Primeira Prova de ALG – 9/abril/2007 – Prof. Milton

1) Losango é o paralelogramo com os quatro lados iguais. Represente-os por vetores e mostre que as suas diagonais se cruzam perpendicularmente ao meio delas.

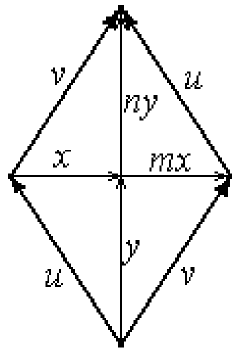
2) Escreva o vetor [*5, 6, 7*] como combinação linear de [***1, 2, 0***], [***2, 0, 3***] e [***0, 3, 4***].

3) Apresente um vetor de módulo 4, perpendicular ao eixo ***OZ*** e paralelo ao plano $\boldsymbol{2x - y = 5z}$.

4) Apresente três pontos não colineares (justifique esta não colinearidade). Mostre como calcular a área, o perímetro e os ângulos deste triângulo (ou, se preferir, calcule).

5) Qual a posição relativa entre $\boldsymbol{R(t)}$ = [$\boldsymbol{1 + t, 3 - 2t, 5 + 4t}$] e $\boldsymbol{x - 2y + 4z = 6}$?

========================== Gabarito: ===============================



1) Vamos chamar $x + mx = X$ e $y + ny = Y$ e mostrar que $X.Y = 0$.

Então: $Y = u + v$

$v = u + X \Rightarrow X = v - u$

Neste caso: $X.Y = (v-u).(u+v) = v.u + v.v - u.u - u.v = |v|^2 - |u|^2 = 0$

Portanto, $X \perp Y$.

Para ver que se cruzam ao meio, vamos mostrar que $m = n = 1$.

Já vimos que: $y + ny = u + v \Rightarrow -y - ny = -v - u$

$\underline{x + mx = v - u}$

$x + mx - y - ny = -2u$

Como $u + x = y$ temos que $u = y - x$. Substituindo na equação acima:

$x + mx - y - ny = -2(y - x) \Rightarrow x + mx - 2x = y + ny - 2y \Rightarrow (m-1)\, x = (n-1)y$

Como y e x não são paralelos, só podemos ter $m - 1 = n - 1 = 0$.

2) [***5, 6,*** *7*] = *a* [***1, 2, 0***] + *b* [***2, 0, 3***] + *c* [***0, 3, 4***] $\Rightarrow$

$$a + 2b = 5$$
$$2a + 3c = 6$$
$$3b + 4c = 7$$

$a = \frac{51}{25}$, $b = \frac{37}{25}$ $c = \frac{16}{25}$ $\Rightarrow$ [***5, 6,*** *7*] = $\frac{51}{25}$ [***1, 2, 0***] + $\frac{37}{25}$ [***2, 0, 3***] + $\frac{16}{25}$ [***0, 3, 4***]

3) Este vetor $\boldsymbol{p}$ deve ser $\perp$ $\vec{k} = [0, 0, 1]$ e também $\perp$ $N = [2, -1, -5]$.

Então $\boldsymbol{p} = m(\vec{k} \times N) = m[1, 2, 0\,] = [m, 2m, 0\,]$.

Como $|\boldsymbol{p}| = 4$, então, $|\boldsymbol{p}|^2 = m^2 + 4m^2 = 5m^2 = 16 \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \boldsymbol{p} = [\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}, 0\,]$

4) Sejam A, B e C os três pontos. Fazemos, por exemplo: $u = B-A$, $v = C-A$ e $w = C - B$.

Se u não for paralelo a v então A, B e C são não colineares. Neste caso:

<u>*Perímetro*</u> $= |u| + |v| + |w|$.

<u>*Área*</u> $= \frac{|u \times w|}{2}$

<u>*Ângulos:*</u> $A = arc\ cos\ \frac{u\ .\ v}{|u||v|}$, $B = arc\ cos\ \frac{u\ .\ w}{|u||w|}$ $e\ C = 180^o - A - B$

5) O vetor "da" reta é [***1, -2, 4***] // ("o mesmo") normal ao plano.

Portanto, reta perpendicular ao plano. Para saber o ponto de interseção, queremos descobrir o valor do parâmetro t que faz o ponto $\boldsymbol{P(1 + t, 3 - 2t, 5 + 4t)}$ pertencer ao plano $\boldsymbol{x - 2y + 4z = 6}$. Ou Seja:

$\boldsymbol{(1+t) - 2(3 - 2t) + 4(5+4t) = 6 \Rightarrow t} = \frac{-3}{7}$. Substituindo em P. obtemos as suas coordenadas.

<u>*Conclusão*</u>: A reta intercepta o plano perpendicularmente no ponto $\boldsymbol{P}$ ($\frac{4}{7}, \frac{27}{7}, \frac{23}{7}$).