

Álgebra dos Vetores

por

Milton Procópio de Borba

I - Vetores no Plano - Retas - Distâncias

1.1. Ponto: $P(x,y) \Rightarrow$ unidimensional

1.2. Vetor: $v = [x,y]$

$$\text{módulo} = |v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

direção = reta passando por $O(0,0)$ e $P(x,y)$ ou paralela
sentido = de O para P

2.a) Soma / diferença: $[a,b] \pm [x,y] = [a \pm x, b \pm y]$

2.b) Múltiplo (paralelo): $k.[x,y] = [kx, ky]$, se k é escalar

2.c) Produto escalar: $[a,b].[x,y] = ax + by$ (= escalar)
 $v.w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \beta$

1.3 Vetores Básicos: $i = [1, 0]$ = unitário na direção OX
 $j = [0, 1]$ = unitário na direção OY
 $v = [a, b] = a.i + b.j$

1.4. Relação Ponto - Vetor:

Mais geralmente, se v é o vetor que vai do ponto $A(a,b)$ para o ponto $B(x,y)$, então
 $v = [x-a, y-b] = [x,y] - [a,b] = V_B - V_A \Rightarrow V_B = V_A + v$

1.5. Distância entre pontos $A(x,y)$ e $B(a,b)$: $D_{AB} = |V_B - V_A|$

1.6. Reta R que passa pelo ponto P , na direção do vetor v :

$$V_R = V_P + t.v, \text{ para todo } t \text{ real} \Rightarrow \text{infinitos pontos}$$

1.7. Interseção entre retas R_1 e R_2 : $R = R_1 = R_2 \Rightarrow t_1 = ? \quad t_2 = ? \Rightarrow R = ?$

1.8. Paralelismo entre retas: $v_1 = k.v_2$

1.9. Ângulo entre retas: $\cos \beta = (v_1.v_2)/(|v_1| \cdot |v_2|)$

perpendicularismo: $v_1.v_2 = 0$

1.10. Projeção de um vetor u na direção de outro v : $P_v(u) = u.v/|v|$

1.11. Distância entre ponto e reta e entre retas:

11.a) Determina-se o vetor perpendicular $w = [b, -a]$

11.b) Equaciona-se a reta perpendicular R_p

11.c) Determina-se a interseção entre R e R_p

11.d) Calcula-se a distância entre pontos.

II - Vetores no Espaço - Retas - Planos

2.1. Vetor: $v = [x, y, z]$

$$\text{módulo} = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

direção = reta passando por $O(0, 0, 0)$ e $P(x, y, z)$ ou paralela

sentido = de O para P

1.a) Soma / diferença:

$$[a, b, c] \pm [x, y, z] = [a \pm x, b \pm y, c \pm z]$$

1.b) Múltiplo (paralelo): $k \cdot [x, y, z] = [kx, ky, kz]$, se k é escalar

1.c) Produto escalar: $[a, b, c] \cdot [x, y, z] = ax + by + cz$ (= escalar)

$$v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \beta$$

1.d) Produto Vetorial: entre dois vetores u e $v = u \times v$

é o vetor perpendicular a ambos, com módulo igual à área do paralelogramo formado por u e v , e sentido obedecendo à **regra da mão direita**: Fazendo os dedos maiores indicarem a rotação de u para v , o polegar apontará o sentido de $u \times v$.

Observação: se u e v são paralelos, então $u \times v = 0$.

1.e) Produto misto: entre três vetores u, v e $w = u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$

é o escalar, com módulo igual ao volume do paralelepípedo que tem as três arestas concorrentes u, v e w .

Observações: se u, v e w são coplanares, então $u \cdot (v \times w) = 0$.

$$u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w = [u, v, w] = -[v, w, u]$$

2.2. Vetores Básicos: $i = [1, 0, 0]$ $i \times j = k = -j \times i$
 $j = [0, 1, 0]$ $j \times k = i = -k \times j$
 $k = [0, 0, 1]$ $k \times i = j = -i \times k$

$$v = [a, b, c] = a.i + b.j + c.k$$

2.3. Regra Prática para
 $u \times v = [a, b, c] \times [x, y, z] = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz-cy)i - (az-cx)j + (ay-bx)k$
 $= [(bz-cy), (az-cx), (ay-bx)].$

2.4. Reta R que passa pelo ponto P , na direção do vetor v :

$$V_R = V_P + t.v, \text{ para todo } t \text{ real} \Rightarrow \text{infinitos pontos}$$

2.5. Plano P que passa por A , na direção dos vetores u e v :

$$V_P = V_A + t.u + s.v, \text{ para todos os reais } t \text{ e } s \Rightarrow \text{infinitas retas coplanares}$$

$u \times v$ será o vetor perpendicular ao plano P .

Alguns livros em PDF podem ser vistos na página do professor [Reginaldo de Jesus Santos](#)