## Determinantes

Histórico: Embora tenha-se registro de publicação chinesa referente a resolução de sistemas de equações através de matrizes em 250 AC, no ocidente o assunto começou a ser estudado no século XVII através de trabalhos de Leibniz, Cramer, Maclaurin, Lagrange e outros. Só no século XIX o assunto determinante mereceu um estudo mais sistemático através de trabalhos de Cauchy e Jacobi.

**Determinante**: Número associado a uma matriz quadrada.

**Representação**: Sendo a matriz A = $[a_{ij}]$, seu determinante pode ser dado por det A ou $|A|$ ou det$[a_{ij}]$.

**Ordem**: A ordem de um determinante é definida em função da ordem da matriz a qual está associado.

Ex.: A = $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -1 & \pi \end{bmatrix}$ ➔ detA tem ordem 2, pois A = $[a_{ij}]_{2x2}$.

**Cálculo do Determinante**:

- 1ª Ordem: det [a] = a — Ex.: det [-3] = -3
- 2ª Ordem: det $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ — Ex.: det $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ = 2.4 – (-1).3 = 11
- 3ª Ordem (Regra de Sarrus):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Dois métodos de visualização podem ajudar no cálculo do determinante de ordem 3:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hdashline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\right|$$

Ex.: det $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ = -12 + 0 – (-2) – (0) – (-45) = 15

**Método para rebaixamento de ordem de determinantes**
Precisaremos, a princípio, ver dois conceitos:
Usando como referencial uma matriz de ordem 3:

A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

- **Menor Complementar ($D_{ij}$)**
  Menor complementar da matriz A, pelo elemento $a_{ij}$, é o determinante associado à matriz quadrada que se obtém de A, suprimindo a linha e a coluna que contêm o elemento $a_{ij}$ considerado. Assim, por exemplo:

  $D_{11}$ = det $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ = -2 – 0 = -2 — $D_{32}$ = det $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 – (-4) = 4

- **Cofator ($C_{ij}$)**
  Denomina-se cofator do elemento $a_{ij}$ de A o número real:

  $$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}}$$

Assim:

$C_{13} = (-1)^{1+3}$ . det$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ = 1.(-7 + 12) = 5 $C_{32} = (-1)^{3+2}$.det$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ = -1. (0 + 4) = -4

**Definição de Laplace**
O determinante de uma matriz de ordem n ≥ 2, é a soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores.
Ex.: Dada a matriz

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

**Propriedades dos determinantes**

Seja M uma matriz quadrada de ordem ≥ 2

1. Seja $M^t$ a matriz transposta de M, então: **det $M^t$ = det M**
2. Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer da matriz M forem nulos, então: **det M = 0**
3. Seja M' a matriz gerada pela troca de posição de duas linhas ou duas colunas, então: **det M' = - det M**
4. Se a matriz M tem uma linha gerada pela combinação linear de outras linhas, então: **det M = 0** (o mesmo valendo para colunas)
5. Se a matriz M tem duas filas proporcionais, então: **det M = 0** (o mesmo valendo para colunas)
6. **Teorema de Binet**: Se A e B são duas matrizes de ordem "n", então: **det (A . B) = det A . det B**
7. Se M é uma matriz triangular ($a_{ij}$ = 0 se i < j ou $a_{ij}$ = 0 se i > j), então: **det M = $\Pi(a_{ij})$** (produto dos elementos da diagonal principal)

**EXERCÍCIOS DE DETERMINANTES**

1) Calcule o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix}$. Resp.: *(zero)*

2) Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:
a) det A Resp.: *(2)* Resp.: *(2)*
b) det $A^2$ Resp.: *(4)* Resp.: *(4)*
c) det $A^{-1}$ Resp.: *(1/2)* Resp.: *(1/2)*

**3)** Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule o valor de N, sabendo que N= 50 + det(A . B). Resp.: *(50)*

4) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule o determinante do produto $A^t$ . B Resp.: *(zero)*

5) Resolva as equações:

a) det $\begin{vmatrix} x-2 & x+3 & x-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 60 Resp.: *{10}*

b) det $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 5 & x & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 12 Resp.: *{3, 2}*

6) Ache o valor do determinante da matriz $P^2$, sabendo que P = $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ Resp.: *(64)*

7) Usando as propriedades, calcule (justifique sua resposta):

a) det $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ Resp.: *(0)*

b) det $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Resp.: *(0)*

c) det $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 9 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ Resp.: *(120)*

d) det $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ Resp.: *(0)*

8) Calcule:

a) o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1-x^2 & -1 & x+1 \\ 1+x^2 & 2+x & 4 \end{bmatrix} - x.\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1-x \\ -x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

onde $x \in$ R. Resp.: *(3x2 – 3x- 6)*

b) os valores de x que anulam o determinante de A . Resp.: *(-1 ou 2)*

9) Calcule o valor do determinante de:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ Resp.: *(4)*

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Resp.: *(-25)*

10) Calcule o determinante da matriz M = (AB).C, sendo A = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $e$

C = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Resp.: *(zero)*