3.7 Exercícios

1. Determine o termo geral e a soma de cada uma das seguintes séries:

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \cdots;$

   (b) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots;$

   (c) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \cdots.$

2. Determine a soma das séries:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)};$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2^n}\right)$, sabendo que $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{cotg}(x);$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}};$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 8}{3^n}.$

3. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Mostre que é divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3 + 5n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

4. Indique os valores de x para os quais convergem as seguintes séries e, quando possível, calcule a sua soma:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}};$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (|x| - 1)^n;$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$

5. Mostre que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = 3A - a_1 - 2a_0$.

6. Estude do ponto de vista da convergência as seguintes séries e, em caso de convergência, se esta é absoluta ou condicional:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$.

7. Considere a seguinte série:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} .$$

   (a) Estude-a quanto à convergência.

   (b) Qual a soma S_n da série que dá um erro inferior a $\frac{1}{1000}$?

   (c) Indique um majorante do erro que se comete quando se toma para soma da série S_5.

8. Considere a série:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} .$$

   (a) Verifique que é convergente.

   (b) Calcule a soma com erro inferior a $\frac{1}{1000}$.

9. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ duas séries divergentes e $\alpha \neq 0$ um número real. O que se pode afirmar sobre a natureza das seguintes séries?

   (a) $\sum(a_n + b_n)$

   (b) $\sum(a_n b_n)$

   (c) $\sum(\alpha a_n)$

   (d) $\sum(a_n + c_n)$

   (e) $\sum(a_n c_n)$

   (f) $\sum(\alpha c_n)$

   (g) $\sum(c_n + d_n)$

   (h) $\sum(c_n d_n)$

10. Determine a natureza das seguintes séries por um critério de comparação:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}\right)$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-\sqrt{n^2-1})$

    (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$

    (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}$

    (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)^3\sqrt{n^3+1}}$

    (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

11. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério da Raiz (ou da Raiz de Cauchy):

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$, k constante

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$

12. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério da Razão ou pelo de D'Alembert:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$

    (d) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots$

    (e) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots$

    (f) $\displaystyle 1+\frac{2}{3}+\frac{2\times 3}{3\times 5}+\frac{2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7}+\cdots$

13. Estude a natureza das seguintes séries pelo Critério de Raabe:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \times n!}{(2n+1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

14. Usando o Critério do Integral, estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

15. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{3^n}}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^{3n-1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)\ldots(\pi+n)}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{tg}\left(\frac{e}{n}\right)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} 2^n + \frac{1}{n^2+n}\right)$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{n^2 \log(n+1)}$

(o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$

(p) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + p^2}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 2}$

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^n}{n^2 + 1}$

(t) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n \log n}$

(u) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)}}$

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} n^e \log n$

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

(z) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$

16. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(n\pi)|}{n^2}$

    (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(n+1)!}$

    (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n+3} \right)^n$, $a \in \mathbb{R}$

    (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!}$

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n\theta)}{n^{\frac{5}{2}}}$

    (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left| \log \left(\frac{1}{n!} \right) \right|$

    (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$

    (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n!) + n!}{n^n + 2^n}$

    (i) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \frac{1}{7} + \cdots$

    (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\ \log(4n+1)}{n(n+1)}$

17. Seja $\sum a_n$ uma série convergente. Mostre que a série $\sum b_n$, onde

$$
\begin{array}{lcl}
b_1 & = & a_1 + a_2 \\
b_2 & = & a_3 + a_4 + a_5 \\
b_3 & = & a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\
b_4 & = & a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

    também é convergente e as somas coincidem.

18. Para que valores de α são simples ou absolutamente convergentes as seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \operatorname{sen}(\alpha))^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

19. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes, $a_n > 0$, $b_n > 0$. Mostre que a série $\sum \sqrt{a_n b_n}$ também converge. (Sugestão: prove que $\dfrac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n}$).

20. Sabendo que $\sum a_n$ é convergente, $a_n > 0$, e $b_n > 0$, qual a natureza da série $\sum \dfrac{a_n}{1 + b_n}$?

21. Sabendo que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes, estude quanto à convergência as seguintes séries:

    (a) $\sum \left(\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} \right)$ sendo $a_n > 0$ e $b_n > 0$.

    (b) $\sum \dfrac{n+1}{n}\ a_n$.

22. Seja $\sum a_n$ uma série divergente, $a_n \geq 0$, e seja s_n a soma dos seus n primeiros termos. Mostre que a série
$$\sum (\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n})$$
é divergente.

23. Prove que a série
$$\sum \frac{a_0 n^p + \cdots + a_p}{b_0 n^q + \cdots + b_q}$$
em que a_0, ..., a_p, b_0, ..., b_q são números reais e $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, é convergente se e só se $q - p > 1$.

24. Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a > 0$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}$

        i. Se α, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

        ii. Se $\alpha \in \mathbb{Z}^-$.

25. Seja $u_n > 0$ e $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Mostre que $\sum u_n$ é convergente.

26. Seja $u_n > 0$ e $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$. Mostre que $\sum u_n$ é divergente.

27. Estude a natureza da série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n!)}{27^n (n!)^3} \; .$$

28. Considere as séries
$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \; .$$

   (a) Calcule a soma de ordem três do produto de Cauchy das duas séries.

   (b) Estude quanto à convergência a série produto.

Fonte: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/635/o/serie1.pdf

Visitada em 27 de março de 2020