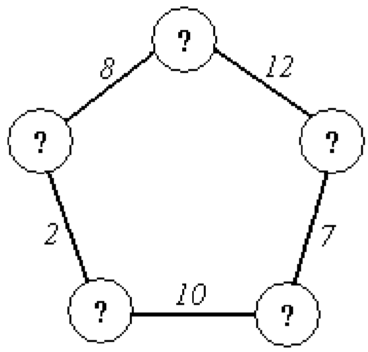
Terceira Prova de ALG – Prof. Milton – 1º de maio de 2007

1) Discuta e *resolva* (*no caso de sistema possível*): a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 14 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4u - 3v = 7 \\ 2u + 5v = -9 \\ 8u + 7v = -11 \\ 6u - 11v = 23 \end{vmatrix}$

2) Preencha os vértices (**?**) com números *reais* tais que a soma de dois consecutivos deles seja o número dado no lado que une estes vértices.

Mostre que com quaisquer destes números dados, sempre é possível preencher os vértices de uma única maneira.



3) Apresente todas as possibilidades de resultados na *discussão* de um sistema de *4* equações lineares com *3* incógnitas.

4) Mostre que a inversa de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ é $\begin{vmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3{,}5 & -1{,}5 & -1 \end{vmatrix}$ e use este fato para resolver

$$\begin{vmatrix} 7x + 3y + 2z = 10 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 2t \end{vmatrix}$$

5) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F), JUSTIFICANDO:

( ) Se X e Y são matrizes *quadradas* então $det(X \times Y) = det(X) \times det(Y)$.

( ) Para um sistema ser *indeterminado*, depois de escalonado e abandonadas as linhas nulas, deve aparecer menos linhas do que incógnitas.

( ) Mesmo que M seja uma matriz quadrada, o sistema $MX = B$ pode ser *impossível*, *indeterminado* ou *determinado*.

( ) Para um sistema ser *impossível*, depois de escalonado deve aparecer uma linha do tipo $|\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ k\ |$ com $k \neq 0$

Gabarito:

1) a)

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 3 & -2 \\ -10 & 14 & 5 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1{,}4 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ -10 & 14 & 5 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1{,}4 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1{,}4 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} z = 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x = -0{,}4 + 1{,}4y \end{vmatrix}$$

Indeterminado
Posto = 2
Gr. Lib. = 1

b)

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & -9 \\ 8 & 7 & -11 \\ 6 & -11 & 23 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -0{,}75 & 1{,}75 \\ 2 & 5 & -9 \\ 8 & 7 & -11 \\ 6 & -11 & 23 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -0{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & 6{,}5 & -12{,}5 \\ 0 & 13 & -25 \\ 0 & -6{,}5 & 12{,}5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -0{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & \mathbf{1} & -1{,}923 \\ 0 & 13 & -25 \\ 0 & -6{,}5 & 12{,}5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -0{,}75 & 1{,}75 \\ 0 & \mathbf{1} & -1{,}923 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

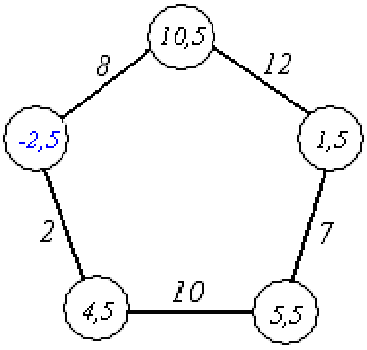
Determinado; Posto = 2; Gr. Lib. = 0; $u = \frac{4}{13} \approx 0{,}308$; $v = \frac{-25}{13} \approx -1{,}923$

2)

$$\left|\begin{array}{l} x+y=12 \\ y+z=7 \\ z+u=10 \\ u+v=2 \\ x+v=8 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2{,}5 \end{array}\right|$$

$v = -2{,}5$



Independente dos números dados, o sistema será sempre

Determinado

Posto = 5

Gr. Lib. = 0

3)

$$\text{ou} \left|\begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & A \end{array}\right|$$

Posto = 3

Grau de Liberdade = 0

➔ *Sistema DETERMINADO, se A = 0*

➔ *Sistema IMPOSSÍVEL, se* $A \neq 0$

$$\text{ou} \left|\begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & C \end{array}\right|$$

Posto = 2

Grau de Liberdade = 1

Sistema INDETERMINADO (B = C = 0)

➔ *se* $B \neq 0$ *, IMPOSSÍVEL*

➔ *se* $C \neq 0$ *, IMPOSSÍVEL*

$$\text{ou} \left|\begin{array}{cccc} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & F \end{array}\right|$$

Sistema INDETERMINADO (D = E = F = 0)

Posto = 1

Grau de Liberdade = 2

➔ *se* $D \neq 0$ *, IMPOSSÍVEL*

➔ *se* $E \neq 0$ *, IMPOSSÍVEL*

➔ *se* $F \neq 0$ *, IMPOSSÍVEL*

4)

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{ccc} -6 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3{,}5 & -1{,}5 & -1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} 7x + 3y + 2z = 10 \\ 4x + 2y + z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 2t \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l} -6x - 3y - 2z = -2t \\ 4x + 2y + z = 0 \\ -3{,}5x - 1{,}5y - z = -5 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} -6 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3{,}5 & -1{,}5 & -1 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -2t \\ 0 \\ -5 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c} -2t \\ 0 \\ -5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -2t + 10 \\ 2t - 20 \\ 4t \end{array}\right|$$

5) (*F*) Se X e Y não forem do mesmo tamanho, será impossível calcular $X \times Y$
Seria verdadeiro, se X e Y fossem do mesmo tamanho.

(*V*) Ser *indeterminado*, significa *Gr. Lib.* > 0.
Posto + Gr. Lib. = num.. inc. ➔ *Gr. Lib. = núm.. inc – Posto > 0* . ➔ *num.. inc > Posto*
➔ *Posto < num.. inc* ➔ *num. lin. < num.. inc*

(*V*) O *posto* pode ser < *num. eq. = num.. inc* ➔ *Impossível* ou *indeterminado*
= *num. eq. = num.. inc* ➔ *Determinado*

(*V*) | $0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; k$ | com $k \neq 0$ *significa:* $0x + 0y + 0z + \ldots + 0w = k \neq 0$ *(Impossível)*
Sem aparecer uma linha deste tipo, ou teremos *Determinado* ou *indeterminado*