_1, u_2, ..., u_k$ vetores LI em U, mostre que $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_k)\}$ é LI.

7) a) Seja $J : P_1 \to \Re$ a transformação integração $J(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. Determine se J é injetora. Justifique sua conclusão
b) Seja $T : C^1[0,1] \to \Re$ definida por $T(f) = f(0) + 2f'(0) + 3f'(1)$. Verifique que T é uma transformação linear. Determine se T é injetora. Justifique sua conclusão.

8) Sejam R, S, T tres transformações lineares de $\Re^3$ em $\Re^3$. Se

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \quad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ encontre}$$

T tal que $R = S \circ T$.

9) Sejam $\alpha = \{(1,-1), (0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1), (0,1,2), (1,2,0)\}$ bases de $\Re^2$ e $\Re^3$ respectivamente e

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Encontre T
b)Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, encontre $[S]_\beta^\alpha$.
c) Encontre uma base γ de $\Re^3$ tal que $[T]_\gamma^\alpha$.

10) Considere a transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.

a) Determine uma base do núcleo de T.
b) Dê a dimensão da imagem de T.
c) T é sobrejetora? Justifique.
d) Faça um esboço de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

11) Seja $T : \Re^3 \to \Re^3$ é a projeção de vetor v no plano $x + y + z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

12) Seja $L : \Re^3 \to \Re^3$ onde L é a reflexão através do plano $x + y + z = 0$. Encontre $L(x, y, z)$.

13) Seja $A : \Re^3 \to \Re^3$ onde L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y. Encontre $A(x, y, z)$.

14) Seja
$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
uma base de $M(2, 2)$. Se $T : M(2, 2) \to P_3$ é dada por
$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$
a) Encontre $[T]_\alpha^\beta$ onde $\alpha = \left\{2, 2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3\right\}$ é base de P_2
b) Faça o escalonamento da matriz $[T]_\alpha^\beta$
c) Detemine dim $Ker(T)$
d) Determine dim $\mathrm{Im}(T)$.

15) Responda as seguintes questões:
a) Se $T : \Re^5 \to \Re^6$ é uma transformação linear, podemos ter dim $\mathrm{Im}(T) > 6$?. Justifique sua resposta
b) Existe alguma tranformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T(1, 1) = (2, 2)$ e $T(2, 2) = (3, 1)$? Justifique sua resposta.

16) Seja $T : \Re^2 \to \Re^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que
a) $T(u) = u$
b) $T(v) = -v$

ALGUMAS SUGESTÕES

4) Sugestão: Use a projeção do vetor genérico (x, y) sobre algum vetor que está sobre a reta $y = 6x$ e a adição de veotres.(Lembre-se que a projeção de um vetor $\overrightarrow{u}$ na direção de um vetor $\overrightarrow{v} dadapor \mathrm{proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u} = \left(\frac{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} . \overrightarrow{v}} \right) \overrightarrow{v}$).

7) Use também seus conhecimentos de cálculo 1.

8) Lembre-se que a composição de transformações pode ser obtida pela multiplicação de suas matrizes (em relação a base canônica)

11) Faça a projeção do vetor (x, y, z) na direção do vetor normal do plano e use adição de vetores.

12) Sugestão: Cosidere a projeção do vetor genérico (x, y, z) na direção do vetor normal do plano dado. Use a definição de reflexão e adição de vetores.

14)c) A dimensão de $Ker(T)$ é a nulidade de $[T]_\alpha^\beta$

14)d) A dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ é o posto de $[T]_{\alpha}^{\beta}$