ESPAÇO VETORIAL REAL

Seja um conjunto *V*, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de *adição e multiplicação por escalar*, isto é:

$\forall\, u, v \in V, u + v \in V$

$\forall\, a \in \mathbf{R}, \forall\, u \in V, au \in V$

O conjunto V com estas duas operações é chamado *espaço vetorial real* se forem verificados os seguintes axiomas:

a) Em relação à adição:

$(u + v) + w = u + (v + w), \forall\, u, v, w \in V$

$u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$

$\exists\, 0 \in V, \forall\, u \in V$, tal que $u + 0 = u$

$\forall\, u \in V, \exists\, (-u) \in V, u + (-u) = 0$

b) Em relação à multiplicação:

$(ab)\, v = a(bv)$

$(a + b)\, v = av + bv$

$a\,(u + v) = au + av$

$1u = u,$

para $\forall\, u, v \in V$ e $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$

- Os elementos *u, v, w,...*, de um espaço vetorial V são denominados *vetores*.
- Se a definição de espaço vetorial considerasse como escalares o conjunto C dos números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo*. Entretanto serão considerados somente espaços vetoriais reais.
- Por Ter sido dada a definição de forma genérica, para um espaço vetorial V qualquer, ela serve para conjuntos diversos, tais como, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, o conjunto das matrizes $\mathbf{M}_{(m,\, n)}$, etc. Assim, conforme seja o espaço vetorial considerado, os vetores terão a natureza dos elementos desse espaço e os conjuntos correspondentes terão a mesma "estrutura" em relação às operações de adição e multiplicação por escalar.

EXEMPLOS

1) O conjunto $V = \mathbf{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbf{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:
   $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
   $a.(x, y) = (ax, ay)$

Essas operações são denominadas *operações usuais*.

Para verificar os oito axiomas de espaço vetorial, sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$.

A_1) $(u + v) + w = u + (v + w)$

A_2) $u + v = v + u$

A_3) $\exists\ 0 = (0, 0) \in \mathbf{R}^2, \forall\ u \in \mathbf{R}^2, u + 0 = u$

A_4) $\forall\ u = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \exists\ (-u) = (-x_1, -x_2) \in \mathbf{R}^2, u + (-u) = 0$

M_5) $(ab)\ v = a(bv)$

M_6) $(a + b)\ v = av + bv$

M_7) $a\ (u + v) = au + av$

M_8) $1u = u$

Para $\nabla u, v \in V$ e $\nabla a, b \in \mathbf{R}$.

Obs.: Os elementos do espaço vetorial V serão chamados *vetores*, independentemente da sua natureza, polinômios, matrizes, números. As operações de adição e multiplicação por escalar realizadas com esses elementos se comportam de forma idêntica, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbf{R}^2$ ou do $\mathbf{R}^3$.

Propriedades:

I) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

II) Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.

III) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$.

IV) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se $-(-v) = v$, isto é, o oposto de $-v$ é v.

V) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ tal que: $u + x = v$; esse vetor x será representado por $x = v - u$.

VI) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $0v = 0$. Naturalmente, o primeiro zero é o número real zero, e o segundo é o vetor $0 \in V$.

VII) Qualquer que seja $\lambda \in \mathbf{R}$, tem-se: $\lambda 0 = 0$.

VIII) $\lambda 0 = 0$ implica $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

IX) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $(-1)v = -v$

X) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, tem-se: $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$

EXERCÍCIO

Seja $\mathbf{R}^2 = \{(a, b)/\ a, b \in \mathbf{R}\}$, verificar se $\mathbf{R}^2$ é espaço vetorial em relação às operações assim definidas:

1) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k(a, b) = (ka, b)$

2) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $k(a, b) = (ka, kb)$

3) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$

SUBESPAÇOS VETORIAIS

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto S é um *subespaço vetorial* de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema: Um subconjunto S, *não vazio*, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se estiverem satisfeitas as condições:

I) Para quaisquer $u, v \in S$, tem-se: $u + v \in S$.

II) Para quaisquer $\alpha \in \mathbf{R}$, $u \in S$, tem-se: $\alpha u \in S$.

Obs.: Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial. Esses dois são os subespaços *triviais* de V. Os demais subespaços são denominados subespaços *próprios* de V.
Por exemplo, os subespaços triviais de $V = \mathbf{R}^3$ são $\{(0, 0, 0)\}$e o próprio $\mathbf{R}^3$**.** Os subespaços próprios do $\mathbf{R}^3$ são as retas e os planos que passam pela origem.
Para $V = \mathbf{R}^2$, os subespaços triviais são: $\{(0, 0)\}$ e $\mathbf{R}^2$, enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.

Exemplos:

1) $V = \mathbf{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i \in \mathbf{R}\}$. Isto é, W é o conjunto dos vetores de $\mathbf{R}^5$, cuja primeira coordenada é nula. Verificar se W é subespaço de $\mathbf{R}^5$.

<u>1º condição</u>:

$u = (\ 0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $v = (\ 0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$.
Então $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ que ainda pertence a W, pois tem a primeira coordenada nula.

<u>2º condição</u>:

k**u** = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) $\in$ W, pois a primeira coordenada é nula para todo k $\in$ **R**.

Assim, W é um subespaço de $\mathbf{R}^5$.

2) Sejam V = R^3 e $S = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, y = 2x - z\}$, determine se S é subespaço vetorial. Aqui fica dispensável verificar que S é conjunto não vazio e também apresenta o vetor nulo (x = 0 e z = 0). Pela lei dada, o vetor de S tem a característica: (x, 2x – z, z).

<u>1º condição</u>:

Sejam u e v pertencente a S, onde $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - z_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 - z_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

Fazendo u + v teremos: $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$

Portanto $u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ tem todas as características de S.

<u>2º condição</u>:

Sejam u pertencente à V e k um número real, teremos:
$w = k.u$

$w = \begin{bmatrix} kx_1 \\ k(2x_1 - z_1) \\ kz_1 \end{bmatrix}$ ou $w = \begin{bmatrix} kx_1 \\ 2kx_1 - kz_1 \\ kz_1 \end{bmatrix}$

Vemos que, decididamente, nas duas operações w mantém as características de S.

Dessa forma, S é um subespaço.

3) Sejam V = M(3, 1) e S o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo a três variáveis. Verificar se o sistema é subespaço vetorial de M(3, 1):

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Fazendo: A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o sistema em notação matricial, será dado por AX = 0, sendo X elemento do conjunto solução S.

Se $u = X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $v = X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, temos como solução:

$AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$.

<u>1º condição</u>: Somando essas igualdades, vem:
$AX_1 + AX_2 = 0$
$A(X_1 + X_2) = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in S$
Isto é, a soma de duas soluções é ainda uma solução do sistema.

<u>2º condição:</u>

$\alpha(AX_1) = \alpha 0$
$A(\alpha X_1) = 0 \Rightarrow \alpha X_1 \in S$
Isto é o produto de uma constante por uma solução é ainda uma solução.

Logo, o conjunto-solução do sistema linear homogêneo é um subespaço vetorial de M(3, 1)

4) Sejam V = R² e $S = \{(x, y) \in R^2 \,/\, y = 3x - 1\}$, determine se S é subespaço vetorial.

<u>1º condição</u>:

Sejam u e v pertencentes a S onde: $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 - 1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ 3x_2 - 1 \end{bmatrix}$

Então $u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3(x_1 + x_2) - 2 \end{bmatrix}$

Portanto a 1º condição já falha.

<u>2º condição:</u>

Seja k $\in$ R , então $k.u = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_1 - k \end{bmatrix}$

A 2º condição também falha

Portanto podemos garantir que S não é um subespaço

EXERCÍCIO:

Verifique se é ou não um subespaço vetorial:

1) Sejam V = $\mathbf{R}^2$ e S = $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y = 2x\}$ ou S = $\{(x, 2x); x \in \mathbf{R}\}$.
2) Sejam V = $\mathbf{R}^4$ e S = $\{(a, b, 0, 0); a, b \in \mathbf{R}\}$.

3) Sejam U = $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4; 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

4) W = $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a,b,c,d \in R \text{ e } b = c\right\}$

5) W=$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a,b,c,d \in R \text{ e } b = c + 1\right\}$

COMBINAÇÃO LINEAR

O objetivo principal do uso de combinação linear é a obtenção de novos vetores a partir da combinação das duas operações anteriores com vetores dados.

Definição: Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2,..., v_n \in V$ e $a_1, a_2,..., a_n$ escalares (reais ou complexas) .
Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

é chamado de uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_n$.

Ex.: O vetor $u = (-4, -18, 7)$ do espaço R^3 é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$ do R^3, pois:

$$u = 2.v_1 - 3.v_2$$
$$u = 2.(1, -3, 2) - 3(2, 4, -1)$$
$$u = (2, -6, 4) + (-6, -12, 3)$$
$$u = (-4, -18, 7)$$

EXERCÍCIOS:

Verificar se é possível escrever v como combinação linear, justifique:

1) No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2, o polinômio $v = 7x^2 + 11x - 26$, pode ser escrito como combinação linear de $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $v_2 = -2x^2 + 5x - 8$?

2) Sendo $v = (4, 3, -6)$ é possível escrever **v** como combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$?

3) Determinar k para que o vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

4) Escreva $v = (1, -2, 5)$ como combinação linear dos vetores $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ e $e_3 = (2, -1, 1)$.

5) Escreva a matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR (LI E LD)

Sabemos que podemos gerar um subespaço vetorial através de combinação linear entre vetores, nossa preocupação é de saber se não existe nenhum vetor descartável (supérfluo) nesta combinação.

Definição: Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ (espaço vetorial). Dizemos que o conjunto $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ é **linearmente independente** (LI), ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI se a equação:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$ implica que $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$

Se existir algum $a_i \neq 0$ que satisfaça a equação, dizemos que $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ é **linearmente dependente** (LD).
Prova:

Seja a equação :

$a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + \ldots + a_nv_n = 0$ supondo algum coeficiente qualquer $a_i \neq 0$, chamaremos de a_k então podemos reescrever a equação como :

$a_kv_k = -a_1v_1 - \ldots - a_{k-1}v_{k-1} - a_{k+1}v_{k+1} - \ldots - a_nv_n$

$v_k = - 1/a_k (a_1v_1 + \ldots + a_{k-1}v_{k-1} + a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_nv_n)$

Assim vemos que o vetor v_k pode ser obtido da combinação linear dos demais.

Portanto concluímos que $\{v_1,....,v_k,...., v_n\}$ é LD

Exemplificando de forma mais palpável.
Podemos imaginar o espaço R^1, vemos que qualquer conjunto de dois ou mais vetores não nulos, tornam-se LD, todos serão colineares ou proporcionais.
O mesmo problema ocorre no R^2, com três ou mais vetores coplanares, pois bastariam dois vetores não alinhados para formar todo o plano.
Exemplos:
1) No espaço R^2 , verificar se os vetores $u=(2,\ 0)$ e $v=(1,-3\ )$ são LI.

$$a_1.u+a_2.v=0$$

$$a_1.\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+a_2.\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a_1+a_2\\-3a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Estamos diante de um sistema homogêneo com única solução : $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$
Portanto $\{ u, v \}$ são LI.

Obs:
Como sempre a análise passa por um sistema homogêneo, e normalmente "quadrado" (número de vetores igual a dimensão do espaço), podemos usar o conceito de **Cramer** para a análise do sistema, isto é, usando o valor do determinante da matriz formada pelos vetores dispostos em colunas :

- Se $\mathbf{D = 0}$ então o sistema é SPI portanto **LD**;
- Se $\mathbf{D \neq 0}$ então o sistema é SPD portanto **LI**.

Assim o exercício anterior seria analisado :

$\begin{vmatrix}2 & 1\\0 & -3\end{vmatrix}=-6-0=-6$ que é <u>diferente de zero</u> , portanto são **LI**

2) Verificar se é LD: $\{1 + 2x - x^2, 2 - x + 3x^2, 3 - 4x + 7x^2\}$

EXERCÍCIOS:

1) Verifique se são LD ou LI
a) $u = (1, -1, -2)$, $v = (2, 1, 1)$ e $w = (-1, 0, 3)$ *(LI)*
b) $u = (0, 1, 0, -1)$, $v = (1, 1, 1, 1)$, $w = (1, 2, 0, 1)$, $z = (1, 2, 1, 0)$ *(LD)*
c) $1 + 3x + x^2$, $2 - x - x^2$, $1 - 2x - 3x^2$, $-2 + x + 3x^2$ *(LD)*
d) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 0, -2)$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ *(LD)*
e) $v_1 = (2, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 4, -2)$ *(LI)*

f) A $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}$ *(LD)*

g) A $= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *(LI)*

2) Determine o valor de k para que seja LI o conjunto { (-1, 0, 2), (1, 1, 1), (k, -2, 0)} *($k \neq -3$)*

3) Determine k para que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$ seja LD *($k = 3$)*

BASE DE UM ESPAÇO VEORIAL

Definição:
Um conjunto { v_1, v_2..., v_n } será uma base para o espaço vetorial **V** se atender duas condições:

i) { v_1, v_2 ... , v_n} é LI
ii) [v_1, v_2 ... , v_n] = V (gera o espaço)

Em outras palavras, base é o conjunto de vetores necessários para gerar o espaço vetorial V.

Ex.:
1) O espaço V = R² com os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$
{ e_1 , e_2 } é base de V , pois além de gerar qualquer vetor de V, é LI.
I) $a_1 . e_1 + a_2 . e_2 = 0$
$a_1 (1, 0) + a_2 (0, 1) = (0, 0)$
$(a_1, 0) + (0, a_2) = (0, 0)$
$(a_1, a_2) = (0, 0)$
II) V gera R^2, pois (x, y) = x (1, 0)+ y (0, 1)

Esta base é chamada de **base canônica.**

2) Sejam os vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Mostrar que o conjunto B = { v_1, v_2, v_3} é uma base do R^3.

3) Mostrar que B = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de M(2,2)

EXERCÍCIOS

1) Verificar quais dos vetores formam uma base:
a) {(1, 2), (-1, 3)}
b) {(0, 0), (2, 3)}
c) {(3, -1), (2, 3)} (a, c)

2) Para que valores de k o conjunto $\beta = \{(1, k), (k, 4)\}$ é base de R^2 ? ($k \neq \pm 2$)

3) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base do R^3:

a) (1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)
b) (1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4) (a)

4) Quais dos conjuntos de vetores formam uma base de P_2 ?

a) $2t^2 + t - 4, t^2 - 3t + 1$
b) $2, 1 - x, 1 + x^2$
c) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$ (b, c)

5) Mostrar que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de M(2, 2).

6) Mostrar que o conjunto {(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 3), (0, 0, 0, 5)} é base de R^4.

COMPONENTES DE UM VETOR

Sejam $\beta = \{ v1, v2, ..., vn\}$ base de V, então qualquer vetor de V pode ser escrito como

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n \,.$$

Os coeficientes a1, a2,..., an , representarão as coordenadas de v em relação à base β e denotado por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Ex.: 1) Considerando o vetor v.

Na base canônica = { e_1, e_2 }, ficaria graficamente representado:

$$v = 2.e_1 + 3.e_2$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ na base canônica} \quad \text{onde } e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O mesmo vetor representado numa base $\beta = \{ v_1, v_2 \}$ onde $v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

ficaria assim $v = \frac{5}{6} v_1 + \frac{13}{12} v_2$

Podendo ser representado por $[v]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \\ \frac{13}{12} \end{bmatrix}$

Estas coordenadas poderiam ser calculada a partir da combinação linear :

$$a.v_1 + b.v_2 = v$$

$$a.\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad onde \qquad a = \frac{5}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 5a - 2b \\ a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b = \frac{13}{12}$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre o vetor coordenada de v = (4, -3, 2) em relação à base: {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} do R^3.

2) Seja o espaço vetorial das matrizes 2 x 2 sobre R. Encontre o vetor coordenada da matriz A ∈ V em relação à base β, nos casos:

a) β = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$

3) Calcular o vetor coordenada de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$, sendo $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 1 - 3x + 2x^2$ e $p_3 = 2 - x + 5x^2$

4) Determine o vetor coordenada de v = (6, 2) em relação às bases:

a) $\alpha = \{(3, 0), (0, 2)\}$

b) $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$

c) $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$

5) No espaço vetorial R^3, consideremos a base B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)}. Determine o vetor coordenada de $v \in R^3$ em relação à base B se:

a) v = (2, -3, 4)

b) v = (1, -1, 1)

MUDANÇA DE BASE

Muitas vezes, problemas de engenharia tornam-se mais simples quando fazemos uma mudança conveniente de referencial.

Uma vez escolhido o novo referencial, temos que desenvolver um mecanismo que relacione os dois referenciais, podendo dessa forma mudar de referencial no instante desejado.

O desenvolvimento a seguir tem tal objetivo.

Sejam $B_1 = \{ u_1, u_2, ..., u_n \}$ e $B_2 = \{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ duas bases de um espaço vetorial V. Então um vetor $w \in V$ pode ser escrito das seguintes formas:

$$w = x_1.u_1 + x_2.u_2 + ... + x_n.u_n \quad \text{ou} \quad [w]_{B1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$w = y_1.v_1 + y_2.v_2 + ... + y_n.v_n \quad \text{ou} \quad [w]_{B2} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Assim podemos escrever a relação:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Obs: Tanto B_1 como B_2, geram qualquer vetor de V, pelo fato de serem bases, são constituídas de vetores num número igual a dimensão do espaço V, portanto as matrizes dos vetores das bases são quadradas e admitem inversa (det. $\neq 0$).

Sem perda de generalidade, podemos escrever a relação acima usando o espaço R^2.

Sejam $B_1 = \{ u_1, u_2 \}$ e $B_2 = \{ v_1, v_2 \}$ bases do espaço R^2, onde:

$$u_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad u_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Qualquer vetor w de R^2 pode ser escrito como:

$$w = x_1.u_1 + x_2.u_2 \qquad \text{ou} \qquad [w]_{B1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$w = y_1.v_1 + y_2.v_2 \qquad \text{ou} \qquad [w]_{B2} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Daí tiramos que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

E ainda:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[w]_{B1} = [\ I\ ]_{B1}^{B2} . \ [w]_{B2} \qquad \text{com} \qquad [\ I\ ]_{B1}^{B2} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix}$$

Onde $[\ I\ ]_{B1}^{B2}$ é a **matriz mudança de base** B_2 para B_1

Dessa forma podemos escrever qualquer vetor ,do espaço R^2, que tenham coordenadas na base B_2 para coordenadas referente a base B_1.

Obs.: A transformação inversa , isto é, passar da base B_1 para a base B_2, será feita pela inversão da matriz mudança de base , nesse caso , representada por $[\ I\ ]_{B2}^{B1}$.

A matriz mudança de base B_2 para a base B_1 é constituída , na realidade, pelas coordenadas dos vetores da base B_2 em relação a base B_1 , dispostas em colunas.

$$[\ I\ ]_{B1}^{B2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad [v_1]_{B1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad e \quad [v_2]_{B_1} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Ex.: Sejam $B_1 = \{(1,1),(0,2)\}$ e $B_2 = \{(-1,0),(1,2)\}$ bases do R^2 . Determine a matriz mudança de base B_1 para base B_2 e defina as coordenadas do vetor $[w]_{B1}=(-3,4)$ na base B_2.

EXERCÍCIOS:

1. Sejam B= {(1, 0), (0, 1)}, B_1 = {(1, 1), (- 1, 0)}, B_2 = {(-1, 1), (2, -3)}, bases do $\mathbf{R}^2$. Determine as matrizes mudança de base:

   a) $[I]_B^{B_1}$, $b)$ $[I]_{B_2}^{B}$ a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b)\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Considerando as seguintes bases do $\mathbf{R}^3$

   A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} e B = {(1, 0, -1), (0, 1, -1), (-1, 1, 1)}, determine:

a) A matriz mudança de base de A para B;
b) o vetor v_B, sendo v_A = (1, 2, 3). v_B = (7, -4, 6)

3. Se $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ache:

a) $[v]_\alpha$ onde $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

b) $[v]_\beta$ onde $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Sabendo que: $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$ e B = {(3, 5), (1, 2)}, determine a base A.

A= {(1, 3), (1, -2)}

5. Sabendo que: $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}$ e A = {(1, 3), (2, -4)}, determine a base B.

B = {(3, -2), (-2, 1)}

6. Mostrar que para qualquer base A de um espaço vetorial, a matriz mudança de base $[I]_A^A$ é a matriz identidade.