Capítulo 4

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 156 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma Transformação Linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

- *Qualquer que sejam u e v em V ,*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

- *Qualquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e v em V ,*

$$T(kv) = kT(v)$$

Exemplo 157 *: Um agricultor planta e comercializa três tipos de verduras: Tomate, Batata, Cenoura. Sejam x_1, x_2, x_3 as quantidades em quilos de Tomate, Batata, Cenoura respectivamente. Se o agricultor vende o quilo do tomate a R\$ $2,00$,da batata a R\$ $1,50$ e da cenoura a R\$ $1,90$ então o total de vendas (T_V) é dado por $2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3$. A aplicação que a cada tripla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$associa o total de vendas $T_V(x_1, x_2, x_3)$ é uma aplicação linear. Matematicamente temos uma transformação linear do E.V $\mathbb{R}^3$ no E.V $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} T_V &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ T_V(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3 \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que de fato esta aplicação é uma transformação linear Chamando $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos:

i)

$$\begin{aligned} T_V(u+v) &= T_V\left((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\right) \\ &= T_V\left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right) \\ &= 2(x_1+y_1)+1,5(x_2+y_2)+1,9(x_3+y_3) \\ &= 2x_1+1,5x_2+1,9x_3+2y_1+1,5y_2+1,9y_3 \\ &= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_V(u) &= T(x_1,x_2,x_3)=2x_1+1,5x_2+1,9x_3 \\ T_V(v) &= T(y_1,y_2,y_3)=2y_1+1,5y_2+1,9y_3 \\ T_V(u)+T_V(v) &= (2x_1+1,5x_2+1,9x_3)+(2y_1+1,5y_2+1,9y_3) \end{aligned}$$

Logo $T_V(u+v)=T_V(u)+T_V(v)$.

ii)

$$\begin{aligned} T_V(ku) &= T_V(k(x_1,x_2,x_3)) \\ &= T_V(kx_1,kx_2,kx_3) \\ &= 2kx_1+1,5kx_2+1,9kx_3 \\ &= k\left(2x_1+1,5x_2+1,9x_3\right) \\ &= kT(u) \end{aligned}$$

Logo $T_V(ku)=kT_V(u)$. De i) e ii) vemos que T_V é uma transformação linear.

Exemplo 158 . *Sejam $V=\mathbb{R}$, $W=\mathbb{R}$ e $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dado $F(u)=u^2$. A aplicação F não é uma transformação linear pois:*

$$\begin{aligned} F(u+v) &= (u+v)^2=u^2+2uv+v^2 \\ F(u)+F(v) &= u^2+v^2 \\ F(u+v) &\neq F(u)+F(v) \end{aligned}$$

Exemplo 159 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(2x,0,x+y)$

T é uma transformação linear pois,

i)

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) \\ &= T(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ &= (2(x_1+x_2),0,(x_1+x_2)+(y_1+y_2)) \\ &= (2x_1+2x_2,0+0,(x_1+y_1)+(x_2+y_2)) \\ &= \left(2x_1,0,x_1+y_1\right),\left(2x_2,0,x_2+y_2\right) \\ &= T(u)+T(v) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
T(ku) &= T\left(k(x_1, y_1)\right) \\
&= T\left(kx_1, ky_1\right) \\
&= \left(2kx_1, 0, kx_1 + ky_1\right) \\
&= k\left(2x_1, 0, x_1 + y_1\right) \\
& \quad kT(u)
\end{aligned}$$

Portanto T é uma transformação linear.

Exemplo 160 . *$V = W = P_n$ e*

$$\begin{aligned}
D &: P_n \to P_{n-1} \\
D(f) &= f'
\end{aligned}$$

a aplicação derivada que a cada polinômio associa sua derivada, a qual também é um polinômio é uma aplicação linear. De fato, para quaisquer $f, g \in P_n$ e $k \in \mathbb{R}$,

i)

$$\begin{aligned}
D(f+g) &= (f+g)' \\
&= f' + g' \\
&= D(f) + D(g)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
D(kf) &= (kf)' \\
&= kf' \\
&= kD(f)
\end{aligned}$$

Exemplo 161 $V = P_n, W = P_{n+1}$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

$$\begin{aligned}
T &: P_n \to P_{n+1} \\
T(p(x)) &= xp(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1}
\end{aligned}$$

A aplicação T é uma transformação linear pois

$$\begin{aligned}
T(kp) &= x(kp)(x) = xkp(x) = kxp(x) = kT(p) \\
T(p+q) &= x(p+q)(x) = x(p(x) + q(x)) = xp(x) + xq(x) = T(p) + T(q)
\end{aligned}$$

Exemplo 162 $V = W = P_n$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{aligned}
T &: P_n \to P_n \\
T(p(x)) &= p(ax+b) = a_0 + a_1\left(ax+b\right) + a_2\left(ax+b\right)^2 + \ldots + a_n\left(ax+b\right)^n
\end{aligned}$$

Esta aplicação também é linear pois,

$$\begin{aligned} T(kp) &= (kp)(ax+b) = kp(ax+b) = kT(p) \\ T(p+q) &= (p+q)(ax+b) = p(ax+b)+q(ax+b) = T(p)+T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 163 *Uma transformação linear inportante é aquela que se obtém usando-se o produto escalar. Seja* $\mathbb{R}^n$ *com o produto escalar usual* $\langle .,. \rangle$ *e* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *um vetor qualquer fixado. Seja,*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ T(v) &= \langle v, v_0 \rangle \end{aligned}$$

T é uma aplicação linear (mostre isso, use as propriedades do produto escalar)

Exemplo 164 *: Sejam* $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ é contínua}\}$ *. Considere*

$$\begin{aligned} J &: C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ J(f) &= f(0) \end{aligned}$$

Por exemplo se $f(t) = t^2$ *então*

$$J(f) = f(0) = 0^2 = 0$$

J é uma aplicação linear pois, se $f, g \in C(\mathbb{R})$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *então*

$$\begin{aligned} J(f+g) &= (f+g)(0) = f(0)+g(0) = J(f)+J(g) \\ J(kf) &= (kf)(0) = kf(0) = kJ(f) \end{aligned}$$

Exemplo 165 *: Seja,*

$$\begin{aligned} T &: M_2 \to M_2 \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma transformação linear, pois

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{matrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & b_1+b_2+c_1+c_2 \\ c_1+c_2+d_1+d_2 & d_1+d_2+a_1+a_2 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1+a_1 \end{matrix} + \begin{matrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2+a_1+a_2 \end{matrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(k\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} ka+kb & kb+kc \\ kc+kd & kd+ka \end{bmatrix} \\
&= k\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \\
&= kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 166 *: Seja,*

$$
\begin{aligned}
T &: M_n \to \mathbb{R} \\
T(A) &= \det(A)
\end{aligned}
$$

Esta aplicação não é uma transformação linear, pois, em geral

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

4.1 Propriedades das Transformações Lineares

Teorema 167 *Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de $V, \beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$, sejam $w_1, \cdots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \cdots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por: Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$,*

$$T(v) = a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n) = a_1w_1 + \cdots a_nw_n$$

Exemplo 168 *Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?*

Solução: Temos neste caso $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ base de $\mathbb{R}^2$ e $w_1 = (2,-1,0)$ e $w_2 = (0,0,1)$.

Dado $v = (x,y)$ arbitrário,

$$
\begin{aligned}
v &= xv_1 + yv_2 \\
T(v) &= T(xv_1 + yv_2) \\
T(v) &= xT(v_1) + yT(v_2) \\
T(v) &= x(2,-1,0) + y(0,0,1) \\
T(v) &= (2x, -x, y)
\end{aligned}
$$

Exemplo 169 *Qual a transformação linear $T : M_2 \to P_4$ tal que*

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^4 + x \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^3 + x^2 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^2 + x^3 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= x + x^4 \end{aligned}$$

Solução

Uma matriz $A \in M_2$ é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Podemos escrever:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, portanto

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= a\left(x^4 + x\right) + b\left(x^3 + x^2\right) + c\left(x^2 + x^3\right) + d\left(x + x^4\right) \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= (a+d)x + (b+c)x^2 + (b+c)x^3 + (a+d)x^4 \end{aligned}$$

Definição 170 *: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto de vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja*

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \;\; / \;\; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observação 171 *Note que* $\mathrm{Im}(T)$ *é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W.*

Exemplo 172 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - y, -10x + y)$. Qual dos vetores abaixo pertence a imagem de T*

a) $u = (1, 2)$
b) $w = (-1, 2)$

Solução: a) Para que $u \in \text{Im}(T)$ deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = u$, ou seja, $T(x, y) = (1, 2)$; temos então:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (1,2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (1,2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{3}{8}$ e $y = -\frac{7}{4}$, logo u pertence a imagem de T pois $T(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{4}) = u$.

b) Analogamente deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = w$, ou seja

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (-1,2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (-1,2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{1}{8}$ e $y = \frac{3}{4}$ logo w pertence a imagem de T pois $T(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}) = w$

Exemplo 173 *Determine a imagem da transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y - z, x - y - z, x + y - z)$.

Solução: Se $w \in \text{Im}(T)$ então $w = T(x, y, z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} w &= (2x - y - z, x - y - z, x + y - z) \\ &= x(2,1,1) + y(-1,-1,1) + z(-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Logo todo vetor que pertence a imagem de T é gerado pelos vetores $v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (-1, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, -1, -1)$. Podemos então escrever que $\text{Im}(T) = [(2, 1, 1),\ (-1, -1, 1),\ (-1, -1, -1)]$.

Como o conjunto $\beta = \{(2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\}$ é LI (verifique isto) temos que β é uma base para a $\text{Im}(T)$, mas β é base para $\mathbb{R}^3$, logo concluimos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

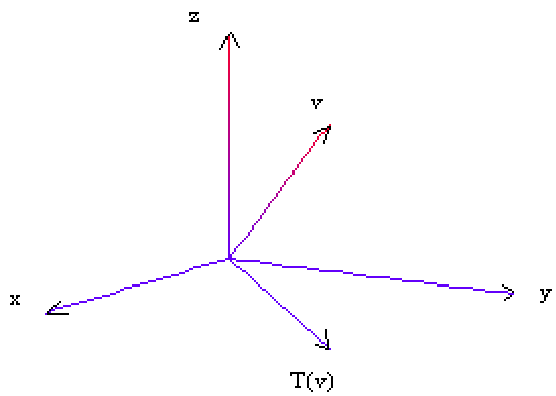
Definição 174 *Seja $T : V \to W$, uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = \overrightarrow{0}$ é chamado **núcleo** de T, sendo denotado por $Ker(T)$. Isto é,*

$$Ker(T) = \left\{ v \in V \ / \ T(v) = \overrightarrow{0} \right\}$$

Observação 175 *Observe que $Ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V. Alguns autores denotam o núcleo de T por $N(T)$.*

Exemplo 176 *Seja $T : V \to W$, dada por $T(v) = \overrightarrow{0}$. Neste caso todo vetor de V é levado no vetor nulo pela transformação T, assim temos que $Ker(T) = V$*

Exemplo 177 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano xy. Neste caso temos $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$. Como nada é dito sobre a variável z, temos que z é qualquer, logo $Ker(T) = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$, ou seja o núcleo de T são todos os vetores que estão sobre o eixo z.*



Exemplo 178 *Encontre o núcleo da transformação linear:*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z, t) &= (x + y + z - t, 2x + z - t, 2y - t) \end{aligned}$$

Solução: Devemos encontrar os vetores $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que $T(v) = T(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. Neste caso temos que resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$p_a = p_c = 3$ e $p = 3 < n = 4$ logo o sistema é compatível e indeterminado com grau de liberdade 1.

Logo,

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ -2y-z+t=0 \\ -z=0 \end{cases}$$

o que nos fornece,

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= 0 \\ t &= 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T)=\left\{(y,y,0,2y)\ \in \mathbb{R}^4 \diagup\ y\in\mathbb{R}\right\}=[(1,1,0,2)]$

Exemplo 179 *Seja $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ a transformação linear que é a projeção ortogonal sobre a reta cujas equações paramétricas são:*

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$$

Encontre o Núcleo de T.

Solução: Projetar um vetor sobre uma reta é o mesmo que encontrar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor dessa mesma reta. No nosso caso, o vetor diretor é $u=(2,-2,1)$, logo

$$\begin{aligned} T(v) &= proj_u v=\left(\frac{v.u}{u.u}\right)u \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{(x,y,z).(2,-2,1)}{(2,-2,1).(2,-2,1)}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{2x-2y+z}{9}\right)(2,-2,1) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{4x-4y+2z}{9},\frac{-4x+4y-2z}{9},\frac{2x-2y+z}{9}\right) \end{aligned}$$

Para encontrar o núcleo devemos ter,

$$T(x,y,z)=\left(\frac{4x-4y+2z}{9},\frac{-4x+4y-2z}{9},\frac{2x-2y+z}{9}\right)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 4x-4y+2z &= 0 \\ -4x+4y-2z &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, fazendo o escalonamento temos $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, assim

$$\begin{aligned} 4x + 4y + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z &= -4x - 4y \\ z &= -2x - 2y \end{aligned}$$

Portanto $Ker(T) = \left\{(x, y, -2x - 2y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \in \mathbb{R}\right\} = [(1, 0, -2), (0, 1, -2)]$

Definição 180 *Dada uma aplicação $T : V \to W$, diremos que T é* ***injetora*** *se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.*

Definição 181 *Uma aplicação $T : V \to W$ será* ***sobrejetora*** *se a imagem de T coincidir com W, ou seja, $T(V) = W$.*

Observação 182 *Da definição acima vemos que uma função será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.*

Teorema 183 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. então $Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, se e somente se T é injetora.*

Teorema 184 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então*

$$\dim Ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V$$

Corolário 185 *Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Corolário 186 *Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.*

Exemplo 187 *Seja $T : P_n \to P_{n+1}$, dada por $T(p(x)) = xp(x)$. Verifique se T é bijetora.*

Solução: Devemos verificar se T é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Usando o teorema (183) devemos apenas calcular o núcleo de T :

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= xp(x) \\ T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= x(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \\ T(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= (a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1}) \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= 0 \\ a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^{n+1} \end{aligned}$$

logo $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ ($p(x)$ é o polinômio nulo) $\Rightarrow Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$(observe que neste caso o vetor nulo de P_n é o polinômio nulo de grau n). Portanto T é injetora.

Como $\dim P_n = n+1$, $\dim P_{n+1} = n+2$ e $\dim Ker(T) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \dim Ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \\ 0 + \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \\ \dim \mathrm{Im}(T) &= n+1 \end{aligned}$$

Note que $\dim \mathrm{Im}(T) = n+1 \neq n+2 = \dim P_{n+1} \Rightarrow \mathrm{Im}(T) \neq P_{n+1}$. Portanto T não é sobrejetora.

4.2 Transformações Lineares e Matrizes

4.2.1 Transformação linear associada a uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Associada a matriz A definimos a transformação linear:

$$\begin{aligned} L_A : \ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & v \to A.v \end{aligned}$$

onde v é tomado como vetor coluna,

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_A(v) &= A.v \\ L_A(v) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ L_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das propriedades de operações de matrizes:

$$\begin{aligned} L_A(u+v) &= A.(u+v) = A.u + A.v = L_A(u) + L_A(v) \\ L_A(ku) &= A.(ku) = kA.u = kL_A(u) \end{aligned}$$

e portanto L_A é uma transformação linear.

Exemplo 188 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A tem ordem 3×4 e portanto ela induzirá uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned} L_A &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ L_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+y+z-t \\ 2x+z-t \\ 2y-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que a transformação acima está escrita em forma matricial, mas podemos escreve-la também na forma vetorial que estamos acostumados:

$$L_A(x,y,z,t) = (x+y+z-t, 2x+z-t, 2y-t)$$

Surpresa!! Esta é a mesma transformação do exemplo (178)

Exemplo 189 *Dada a transformação linear:*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) &= (10x-20y-30z, x-2y-3z) \end{aligned}$$

Encontre a matriz da transformação T (Isto é, encontre a matriz A cuja transformação associada a ela é exatamente a transformação T)

Solução: Passando da forma vetorial para a forma matricial temos:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 10x-20y-30z \\ x-2y-3z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a matriz de T, que denotaremos por $[T]$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação 190 *Ao obtermos a transformação associada a uma matriz A (ou, caso contrário, a matriz de uma transformação T), não mencionamos as bases dos espaços envolvidos. De fato, ao obtermos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas aos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ mas neste caso em particular estamos considerando as bases canônicas. Isto ficará claro na exposição a seguir.*

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$, à matriz

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & v \to T_A(v) \end{aligned}$$

da seguinte maneira: Seja

$$X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A.X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

então

$$T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$$

onde $y_i = A_i.X$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada uma matriz $A_{m\times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

4.2.2 Matriz de uma transformação linear

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ linear, $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{array}{ccccccc} T(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & \cdots & + & a_{m1}w_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ T(v_n) & & a_{1n}w_1 & + & \cdots & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β' :

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 191 *Note que se* $A = [T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *a transformação linear* T *passa a ser a transformação linear associada à matriz* A *e bases* β *e* β'*, iste é,* $T = T_A$

Exemplo 192 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.

Sejam $\beta = \{(1, 1, 1,), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.
Procuremos $[T]_{\beta'}^{\beta}$
$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,5) = a(1,3) + b(1,4) \\ T(1,1,0) &= (3,1) = c(1,3) + d(1,4) \\ T(1,0,0) &= (2,3) = e(1,3) + f(1,4) \end{aligned}$$

Portanto temos os sistemas:

$$, \quad \left[\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases} , \quad \begin{cases} c + d = 3 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} e + f = 2 \\ 3e + 4f = 3 \end{cases} \right]$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$\left[a = 3 \qquad b = -1 \quad , \quad c = 11 \quad , \quad d = -8 \qquad e = 5 \qquad f = -3 \right]$$

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 193 *: Sejam* V *e* W *espaços vetoriais,* α *base de* V*,* β *base de* W *e* $T : V \to W$ *uma aplicação linear. Então, para todo* $v \in V$ *vale:*

Teorema 194

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$$

Definição 195 *Dada uma base* β *e tranformação linear* $T : V \to V$ *denotaremos a matriz* $[T]_{\beta}^{\beta}$ *apenas por* $[T]_{\beta}$ *e ela será chamada de matriz de* T *em relação a base* β.

Definição 196 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma transformação linear e* α *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*, então a matriz de* T *em relação a base canônica* α*,* $[T]^{\alpha}_{\alpha}$*, será denotada simplesmente por* $[T]$.

Exemplo 197 *Seja* $T : P_2 \to P_2$ *definido por* $T(p(x)) = p(3x-5)$*. Determine a matriz de* T *em relação a base* $\beta = \{1, x, x^2\}$

Devemos calcular $[T]_\beta = [T]^\beta_\beta$

$$\begin{aligned}
T(p) &= p(3x-5)\\
T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + a_1(3x-5) + a_2(3x-5)^2\\
T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + 3a_1x - 5a_1 + a_2(9x^2 - 30x + 25)\\
T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= (a_0 - 5a_1 + 25a_2) + (3a_1 - 30a_2)x + 9a_2x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(1) &= T(1 + 0x + 0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2\\
T(x) &= T(0 + 1x + 0x^2) = -5 + 3x = -5 + 3x + 0x^2\\
T(x^2) &= T(0 + 0x + 1x^2) = 25 - 30x + 9x^2
\end{aligned}$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 198 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x,y,z) = (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z)$

a) Sejam as bases

$$\begin{aligned}
\alpha &= \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}\\
\beta &= \{(-1,-1,0), (-1,0,-1), (0,-1,-1)\}
\end{aligned}$$

determine $[T]^\alpha_\beta$, $[T]^\beta_\alpha$

b) Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine $[T(v)]_\beta$.

c) Calcule a multiplicação das matrizes: $[T]^\alpha_\beta \cdot [T]^\beta_\alpha$. Que conclusão voce pode tirar em relação as duas matrizes, ou que relação há entre as duas matrizes?

Solução: a) Cálculo de $[T]^\alpha_\beta$

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z)\\
& \quad T(1,0,0)
\end{aligned}$$

$$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \end{pmatrix} = a_1(-1,-1,0) + b_1(-1,0,-1) + c_1(0,-1,-1)$$

$T(1,1,0) = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \end{pmatrix} = a_2(-1,-1,0) + b_2(-1,0,-1) + c_2(0,-1,-1)$
$T(1,1,1) = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 2 \end{pmatrix} = a_3(-1,-1,0)+b_3(-1,0,-1)+c_3(0,-1,-1)$
Devemos resolver os tres sistemas resultantes: Denotando por A a matriz dos coeficientes do sistema,temos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos resolver os sistemas por matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora voce já está em condições de calcular $[T]_\alpha^\beta$. Faça esse cálculo como exercício

b) Vamos usar a relação $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \centerdot [v]_\alpha$

$$\begin{aligned} [T(v)]_\beta &= [T]_\beta^\alpha \centerdot [v]_\alpha \\ [T(v)]_\beta &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [T(v)]_\beta &= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Faça voce este item e tire suas conclusões. Mais adiante voce poderá verificar se suas conclusões estavam corretas.

Teorema 199 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(T) &= \textit{posto de } [T]_\beta^\alpha \\ \dim Ker(T) &= \textit{nulidade de } [T]_\beta^\alpha = \textit{número de colunas de } [T]_\beta^\alpha - \textit{posto}\, [T]_\beta^\alpha \end{aligned}$$

4.3 Composição de transformações lineares

Definição 200 *Se* $T_1 : V \to W$ *e* $T_2 : W \to U$ *são duas transformações lineares a composta das duas transformações lineares é definida do mesmo modo que a composição de funcões (lembre-se que um transformação linear é uma função com a propriedade adicional de ser linear) da seguinte forma*

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &: V \to U \\ (T_2 \circ T_1)(v) &= T_2(T_1(v)) \end{aligned}$$

Exemplo 201 *Se* $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y) = (x - y, y - x, y - x)$ *e* $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x - y - z$ *então* $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y) &= T_2(T_1(x, y)) \\ &= T_2(x - y, y - x, y - x) \\ &= (x - y) - (y - x) - (y - x) \\ &= x - y - y + x - y + x \\ &= 3x - 3y \end{aligned}$$

Teorema 202 *Sejam* $T_1 : V \to W$ *e* $T_2 : W \to U$ *transformações lineares e* α, β, γ *bases de* V, W, U *respectivamente. Então a composta de* T_2 *com* $T_1, T_2 \circ T_1 : V \to U$ *é linear e*

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T_1]^{\alpha}_{\beta}$$

Proposição 203 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear . Sejam* α *e* α' *bases de* V *e* β *e* β' *bases de* W*. Então vale a relação:*

$$[T]^{\alpha'}_{\beta'} = [I_W \circ T \circ I_V]^{\alpha'}_{\beta'} = [I_W]^{\beta}_{\beta'} [T]^{\alpha}_{\beta} [I_V]^{\alpha'}_{\alpha}$$

onde I_W e I_V são as aplicações identidades de W e V respectivamente.

4.4 A Inversa de uma transformação linear

Definição 204 *Dá-se o nome de* ***isomorfismo*** *a uma transformação linear* $T : V \to W$ *que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando há um isomorfismo entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são* ***Isomorfos.***

Definição 205 *Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Se existe uma transformação linear* $S : W \to V$ *tal que* $T \circ S = I_W$*, onde* $I_W : W \to W$ *é a identidade em* W*, dizemos que* S *é a inversa a direita de* T*. Se existe uma transformação* $R : W \to V$ *, tal que* $R \circ T = I_V$*, onde* $I_V : V \to V$ *é a identidade em* V*, dizemos que* R *é a inversa a esquerda de* T*.*

Definição 206 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe uma aplicação $T^{-1} : W \to V$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$ então dizemos que T é inversível e que T^{-1} é a inversa de T*

Proposição 207 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe a inversa de T, T^{-1}, então T^{-1} é uma transformação linear*

Proposição 208 *Se $T : V \to W$ é um isomomorfismo, então T é inversível e além disso T^{-1} também é um isomorfismo.*

Proposição 209 *Se $T : V \to W$ uma transformação linear invertível (T é um isomorfismo) e α e β são bases de V e W, então:*

$$\left[T^{-1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$$

Observação: Quando estamos trabalhando com o espaço $\mathbb{R}^n$ e a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por simplicidade omitimos as bases e a matriz de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,em relação a base canônica, é denotada simplesmente por $[T]$. Neste caso a proposição acima é escrita na forma mais conveniente: "Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é inversível então $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$"

Proposição 210 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, com $\dim V = \dim W$, e α e β bases de V e W respectivamente. Então T é inversível se, e somente se det $[T]_{\beta}^{\alpha} \neq 0$.*

Observação 211 *Se na proposição acima tivermos $V = W = \mathbb{R}^n$ podemos escrever: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então T é invertível se* $\det [T] \neq 0$

Exemplo 212 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + 3z, x + 2y + z)$, determine a transformação inversa T^{-1}.*

Solução: Facilmente podemos ver que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[T^{-1}\right] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo $T^{-1}(x, y, z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$. Como exercício verifique que vale $\left(T \circ T^{-1}\right)(x, y, z) = (x, y, z)$

Podemos também neste caso calcular a inversa usando diretamente a difinição de transformação inversa da seguinte forma

Sabemos que $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T^{-1} \circ T = I$ ou $T \circ T^{-1} = I$. Suponhamos que $T^{-1}(x, y, z) = (m, n, s)$, devemos encontrar

m, n e s tais que $T \circ T^{-1} = I$ (devemos usar esta igualdade pois com a outra não funciona, tente e veja o que acontece). Portanto

$$\begin{aligned}
\left(T \circ T^{-1}\right)(x,y,z) &= I(x,y,z) = (x,y,z) \\
T(T^{-1}(x,y,z)) &= (x,y,z) \\
T(m,n,s) &= (x,y,z) \\
(m+2n+2s, m+n+3s, m+2n+s) &= (x,y,z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m+2n+2s &= x \\
m+n+3s &= y \\
m+2n+s &= z
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} escalonando \\ \Longrightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
s &= x-z \\
n &= x-y+x-z = 2x-y-z \\
m &= x-2(2x-y-z)-2(x-z) = -5x+2y+4z
\end{aligned}$$

Logo

$$T^{-1}(x,y,z) = (-5x+2y+4z, 2x-y-z, x-z)$$

4.5 Nona lista de exercícios

1) Seja $T : V \to W$ uma função. Mostre que

a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.

b) Se $T(0) \neq 0$ então T não é uma tranformação linear.

2) Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$

c) $h : M(2, 2) \to \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

d) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(x) = |x|$.

3) Resolva os itens abaixo:

a) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.

b) Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

4) Sejam R, S, T tres transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Se

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ encontre}$$

T tal que $R = S \circ T$.

5) Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Encontre T

b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, encontre $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

c) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

a) Determine uma base do núcleo de T.

b) Dê a dimensão da imagem de T.

c) T é sobrejetora? Justifique.

d) Faça um desenho em $\mathbb{R}^3$ do conjunto de vetores que pertencem ao $\ker(T)$ e a $\mathrm{Im}(T)$.

7) Seja β a base canônica de M_2. Se $T : M_2 \to P_3$ é dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$$

a) Encontre $[T]^{\beta}_{\alpha}$ onde $\alpha = \left\{2, 2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3\right\}$ é base de P_3

b) Faça o escalonamento da matriz $[T]^{\beta}_{\alpha}$

c) Detemine dim $Ker(T)$

d) Determine dim $\mathrm{Im}(T)$.

8) Responda as seguintes questões:

a) Se $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ é uma transformação linear, podemos ter dim $\mathrm{Im}(T) > 6$?. Justifique sua resposta

b) Existe alguma tranformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,2)$ e $T(2,2) = (3,1)$? Justifique sua resposta.

9) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que

a) $T(u) = u$

b) $T(v) = -v$

10) Sejam as transformações lineares $S : P_1 \to P_2$ e $T : P_2 \to P_1$ definidas por

$$\begin{aligned} S(a+bx) &= a + (a+b)x + 2bx^2 \\ T(a+bx+cx^2) &= b + 2cx \end{aligned}$$

a) Determine $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$

b) É possível calcular $(T \circ S)(a+bx)$? Em caso afirmativo calcule $(T \circ S)(\pi + \pi x)$.

ALGUMAS SUGESTÕES

7) c) A dimensão de $Ker(T)$ é a nulidade de $[T]_\alpha^\beta$

7) d) A dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ é o posto de $[T]_\alpha^\beta$

Capítulo 5

OPERADORES LINEARES

Definição 213 *Uma transformação linear $T : V \to V$ é chamada de operador linear.*

Observação 214 *Todas as propriedades já vistas para transformações lineares em geral vale para um operador linear*

5.1 Transformações especiais no plano e no espaço

Os operadores lineares que veremos a seguir são chamados de transformações especiais do plano e do espaço por serem bastantes usados em aplicações práticas e também em aplicações numéricas.

Transformações no Plano

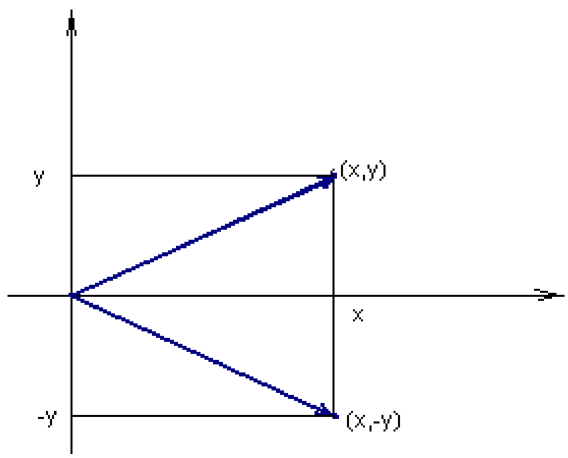
a) Reflexão em torno do eixo dos x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x,-y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



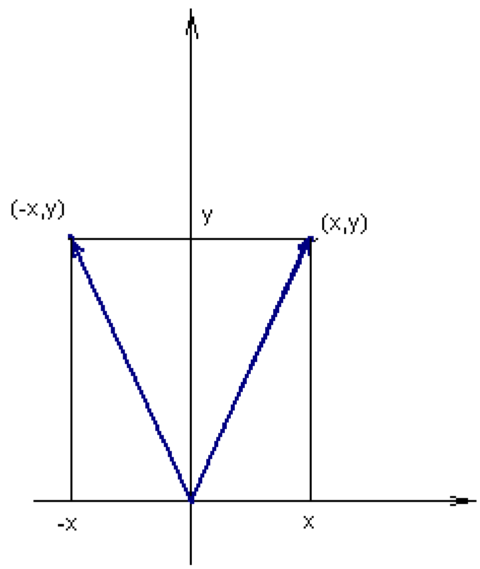
b) Reflexão em torno do eixo dos y

$$
\begin{aligned}
T \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
T(x,y) \quad &= \quad (-x,y)
\end{aligned}
$$

Matricialmente

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

Geometricamente:

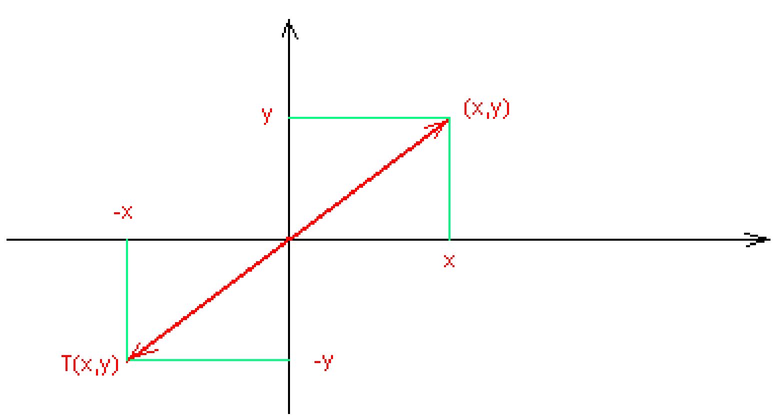


c) Reflexão na origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (-x,-y) \end{aligned}$$

Matricialmente
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



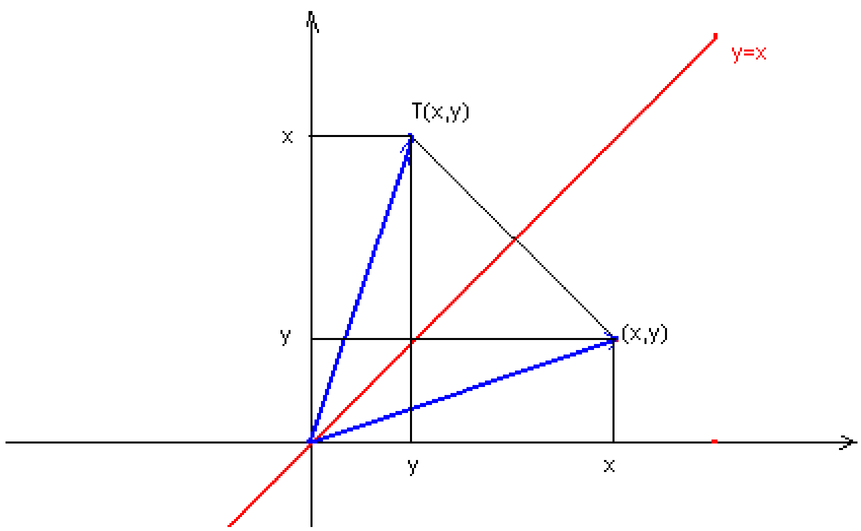
d) Reflexão em torno da reta $y = x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y) &= (y, x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



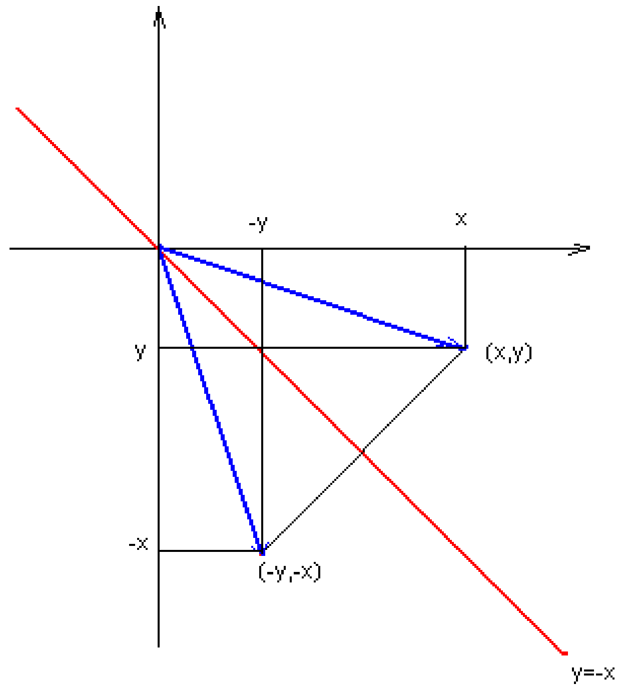
e) Reflexão em torno da reta $y = -x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y) &= (-y, -x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



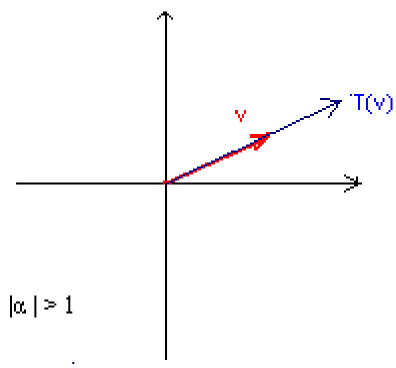
f) Dilatação ou contração

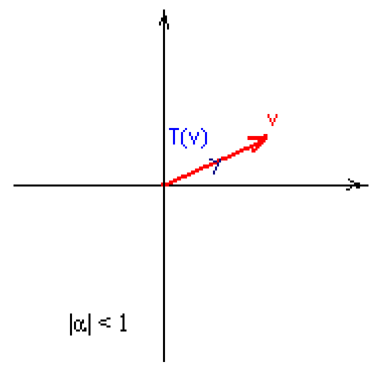
$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= \alpha(x,y) \end{aligned}$$

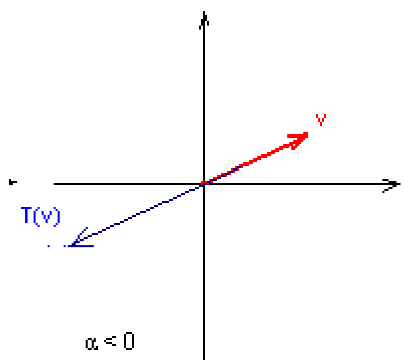
Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor
Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor
Se $\alpha = 1$, T é a identidade
Se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor
Se $\alpha > 0$, T mantém o mesmo sentido do vetor
Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:







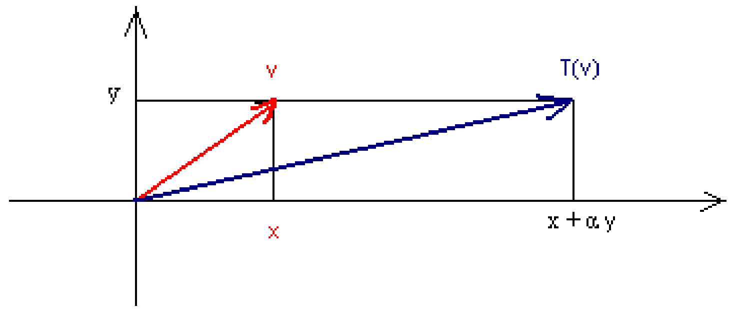
g) Cisalhamento na direção do eixo dos x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) &= (x+\alpha y, y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



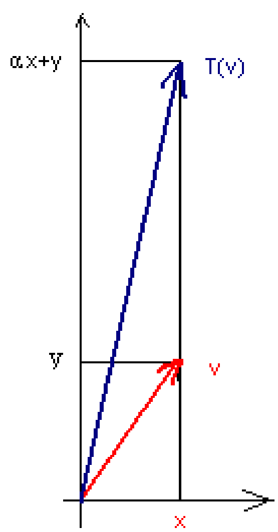
h) Cisalhamento na direção do eixo dos y

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) \quad &= \quad (x, \alpha x + y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



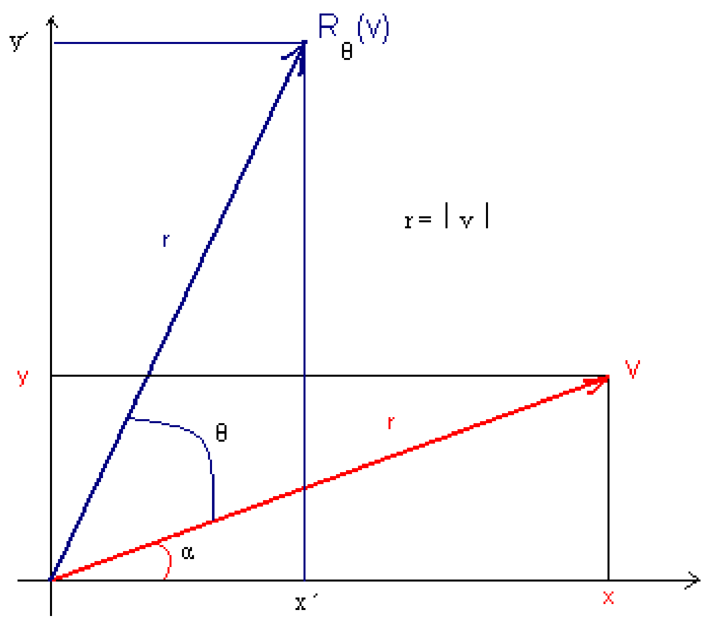
i) Rotação de um ângulo θ

Geometricamente

$$\begin{aligned} R_\theta &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ R_\theta(x,y) &= (x',y') \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a matriz da transformação linear rotação de um ângulo θ e a expressão de R_θ em função de x e y.

Quando rotacionamos um vetor, pela própria definição de rotação, o comprimento (módulo) do vetor não se altera. Seja $r = |v|$, onde $v = (x, y)$.



Da figura acima e usando relações trigonométricas temos;

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

Mas

$$\begin{aligned} r\cos\alpha &= x \\ r\sin\alpha &= y \end{aligned}$$

então

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

Analogamente

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\sin\theta \\ y' &= y\cos\theta + x\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Assim

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos ver neste caso que matriz de uma rotação é:

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Transformações no Espaço

a) Reflexão em relação aos planos coordenados

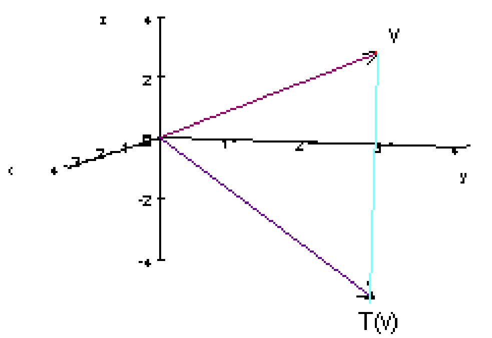
a.1) Plano xy

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



a.2) Plano xz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, -y, z) \end{aligned}$$

Matricialmente $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

a.3) Plano yz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Reflexão em relação aos eixos coordenados

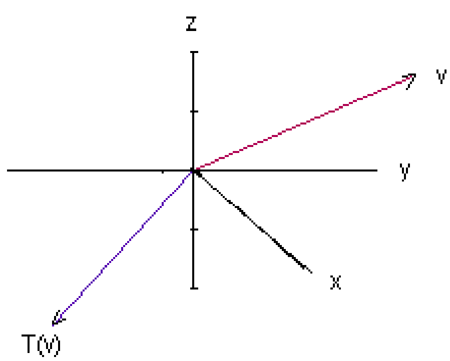
b.1) Em relação ao eixo x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x,-y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



b.2) Em relação ao eixo y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b.3) Em relação ao eixo z

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

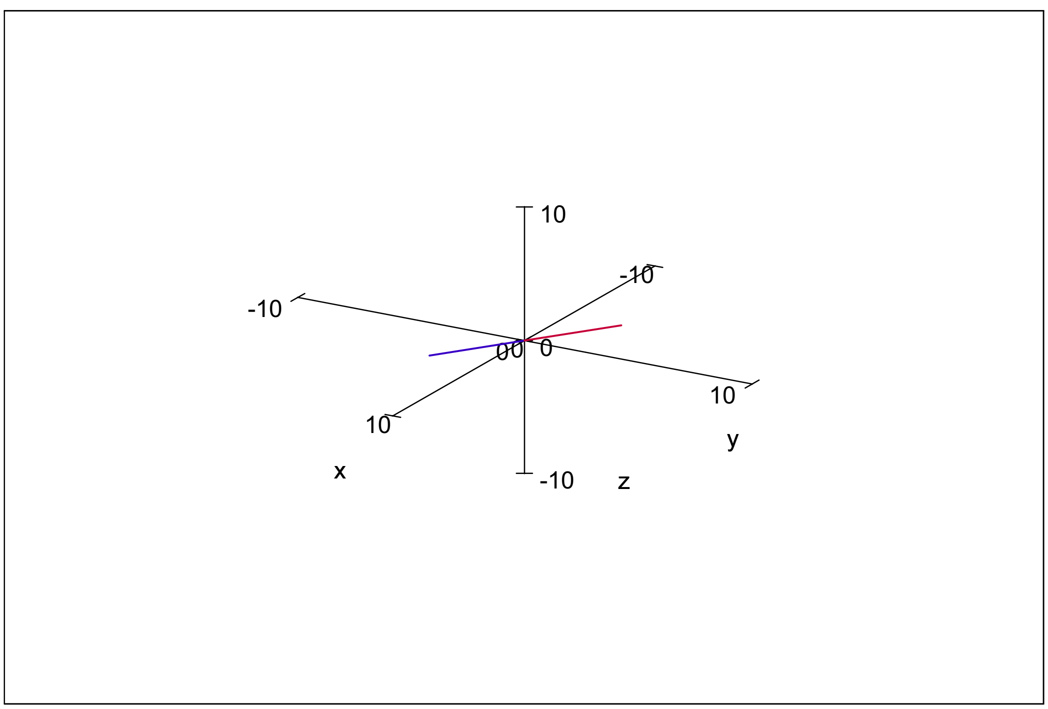
c) Reflexão no origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (-x,-y,-z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente

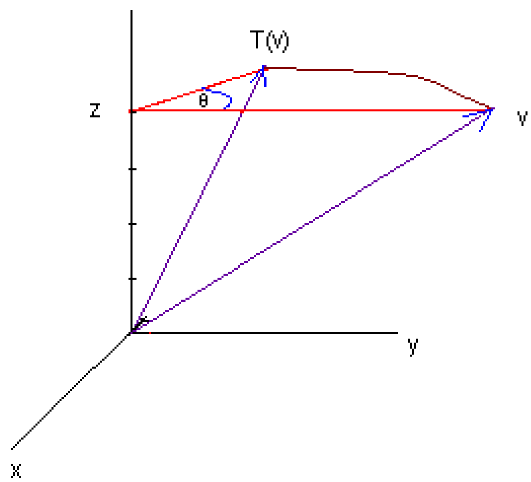


d) Rotação de um ângulo θ
d.1) Rotação em torno do eixo z

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Exemplo 215 *Determinar o ângulo formado entre v e $T(v)$ quando o vetor $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ gira em torno do eixo z de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad*

Solução:

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

$$[T(v)] = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'$$

Como desejamos o ângulo entre v e $T(v)$,vamos usar afórmula do cosseno do ângulo entre dois vetores:

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot T(v)}{|v|\,|T(v)|} = \frac{1}{2}$$

Portanto o ângulo entre v e $T(v)$ é $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

5.2 Propriedades dos operadores inversíveis

Definição 216 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existir um operador $T^{-1} : V \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (neste caso $I : V \to V$ é a identidade em V) então dizemos que o operador T é inversível e T^{-1} é o operador inverso de T.*

Observação 217 *Um operador é inversível se, e somente se, ele é um isomorfismo*

Seja $T : V \to V$ um operador linear:

I) Se T é inversível e T^{-1} sua inversa, então $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$

II) O operador T é inversível se, e somente se, $Ker(T) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

III) O operador T é inversível se, e somente se, $\det[T] \neq 0$

IV) Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V então $\beta = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é base de V.

Se T é inversível e β uma base de V então $T^{-1} : V \to V$ é linear $\left[T^{-1}\right]_\beta^\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^{-1}$. Quando β é a base canônica temos a forma mais simples $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$ e portanto $\left[T^{-1}\right] \cdot [T]^{-1} = \left[T^{-1} \circ T\right] = [I]$. Com isso vemos que T é inversível se e somente se $\det[T] \neq 0$.

Exemplo 218 *Considere o operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por*

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

verifique se T é inversível e em caso afirmativo encontre T^{-1}

Solução: Como $det\,[R_\theta] = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$, temos que R_θ é inversível. Como $\left[R_\theta^{-1}\right] = [R_\theta]^{-1}$, basta calcular a inversa da matriz deR_θ

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{matrix} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\ -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} & \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} \end{matrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Note que $[R_\theta]^{-1} = [R_\theta]^T$, ou seja, $[R_\theta]$ é uma matriz ortogonal, logo R_θ^{-1} : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ y\cos\theta - x\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1}(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta)$$

Exemplo 219 *Seja T o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal do vetor $v = (x,y,z)$ na direção da reta dada pela interseção dos planos $y = x+1$ e $z = y+3$. Verifique se T é inversível e em caso afirmativo determine T^{-1}.*

Solução: Para determinar a projeção na direção da reta basta determinar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor da reta. Devemos inicialmente determinar o vetor diretor da reta:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ z = y+3 \end{cases}$$

Para obter a equações paramétricas fazemos $x = t$, logo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t+4 \end{cases}$$

portando o vetor diretor da reta é $u = (1,1,1)$.

$$\begin{aligned}
T(v) &= proj_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\right) u \\
T(x,y,z) &= \left(\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}\right)(1,1,1) \\
T(x,y,z) &= \left(\frac{x+y+z}{3}\right)(1,1,1) \\
T(x,y,z) &= \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det [T] = 0$$

Como $\det [T] = 0$ temos que T não é inversível.

Exemplo 220 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma rotação de $\frac{\pi}{4}rad$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma reflexão em torno da reta $y = -2x$. Determine a transformação $R = S \circ T$.*

Solução

$$\begin{aligned}
R &= S \circ T \\
[R] &= [S]\,[T]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \\
[T] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(v) &= 2p - v \\
S(x,y) &= 2\left(\frac{(x,y)\cdot(1,-2)}{(1,-2)\cdot(1,-2)}\right)(1,-2) - (x,y) \\
S(x,y) &= \left(\frac{-3x-4y}{5}, \frac{-4x+3y}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
[R] &= [S]\,[T] \\
[R] &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
[R] &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{2} & \frac{7}{10}\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$R(x,y) = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}x - \frac{\sqrt{2}}{10}y, -\frac{\sqrt{2}}{10}x + \frac{7\sqrt{2}}{10}y \right)$$

5.2.1 Matrizes Semelhantes

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Sejam α e β bases de V e $[T]_\alpha^\alpha$, $[T]_\beta^\beta$ matrizes de T em relação as bases α e β respectivamente, então:

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha\,[T]_\alpha^\alpha\,[I]_\alpha^\beta$$

Lembrando que $[I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$ temos que

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha\,[T]_\alpha^\alpha\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

Chamando $[I]_\beta^\alpha = A$:

$$[T]_\beta^\beta = A\,[T]_\alpha^\alpha\,A^{-1}$$

Definição 221 *Dadas as matrizes A e B, se existe uma matriz P inversível tal que*

$$A = PBP^{-1}$$

então dizemos que as matrizes A e B são semelhantes.

Observação 222 *Se A e B são semelhantes então $detA = detB$, mas não vale a recíproca.*

5.3 Operadores autoadjuntos e ortogonais

Definição 223 *Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T : V \to V$ um operador linear. Então:*

a) T é chamado um *operador auto-adjunto* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica
b) T é chamado um *operador ortogonal* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal

Observação 224 *Consideraremos aqui apenas os operadores $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com o produto escalar usual (que é um produto interno no espaço $\mathbb{R}^n$).*

Observação 225 *Uma base* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *é ortonormal se* $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Portanto podemos dizer que um operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador auto-adjunto se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz simétrica. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *operador ortogonal se* $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz ortogonal.

Exemplo 226 *Consideremos a transformação* : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, a rotação de um ângulo* θ *em torno do eixo* z*.*

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

A matriz da transformação T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esta é uma matriz ortogonal, T é um operador ortogonal

Exemplo 227 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *onde* $T(x, .y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$*. A matriz de* T *é*

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de T *é simétrica, então* T *é um operador simétrico.*

Teorema 228 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear. Se* T *é um operador auto-adjunto então*

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 229 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

a) T é ortogonal
b) T preserva o produto escalar, isto é, $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w, \ \forall v, w \in \mathbb{R}$
c) T preserva o módulo, isto é, $|T(v)| = |v|$
d) T transforma bases ortonornais em bases ortonormais. Isto é, se $\{v_{1,}v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonornal então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base ortonornal

5.4 Décima lista de exercicios

1) Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$
a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal
b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $T(v) \bullet w = v \bullet T(w)$

2) Seja A é uma matriz de ordem n fixada. Seja $T : M_n \to M_n$ definida por $T(N) = AN - NA$. Mostre que T não é inversível.

3) Se $T : V \to V$ é um operador linear e $T^2 - T - I = 0$ mostre que T é inversíve

4) Sejam $T : V \to V$ é um operador linear e α e β bases distintas de V. Mostre que $\det [T]_\alpha^\alpha = \det [T]_\beta^\beta$

5) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6) Se A e B são semelhantes mostre que $A - I$ e $B - I$ são semelhantes.

7) a) Encontre a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.

b) Escreva-a em forma matricial.

8) No plano, uma rotação anti-horária de 45^0 é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

9) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a projeção de vetor v no plano $x+y+z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

10) Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $x + y + z = 0$. Encontre $L(x, y, z)$.

11) Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y. Encontre $A(x, y, z)$.

12) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x - z\right\}$

13) Determine se a transformação $T(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ é uma transformação auto-adjunta ou ortogonal. Justifique sua resposta.

14) Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.Encontre a matriz P tal que

$[T]_\alpha^\alpha = P\, [T]_\beta^\beta\, P^{-1}$.

15) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 2x - z\right\}$.

SUGESTÕES

2) Sugestão: Mostre que T não é injetora.

7) Sugestão: Use a projeção do vetor genérico (x, y) sobre algum vetor que está sobre a reta $y = 6x$ e a adição de veotres.(Lembre-se que a projeção de um vetor $\overrightarrow{u}$ na direção de um vetor $\overrightarrow{v}$ é dada por $proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \left(\frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}}\right)\overrightarrow{v}$).

8) Lembre-se que a composição de transformações pode ser obtida pela multiplicação de suas matrizes (em relação a base canônica)

9) Faça a projeção do vetor (x, y, z) na direção do vetor normal do plano. Use a definição de projeção e a adição de vetores.

10) Sugestão: Cosidere a projeção do vetor genérico (x, y, z) na direção do vetor normal do plano dado. Use a definição de reflexão e adição de vetores.

14) Utilize as matrizes mudança de base