EXEMPLOS:

1) Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = (3,\ 4,\ 5)$ determine:

a) $\vec{u} \times \vec{w}$

b) $\vec{w} \times \vec{u}$

c) $|\ \vec{u} \times \vec{w}\ |$

d) $\vec{u} \times \vec{u}$

2) Considerando os vetores $\vec{u}$ = (1, –1, – 4) e $\vec{w}$ = (3, 2, –2), determine um vetor que seja:

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (simultaneamente);

b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e unitário;

c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e que tenha módulo 4;

d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e que tenha cota igual a 7.

a) Resolução: Um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ simultaneamente é o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$ que chamaremos de $\vec{t}$. Então:

$$\vec{t} = \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k} - (-3\vec{k} - 8\vec{i} - 2\vec{j}) \quad \therefore \quad \vec{t} = 10\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{t} = (10, -10, 5)$$

b) Resolução: Um dos vetores unitários é o versor de $\vec{t}$. Inicialmente calculamos: $|\ \vec{t}\ | = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2 + (5)^2} = 15$

Calculando o versor de $\vec{t}$ teremos: $vers\ \vec{t} = \dfrac{\vec{t}}{|\ \vec{t}\ |} = \dfrac{(10, -10, 5)}{15} = \left(\dfrac{10}{15}, -\dfrac{10}{15}, \dfrac{5}{15}\right) \ \therefore vers\ \vec{t} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

c) Resolução: Para que um vetor (que chamaremos de $\vec{v}$) seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ simultaneamente e tenha módulo 4, basta fazermos:

$$\vec{v} = 4.vers\ \vec{t} = 4.\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \ \therefore \vec{v} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

d) Resolução: Todos os vetores simultaneamente ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são "múltiplos" de $\vec{u} \times \vec{w}$ e, portanto, são da forma $m.(10, -10, 5)$ com $m \in R$. Chamando o vetor procurado de $\vec{p}$ temos:

$\vec{p} = m.(10, -10, 5) = (10m, -10m, 5m)$ Como o vetor $\vec{p}$ deve ter cota (z) igual a 7, fazemos: $5m = 7 \ \therefore \ m = 7/5$.

Reescrevendo o vetor $\vec{p}$ encontraremos: $\vec{p} = m.(10, -10, 5) = \dfrac{7}{5}.(10, -10, 5) = \left(\dfrac{70}{5}, -\dfrac{70}{5}, \dfrac{35}{5}\right) \ \therefore \ \vec{p} = (14, -14, 7)$

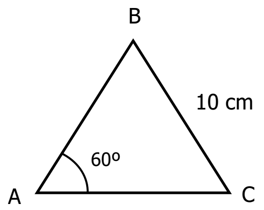
3) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, –1, 0) e C(4, 2, –2), determine:

a) a área do triângulo ABC

b) a altura do triângulo ABC relativa ao vértice C.

4) Seja o triângulo eqüilátero ABC de lado 10 cm. Determine a sua área utilizando os conceitos de produto vetorial.

Resolução:



Aplicando a fórmula do módulo de um produto vetorial, temos:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{AC}\right| .sen\,\theta$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 10\ .\ 10.\ sen\,60^{o}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 100.\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

Sabemos que a área de um triângulo pode ser calculada através do módulo do produto vetorial dos vetores que compõem o triângulo. Assim temos:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \cong 43{,}30$$

Então, a área do triângulo eqüilátero ABC é aproximadamente 43,30 cm^2.

Para refletir: Podemos escolher o que semear, mas somos obrigados a colher aquilo que plantamos. (Provérbio chinês)

EXERCÍCIOS – Produto Vetorial

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v}$ = (2, 4, –1) e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determine:

a) $|\ \vec{u}\times\vec{u}\ |$

b) $(2\vec{v})\times(3\vec{v})$

c) $(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{w}\times\vec{u})$

d) $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{v}\times\vec{u})$

e) $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{w}$

f) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

g) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

h) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})$

i) $(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

j) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}$

k) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

l) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

Observação: Alguns dos casos acima podem ser resolvidos apenas com uma análise prévia.

2) Dados os pontos A(2, 1, –1), B(3, 0, 1) e C(2, –1, –3), determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}$.

3) Sejam os vetores $\vec{u}$ = (1, –2, 1), $\vec{v}$ = (1, 1, 1) e $\vec{w}$ = (1, 0, –1).

a) Utilize o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.

b) Utilize o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

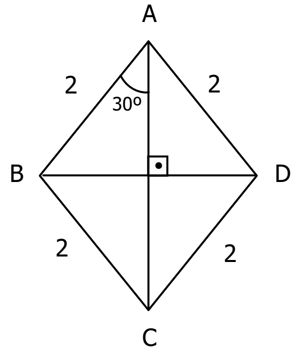
c) Mostre que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{0}$.

4) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, –1, 1) e C(4, 1, –2).

5) Dados os vetores $\vec{u}$ = (1, 1, 0) e $\vec{v}$ = (–1, 1, 2), determinar:
a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

6) Determinar um vetor de módulo 2, ortogonal a $\vec{u}$ = (3, 2, 2) e a $\vec{v}$ = (0, 1, 1).

7) Com base na figura ao lado, calcular:



a) $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$ **b)** $\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$ **c)** $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}\right|$
d) $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\right|$ **e)** $\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{AC}\right|$ **f)** $\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CD}\right|$

8) Determinar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sabendo que | $\vec{u}\times\vec{v}$ | = 12, | $\vec{u}$ | = 13 e que $\vec{v}$ é unitário.

9) Dados os vetores $\vec{u}$ = (3, –1, 2) e $\vec{v}$ = (–2, 2, 1), calcular:
a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

10) Calcular a área do paralelogramo definido pelos pontos A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(–1, 2, –2) e D(–2, 3, –1).

11) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são os pontos A(2, – 4, 0) e B(1, –3, –1) e o ponto médio das diagonais é M(3, 2, –2). Calcule a área do referido paralelogramo.

12) Sabendo que | $\vec{u}$ | = 6, | $\vec{v}$ | = 4 e 30º o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:
a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e ($-\vec{v}$).

13) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC. Considere: A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0).

14) Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R, e calcule a área do triângulo PQR. Considere: P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1) e R(2, 0, 2).

15) Calcular o valor de "m" para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ = (m, –3, 1) e $\vec{v}$ = (1, –2, 2) seja $\sqrt{26}$.

16) Calcular "z", sabendo-se que A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, z) são vértices de um triângulo de área 6.

17) Dados A(2, 1, –1) e B(0, 2, 1), determine o ponto C do eixo Oy, de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 ua.

18) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa pelos pontos A(1, 2, –1) e B(3, 1, 1).

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) 0 **1b)** $\vec{0}$ **1c)** $\vec{0}$ **1d)** $\vec{0}$ **1e)** (–5, 0, –5) **1f)** (–1, –23, –1) **1g)** (–6, –20, 1) **1h)** (8, –2, 13) **1i)** (8, –2, 13)

1j) 0 **1k)** 5 **1l)** 5 **2)** D(– 4, –1, 1) **4)** Um deles: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ = (12, –3, 10) **5a)** $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5b) $\left(\pm\frac{5}{\sqrt{3}},\mp\frac{5}{\sqrt{3}},\pm\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ **6)** $\left(0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ ou $\left(0,-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ **7a)** $2\sqrt{3}$ **7b)** $2\sqrt{3}$ **7c)** 0 **7d)** 0

7e) $4\sqrt{3}$ **7f)** $2\sqrt{3}$ **8)** 5 ou –5 **9a)** $3\sqrt{10}$ ua **9b)** $\sqrt{10}$ uc **10)** $\sqrt{122}$ ua **11)** $2\sqrt{74}$ ua

12a) 6 ua **12b)** 12 ua **13)** $\frac{7}{2}$ ua e $\frac{7}{\sqrt{5}}$ uc **14)** t.(1, 4, 6) com $t\in\mathbb{R}$ e $\frac{\sqrt{53}}{2}$ ua **15)** 0 ou 2 **16)** 4 ou – 4

17) C(0, 1, 0) ou C(0 , $\frac{5}{2}$, 0) **18)** $\frac{\sqrt{65}}{3}$ uc

---

Para refletir: O conhecimento amplia a vida. Conhecer é viver uma realidade que a ignorância impede desfrutar. (Pensamento Logosófico)