Quarta Prova de ALG – Ciência da Computação – 2 de julho de 2007

1) Verifique se os conjuntos dados formam um espaço vetorial.
Justifique a sua resposta e, em caso positivo, exiba uma base e a dimensão:

A) O conjunto dos vetores do $\Re^3$; com módulo 1.
B) O conjunto dos polinômios de *grau* ≤ 4 cujos gráficos das derivadas "*passam* por $(1,0)$".

2) Considere $U = \{[\, x , y , z \,] \in \Re^3$, perpendiculares ao *eixo* $OX \}$ e
$V = \{[\, x , y , z \,] \in \Re^3, y + z = 0\}$
Determine uma base para $V + U$ e uma para $V \cap U$.

3) Escreva a matriz $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$ como combinação linear das matrizes $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

4) Se T é linear, $T[1 , 0] = x^2 + 5$ e $T[0 , 1] = 2 - x$, então $T[a , b] = ?$ Qual o núcleo de T?

5) Seja $T(p) = p'' + p$, para todo polinômio de grau ≤ 2.
a) Esta transformação é linear?
b) Se SIM, apresente a matriz correspondente numa base adequada;
c) Se NÃO, justifique a resposta.

==

Gabarito:

1) A) $u = [1, 0, 0]$ tem módulo 1, mas $2u = [2, 0, 0]$ não tem módulo 1. Logo, *não é Espaço Vetorial*.

B) Seja p um tal polinômio. Então $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
Se o gráfico de p' passar por $(1,0)$ então $p'(1) = 4a + 3b + 2c + d = 0 \rightarrow d = -4a - 3b - 2c$.
Assim, $p = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (4a + 3b + 2c)x + e = a(x^4-4x) + b(x^3-3x) + c(x^2-2x) + e$.
Logo, p pertence ao *espaço gerado* pelos polinômios (x^4-4x), (x^3-3x), $(x^2-2x) + 1$.
Como este conjunto é *LI*, serve de *Base:* $\{ (x^4-4x) , (x^3-3x) , (x^2-2x) + 1\}$. *Dimensão = 4*.

2) Se $u \in U$ então, $u = [0 , y , z] = y[0 , 1 , 0] + z[0 , 0 , 1] \rightarrow$ Base $(U) = \{ [0 , 1 , 0] , [0 , 0 , 1] \}$
Se $v \in V$ então, $v = [x , y , -y] = x[1 , 0 , 0] + y[0 , 1 , -1] \rightarrow$ Base $(V) = \{ [1 , 0 , 0] , [0 , 1 , -1] \}$
Assim, $V + U$ é gerado pelo conjunto $\{[0 , 1 , 0] , [0 , 0 , 1] , [1 , 0 , 0] , [0 , 1 , -1]\}$, não *LI*.
Logo, uma base para $V + U$ é o conjunto $\{[0 , 1 , 0] , [0 , 0 , 1] , [1 , 0 , 0]\}$.

Também, se $w \in V \cap U$, então $w = [0 , y , -y] = y[0 , 1 , -1]$.
Logo, uma base para $V \cap U$ é o conjunto $\{[0 , 1 , -1]\}$.

3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = \dfrac{13}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

4) $T[a , b] = T(a[1 , 0] + b[0 , 1]) = a\,T[1 , 0] + b\,T[0 , 1] = a(x^2 + 5) + b(2 - x) = ax^2 - bx + 5a + 2b$.
$T[a , b] = ax^2 - bx + 5a + 2b. = 0x^2 + 0x + 0 \rightarrow a = 0$
$b = 0$
$5a + 2b = 0 \rightarrow$ Núcleo de $T = \{[0 , 0]\}$

5) Se p é de grau ≤ 2, então $p = ax^2 + bx + c$ e $T(p) = p'' + p = 2a + ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c + 2a$.
Matricialmente, se usarmos a base *canônica* $\{ x^2, x, 1\}$, temos que

$$p = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \rightarrow T(p) = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c+2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$