Instituto Superior Tupy
SOCIESC
Educação e Tecnologia

Sistemas de equações Lineares

Equação Linear
Toda equação do tipo: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b$

Onde: $\begin{cases} a_{11}, a_{12}, ... , a_{1n} & \text{são os coeficientes;} \\ x_1, x_2, ..., x_n & \text{são as incógnitas;} \\ b & \text{é o termo independente.} \end{cases}$

Ex.: $\begin{cases} 3a + 4b - c + 2d = 1 \\ 5x - y + 3z = 0 \end{cases}$

- Equação Linear homogênea – quando o termo independente é nulo (b = 0)
- Uma equação linear não apresenta termos x^2, $x_1.x_2$, ... , cada termo tem uma única incógnita com expoente 1.

Solução de uma equação linear:
A sequência ordenada ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) é uma solução se
$a_{11}(\alpha_1) + a_{12}(\alpha_2) + ...+ a_{1n}(\alpha_n) = b$ for sentença verdadeira.

Ex.: Dada a equação $x - 3y + 2z - t = -8$
A seqüência (2, 1, -1, 5) é solução pois $(2) - 3(1) + 2(-1) - (5) = -8$.

Sistema Linear
Conjunto de m (m≥1) equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sua apresentação na forma matricial: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$

Ex.: a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solução de um sistema:
A sequência ordenada ($\alpha_1, \alpha_2, ... , \alpha_n$) será solução do sistema,
se for solução de todas equações envolvidas no mesmo.

Sistemas Equivalentes

São sistemas que admitem a mesma solução.

Ex.: Determine m e n, de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$$

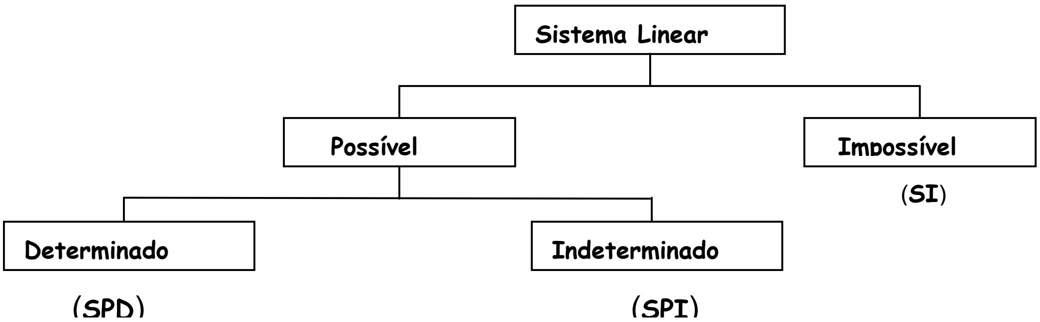
Sistema Homogêneo

Quando os termos independentes de todas equações envolvidas no sistema forem nulos.

Ex.: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$

Obs.: A sequência ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) onde $\alpha_i = 0$ sempre será solução de um sistema homogêneo, chamada de **Solução Trivial**.

Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções:

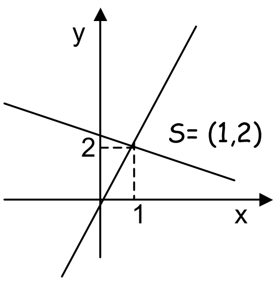


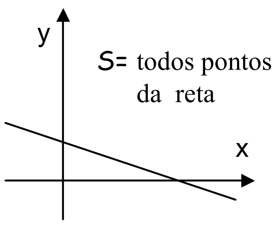
Onde:

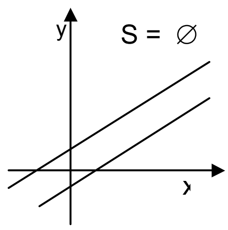
- **SPD** ➔ Admite solução única (compatível)
- **SPI** ➔ Admite infinitas soluções
- **SI** ➔ Não admite solução (incompatível)

Ex.: Sem perda de generalidade, usaremos sistemas no R^2 para representar os 3 casos.

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 3 \end{cases}$







Retas concorrentes Retas coincidentes Retas paralelas

Obs.: A idéia é similar para outras dimensões.

Métodos de resolução:

- Método de Cramer

Seja um sistema linear quadrado na forma matricial. Considerando D o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas e Di o determinante da matriz modificada através da troca da i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes, podemos achar o conjunto solução fazendo:

$$\alpha_i = \frac{Di}{D} \quad \forall i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \quad \text{onde } D \neq 0 \quad \left(\text{ou } \alpha_i = \frac{\det A_i}{\det A}\right)$$

Assim temos: se $\det A \neq 0 \rightarrow$ SPD

$\det A = 0$ e $\det A_i = 0 \rightarrow$ SPI

$\det A = 0$ e $\det A_i \neq 0 \rightarrow$ SI

Ex.: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

- Método da matriz inversa

Vimos que todo sistema linear, quando exposto na forma matricial, apresenta o seguinte formato:

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

Onde: **A** = Matriz dos coeficientes (quadrada)

X = Matriz das incógnitas

B = Matriz dos termos independentes

Podemos achar a matriz X, fazendo:

$$\{X\} = \frac{\{B\}}{[A]} \qquad \text{Ou melhor} \qquad \{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

Assim podemos achar as incógnitas, usando o produto da matriz inversa de A pela matriz dos termos independentes.

Ex.: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$

- Método de Gauss

Precisamos ver alguns conceitos com antecedência:

Matriz escalonada

Dada a matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$, dizemos que A é uma matriz escalonada se o números de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta, linha por linha, até que restem eventualmente apenas linhas nulas.

Ex.:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 7\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Matriz linha equivalente
Dizemos que a matriz A' é **linha equivalente** à matriz A, se ela for obtida através de uma sequência finita de operações elementares sobre linhas:

- Troca de posição de duas linhas;
- Multiplicação de uma linha qualquer por um número $k\neq 0$;
- Substituição de uma linha, pela soma desta com outra qualquer.

O método de Gauss se apoia no princípio de formar um sistema equivalente simplificado através da leitura da matriz ampliada escalonada , que possibilita a determinação das incógnitas do sistema.
Ex.:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1\\ x-y+z+t=-1\\ y-z+2t=2\\ 2x+z-t=-1\end{cases}$$

Exercícios

1) Determine k para que o sistema $\begin{cases}3x+y=k^2-9\\ x-2y=k+3\end{cases}$, seja homogêneo Resp.: *(k = -3)*

2) Determine a e b, de modo que sejam equivalentes: $\begin{cases}x-y=0\\ x+y=2\end{cases}$ e $\begin{cases}ax+by=1\\ bx-ay=1\end{cases}$ Resp.: *(0,1)*

3) Identifique os tipos de sistemas e determine uma de suas soluções se possível.

a) $\begin{cases}a+b+c=12\\ 3a-b+2c=14\\ 2a-2b+c=-3\end{cases}$ Resp.: *SI*

b) $\begin{cases}x+y-z+t=0\\ x-y+z-t=2\\ -x+y+z-t=-4\\ x-y-z-t=-4\end{cases}$ Resp.: *SPD (1, -2, 3, 4)*

c) $\begin{cases}4x-3y+z=3\\ 3x+y+4z=-1\\ 5x-2y+3z=2\end{cases}$ Resp.: *SPI (-z, -1-z, z)*

4) Para o sistema homogêneo, determine uma solução não nula $\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x-3y+z=0\\ x-4y+2z=0\end{cases}$

Resp.: $(\frac{2z}{5}, \frac{3z}{5}, z)$

5) Determine os valores de a, de modo que o seguinte sistema na incógnitas x, y e z tenha:

a) nenhuma solução,
b) mais de uma solução,
c) solução única.

i) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$ Resp.: S = $\begin{cases} SI - a = -3 \\ SPI - a = 2 \\ SPD - a \neq -3 \;\; e \quad a \neq 2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$ Resp.: S = $\begin{cases} SI - a = -2 \\ SPI - a = 1 \\ SPD - a \neq -2 \;\; e \quad a \neq 1 \end{cases}$

6) Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que sejam possíveis os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = a \\ 6x + 11y + 8z = b \\ 2x + 7y = c \end{cases}$ Resp.: *(2a – b + c = 0)*

b) $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$ Resp.: *(c – b – a = 0)*