Integração numérica

por
Mílton Procópio de Borba

Dada uma função f definida num intervalo [a,b], podemos calcular a integral definida com um erro máximo *e* estipulado. Para isto, usamos um número determinado de valores de $Y_k = f(X_k)$ para calcular a área do plano XoY delimitada pelas linhas y = 0, x = a, x = b e y = f(x).

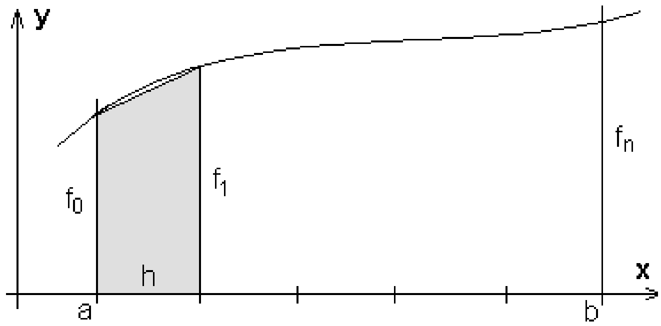
1. *Método do Trapézio*

Este método consiste em traçar vários trapézios de mesma altura h. As bases serão os valores da função nos vários pontos. A integral (área) procurada será dada aproximadamente por:

$h(f_0+ f_1)/2 + h(f_1+ f_2)/2 + ... + h(f_{n-1}+ f_n)/2 + \varepsilon$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f_0+ 2.f_1 + 2.f_2 +...+ 2.f_{n-1} + f_n)/2$$



onde h e n estão relacionados por h = (b - a)/n e o erro ε é proporcional à convexidade da curva definida por y = f(x), ao comprimento do intervalo (b-a) e ao quadrado do espaçamento h.

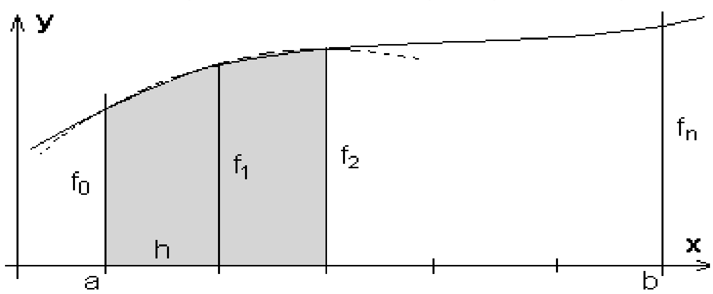
Na verdade, pode-se provar que $\boxed{\varepsilon = h^2.f''(\xi).(b-a)/12 \leq h^2.M_2.|b-a|/12}$, onde ξ é algum ponto do intervalo [a,b] e M_2 é o máximo valor que |f"| pode atingir neste intervalo. Se f for um polinômio de grau menor que dois, então o erro é nulo.

2. *Método de Simpson*

Se subdividirmos o nosso intervalo [a,b] num número n par de intervalos e a cada dois subintervalos consideramos uma figura formada por três lados retos e um parabólico, teremos uma resposta bem melhor, pois a parábola se aproxima mais da curva que a reta.

x	Y = f(x)	Coef.	Produto
a=Xo	f_0	1	$1.f_0$
X_1	f_1	4	$4.f_1$
X_2	f_2	2	$2.f_2$
X_3	f_3	4	$4.f_3$
X_4	f_4	2	$2.f_4$
...	...	...	...
X_{n-2}	f_{n-2}	2	$2.f_{n-2}$
X_{n-1}	f_{n-1}	4	$4.f_{n-1}$
$b=X_n$	f_n	1	$1.f_n$

Cada sub-área (integral da parábola) = $h(f_0+ 4.f_1 + f_2)/3$



$$\text{Soma} = \int_a^b f(x)dx = h(f_0+4.f_1 +2.f_2 +4.f_3 +2.f_4 +...+4.f_{n-1} + f_n)/3 + \varepsilon$$

onde $\boxed{\varepsilon = h^4.f^{IV}(\xi).(b-a)/180 \leq h^4.M_4.|b-a|/180}$, ξ é algum ponto do intervalo [a,b] e M_4 é o máximo valor que o módulo da quarta derivada de f pode atingir neste intervalo.

Já era claro (pela concepção do método) que se f fosse um polinômio do segundo grau, então o erro seria nulo. Um estudo mais detalhado nos leva a expressão do erro. Este nos diz que também os polinômios de terceiro grau (ou menor) são integrados sem erro pelo método de Simpson.

3. *Método de Newton Cotes (de ordem k)*

Uma generalização dos dois métodos anteriores consiste em subdividir o intervalo [a,b] em n = m.k subintervalos iguais. Em cada k intervalos se constrói uma figura de quatro lados, três retos e o quarto (próximo à curva definida por y = f(x)) é o gráfico de um polinômio de grau k que passa pelos (k+1) pontos consecutivos (X_i , f_i).

Para k = 1 e k = 2, temos, respectivamente, os métodos do Trapézio e de Simpson.

Para k= 3, temos $\int_a^b f(x)dx = 3h(f_0+3.f_1 +3.f_2 +2.f_3 +3.f_4 +3.f_5 +2.f_6 +...+3.f_{n-2} +3.f_{n-1} + f_n)/8 + \varepsilon$

4. *Método de Romberg*

Este método leva em consideração a expressiva melhoria do resultado T(h/2) que se consegue pelo método dos Trapézios ao dividir o espaçamento h pela metade. Seja S o valor da integral.

$S = T(h) + h^2.f''(\xi).(b-a)/12 = \boxed{T(h) + c.h^2 + O(h^4)}$, onde O(h) significa infinitésimos de ordem $\geq$ k.

$S = T(h/2) + c.(h/2)^2 + O(h^4) = T(h/2) + c.h^2/4 + O(h^4) \Rightarrow 4.S = \boxed{4.T(h/2) + c.h^2 + O(h^4)}$.

Diminuindo a expressão anterior desta última, temos:

$4.S - S = \boxed{4.T(h/2) + c.h^2 + O(h^4)} - \boxed{T(h) + c.h^2 + O(h^4)} \Rightarrow S = \dfrac{4.T(h/2) - T(h)}{3} + O(h^4)$.

Isto nos mostra que $\boxed{R_1(h) = [4.T(h/2) - T(h)]/3}$ é uma expressão que calcula bem melhor o valor S. Esta é a primeira forma de Romberg (R_1).

Partindo desta forma, e considerando que ela comete um erro da ordem de h^4, chegamos analogamente à segunda forma de Romberg: $\boxed{R_2(h) = [16.R_1(h/2) - R_1(h)]/15}$.

Trapézios

h	$T(h) = R_0$	R_1	R_2		R_{k-1}	R_k
H	$T_0 = m_{0,0}$	$m_{0,1}$	$m_{0,2}$	...	$M_{0,k-1}$	$m_{0,k}$
H/2	$T_1 = m_{1,0}$	$m_{1,1}$	...	...	$M_{0,k-1}$	
H/4	$T_2 = m_{2,0}$		$m_{k-3,2}$	...		
...	...	$m_{k-2,1}$	$m_{k-2,2}$			
$H/2^{k-1}$	$T_{k-1} = m_{k-1,0}$	$m_{k-1,1}$				
$H/2^k$	$T_k = m_{k,0}$					

$$m_{L,C} = \frac{4^k.m_{L+1,C-1} - m_{L,C-1}}{4^k - 1}$$

Numa tabela, calculamos a integral por trapézios, dividimos o espaçamento ao meio, recalculamos por trapézios e fazemos uma "média ponderada" (pesos 4 e -1) dos resultados.

Continuamos a dividir h por 2, calculamos outra média dos resultados mais "finos" e então fazemos uma média das médias (com pesos 16 e -1).

Este processo continua (com pesos 4^k e -1) até que as médias estejam suficientemente próximas.

5. *Método de Gauss*

Na verdade, todos os métodos de Newton Cotes calculam a média ponderada dos vários (n+1) valores de $Y_k = f(X_k) = f_k$ e multiplicam pelo comprimento do intervalo (b - a).

Gauss estudou mais profundamente esta situação para o intervalo [-1,1] e concluiu que o menor erro e ocorre (no caso de polinômios) para os seguintes pesos C_i e pontos X_i.

n	pesos $\mathbf{C_i}$	pontos $\mathbf{X_i}$	**Erro ε = 0 para**
1	1	± 0,57735027	P_3 = pol. de grau 3
2	8/9 5/9	0 ± 0.77459667	P_5 = pol. de grau 5
3	0,34785485 0,65214515	± 0,86113631 ± 0,33998104	P_7 = pol. de grau 7
4	0,23692689 0,56888889 0,47862867	± 0,90617985 0 ± 0,53846931	P_9 = pol. de grau 9

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = C_0.f(X_0) + C_1.f(X_1) + C_2.f(X_2) + ... + C_n.f(X_n) + \varepsilon$$

Observações:

- Como as funções "suaves" são aproximadas por polinômios, este método vale não só para
- polinômios, mas para todas as funções contínuas com derivadas contínuas em [-1 , 1].
- Os espaçamentos entre os pontos não são regulares.
- Os pontos extremos do intervalo não são considerados.
- Para outros intervalos [a , b], faz-se a mudança de variável:

$$t = \frac{2x - (a+b)}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{(b-a).t + (a+b)}{2} \Leftrightarrow dx = \frac{(b-a).dt}{2}$$