

Lista de espaços Vetoriais

por

Milton Procopio de Borba

Nos problemas de 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

$$1) \mathbb{R}^3, (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$2) \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\} \text{ com as operações usuais}$$

$$3) \mathbb{R}^2, (a, b) + (c, d) = (a, b) \text{ e } \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$$4) \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } \alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$$

$$5) \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } \alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$$

$$6) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5x\} \text{ com as operações usuais}$$

$$7) A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M(2, 2) / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ com as operações usuais}$$

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$ relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

$$8) S = \{(x, y) / y = -x\}$$

$$9) S = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$$

$$10) S = \{(x, y) / x + 3y = 0\}$$

$$11) S = \{(y, y); y \in \mathbb{R}\}$$

$$12) S = \{(x, y) / y = x + 1\}$$

$$13) S = \{(x, y) / x \geq 0\}$$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

$$14) S = \{(x, y, z) / x = 4y \text{ e } z = 0\}$$

$$15) S = \{(x, y, z) / z = 2x - y\}$$

$$16) S = \{(x, y, z) / x = z^2\}$$

$$17) S = \{(x, y, z) / y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$$

$$18) S = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$$

$$19) S = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$20) S = \{(x, y, z) / xy = 0\}$$

$$21) S = \{(x, y, z) / x = 0 \text{ e } y = |z|\}$$

$$22) S = \{(x, -3x, 4x); x \in \mathbb{R}\}$$

$$23) S = \{(x, y, z) / x \geq 0\}$$

$$24) S = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

$$25) S = \{(4t, 2t, -t); t \in \mathbb{R}\}$$

26) Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$:

$$a) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$$

$$b) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ (matrizes triangulares superiores)}$$

$$c) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ (matrizes simétricas)}$$

$$d) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$e) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f) S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc \neq 0 \right\} \text{ (conjunto de matrizes inversíveis)}$$