MATRIZES

1. **Definição**: toda tabela de números dispostos em linhas ou colunas

$$\begin{array}{lcccc} & 1^a\,coluna & 2^a\,coluna & \cdots & m^a\,coluna \\ 1^a\,linha & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2^a\,linha & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m^a\,linha & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Cada elemento da matriz é indicado por dois índices:

$$a_{ij}\begin{cases} i \to indica \quad linha \\ j \to indica \quad coluna \end{cases}$$

Formando assim um conjunto m x n (m por n) elementos dispostos em m linhas e n colunas onde a_{ij} é o elemento associado a i-ésima linha e j-ésima coluna.

2. **Representação**: podemos escrever uma matriz usando as seguintes representações:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. **Ordem**: usando alguns exemplos, temos:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ matriz 2x3, } \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ matriz 3x1 e } \quad [\,0 \quad \pi \quad 3 \quad -1\,] \text{ matriz 1x4}$$

Obs.: os últimos exemplos são classificados com matriz coluna e matriz linha, respectivamente.

4. **Matriz Quadrada**: onde o número de linhas e de colunas é igual.

4.1 **Diagonais**:

Diagonal Principal ↘ ↙ Diagonal Secundária

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 **Matriz Diagonal**: quando só existem elementos significativos na diagonal principal.

Ex.: $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.3 **Matriz Identidade** (ou unidade): matriz diagonal onde todos os elementos pertencentes a diagonal principal são iguais a 1.

Ex.: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. **Matriz Nula**: quando todos os seus elementos são nulos (zero).

6. **Matriz Transposta:** podemos chamar de matriz transposta de A com ordem m x n, a matriz A^t de ordem n x m, obtida na troca ordenada de suas linhas pelas colunas.

   Ex.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

7. **Lei de formação de uma matriz:** podemos construir uma matriz especificando sua lei de formação.

   Ex.: Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, se\ i \neq j \\ 0, se\ i = j \end{cases}$$

8. **Igualdade de Matrizes**: duas matrizes são iguais quando forem de mesmo tipo (mesma ordem) e seus elementos correspondentes (mesmos índices) forem iguais.

   Ex.: $\begin{pmatrix} x+1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & y-2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. **Adição de Matrizes:** para adicionar uma matriz A a uma matriz B, ambas do mesmo tipo, basta adicionar elementos de mesmos índices.

   Ex.: $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$

10. **Diferença de Matrizes:** similar ao item 9.

    Ex.: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$

11. **Produto de um número por uma Matriz**: basta multiplicar o número por todos os elementos da matriz.

    Ex.: $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

12. **Produto de matrizes**: O produto A.B é uma nova matriz que só existe se o nº de colunas da matriz A for igual ao nº de linhas da matriz B. A matriz produto terá o nº de linhas igual da matriz A e o nº de colunas igual da matriz B.

    Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

    Obs.: o produto de matrizes não é comutativo, isto é, nem sempre A.B ≠ B.A.

13. **Matriz Inversa**: a matriz inversa A é a matriz A^{-1}, tal que: **A** . $A^{-1} = I$ ou $A^{-1} . A = I$

    Ex.: Sendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}:

    Regra Prática (ordem 2): permutando os dois elementos da diagonal principal, trocando os sinais dos dois elementos da diagonal secundária e dividindo os quatro elementos de A por detA.
    Se detA = 0, A não tem inversa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – MATRIZES

1. Uma empresa fabrica três produtos. Suas despesas de produção estão divididas em três categorias. Em cada uma dessas categorias, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por trimestre. Essas estimativas são dadas nas Tabelas abaixo. A empresa gostaria de apresentar a seus acionistas uma única tabela mostrando o custo total por trimestre de cada uma das três categorias: matéria prima, pessoal e despesas gerais.

Tabela 1. Custo de Produção por Item (em dólares)

	Produto		
Gastos	**A**	**B**	**C**
Matéria-prima	0,10	0,30	0,15
Pessoal	0,30	0,40	0,25
Despesas Gerais	0,10	0,20	0,15

Tabela 2. Quantidade Produzida por Trimestre

	Estação			
Produto	**Verão**	**Outono**	**Inverno**	**Primavera**
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

2. Construa as matrizes:

a) B = $(b_{ij})_3$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} 0\,, se \quad i = j \\ 2\,, se \quad i > j \\ -1, se \quad i < j \end{cases}$ Resp.: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) C = $(c_{ij})_{2x3}$, tal que $c_{ij} = |i - j|$ Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Determine m e n, sabendo que:

$$\begin{pmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Resp.: $m = \pm 9 \;\; e \; n = \pm 3$

4. Dadas as matrizes:

A = $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 4 \\ -6 & 3 & y \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 5 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & 8 & z \end{bmatrix}$, calcule x, y e z, para que B = A^t Resp.: $x = \sqrt{2}$, $y = 8$, $z = 2$

5. Determine a, b e c para que A = B, sendo:

A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & \log_3 \frac{1}{81} \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{pmatrix}$ Resp.: $a = -3$, $b = -4$, $c = -4$

6. Dadas A = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$, resolva a equação 2X – A + (1/2)B = 0 Resp.: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

7. Calcule a matriz X, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $(X + A)^t = B$

Resp.: $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

8. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule uma matriz X de ordem 2, tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C$.

Resp.: $X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$

9. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 + 2A - 11.\,I$, onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resp.: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Resolva a equação: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$. Resp.: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. Dados $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix}$, determine os valores de a e b, tais que $B = P.A.P^{-1}$.

Resp.: *a = 24 e b = -11*

11. Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{pmatrix}$, calcular m e n para que B seja inversa de A.

Resp.: *m = -7 e n = -5*