Interpolação

por

Mílton Procópio de Borba

Interpolação Polinomial

Trataremos neste capítulo, de conseguir urna maneira de interpolar pontos numa tabela dada.

x	y
X_0	Y_0
X_1	Y_1
X_2	Y_2
X_3	Y_3
...	...
X_n	Y_n

Para isto, suporemos que y dependa suavemente de x. Assim, vamos encontrar um polinômio P(x) tal que $P(X_k) = Y_k$, para todo k.
Dado um novo valor de x, não tabelado, o seu correspondente valor para, y será, então y = P(x).
Vamos ver que. "Por n + 1 pontos (X_k , Y_k) de abscissas (X_k) diferentes podemos determinar exatamente um polinômio de grau n".

Realmente, seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$. Então temos que

$$\left|\begin{array}{l} P(X_0) = Y_0 \\ P(X_1) = Y_1 \\ P(X_2) = Y_2 \\ \quad ... \\ P(X_{n-1}) = Y_{n-1} \\ P(X_n) = Y_n \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a_0X_0^n + a_1X_0^{n-1} + a_2X_0^{n-2} + ... + a_{n-1}X_0 + a_n = Y_0 \\ a_0X_1^n + a_1X_1^{n-1} + a_2X_1^{n-2} + ... + a_{n-1}X_1 + a_n = Y_1 \\ a_0X_2^n + a_1X_2^{n-1} + a_2X_2^{n-2} + ... + a_{n-1}X_2 + a_n = Y_2 \\ \quad ... \\ a_0X_{n-1}^n + a_1X_{n-1}^{n-1} + a_2X_{n-1}^{n-2} + ... + a_{n-1}X_{n-1} + a_n = Y_{n-1} \\ a_0.Xn^n + a_1.X_n^{n-1} + a_2.X_n^{n-2} + ... + a_{n-1}.X_n + a_n = Y_n \end{array}\right.$$

Este sistema de *n + 1* equações com *n + 1* incógnitas é unicamente determinado, pois a matriz principal ($\det(M) = (X_0 - X_1).(X_0 - X_2)...(X_0 - X_n).(X_1 - X_2).(X_1 - X_3)...(X_1 - X_n)...(X_{n-1} - X_n)$, por Wandermond) tem determinante não nulo, se $X_j \neq X_k$ para $j \neq k$.

1. Lagrange

Seja $L_k(x) = \prod_{k\neq i=1}^{n} (x - X_i)$. Então L_k é polinômio de grau *n* e $L_k(X_k) = 1$ e $L_k(X_i) = 0$, se $i\neq k$.

Assim, o polinômio dado por $P(x) = \sum_{k=1}^{n} Y_k.L_k(x)$ é de grau *n* e $P(X_k) = Y_k$, para todo *k*.

2. Newton - recursivo

Dada a tabela, considere as seguintes diferenças divididas:

x	*y*					
X_0	$Y_0 = m_{0,0}$					
X_1	$Y_1 = m_{0,1}$	$m_{1,0}$				
X_2	$Y_2 = m_{0,2}$	$m_{1,1}$	$m_{2,0}$			
...	...	...	...	...		
X_{n-1}	$Y_{n-1} = m_{0,n-1}$	$m_{1,n-2}$	$m_{2,n-3}$	...	$m_{n-1,0}$	
X_n	$Y_n = m_{0,n}$	$m_{1,n-1}$	$m_{2,n-2}$	...	$m_{n-1,1}$	$m_{n,0}$

$$m_{i,j} = \frac{m_{i-1,j+1} - m_{i-1,j}}{X_{i+j} - X_j}$$

$m_{0,k}$ é o coeficiente angular da reta que une os pontos (X_{k-1} , Y_{k-1}) e (X_k , Y_k).
$m_{1,k}$ é o coeficiente do segundo grau da parábola que une os pontos (X_{k-1} , Y_{k-1}) a (X_{k+1},Y_{k+1}).

0 polinômio interpolador $P(x) = Y_0 + \sum_{i=1}^{n} m_{i,0}.\prod_{j=0}^{i-1} (x - X_j)$ é de grau n e $P(X_k) = Y_k$, para todo k.

3. Exemplo

Podemos calcular o valor aproximado do seno de qualquer ângulo perto do intervalo [30º e 90º], por interpolação dos valores básicos tabelados:

Por Lagrange:

x	sen(x)
30	0,500
45	0,707
60	0,866
90	1,000

$$P(x) = 0{,}500 \cdot \frac{(x-45).(x-60).(x-90)}{(30-45).(30-60).(30-90)} + 0{,}707 \cdot \frac{(x-30).(x-60).(x-90)}{(45-30).(45-60).(45-90)} + 0{,}866 \cdot \frac{(x-30).(x-45).(x-90)}{(60-30).(60-45).(60-90)} + 1{,}000 \cdot \frac{(x-30).(x-45).(x-60)}{(90-30).(90-45).(90-60)}$$

Por Newton:

x	sen(x)			
30	0,500			
45	0,707	0,0138		
60	0,866	0,0106	- 0,000106667	
90	1,000	0,00447	- 0,000136296	$- 4{,}93827.10^{-7}$

$$P(x) = 0{,}500 + 0{,}0138.(x - 30) - 0{,}000106667.(x - 30).(x - 45) - 4{,}93827.10^{-7}.(x - 30).(x - 45).(x - 60) =$$
$$= 0{,}500 + (x - 30).\{0{,}0138 + (x - 45).[- 0{,}000106667 + (x - 60).(- 4{,}93827.10^{-7})]\}.$$

Esta última expressão pode ser calculada segundo o diagrama:

$m_3 = - 4{,}93827.10^{-7}$	$m_2 = - 0{,}000106667$	$m_1 = 0{,}0138$	$m_0 = 0{,}500$
$S_3 = m_3$	$S_2 = d_3.S_3 + m_2$	$S_1 = d_2.S_2 + m_1$	$P(x) = d_1.S_1 + m_0$
$d_3 = x - 60$	$d_2 = x - 45$	$d_1 = x - 30$	

4. Erro de Interpolação

No processo de Newton, nota-se que, independentemente dos coeficientes m_k serem corretamente calculados ou não, P(30º) dará exatamente 0.500. Já o valor de P(45º) é afetado somente pelo coeficiente m_1 = 0,0138. Neste sentido, teremos menores erros quando usamos esta expressão para calcular P(x) com valores de x próximos do início da tabela. Para valores perto do fim da tabela, deveríamos usar os coeficientes inferiores da tabela das diferenças divididas: 1,000, 0,004467, - 0,000136296 e $- 4{,}93827.10^{-7}$, como se virássemos a tabela dada.

Se a tabela dada tiver espaçamentos iguais na variável X, podemos fazer a tabela das diferenças (sem dividir). Só dividiremos na hora de usar os coeficientes. Isto gerará menos erros acumulados.

No caso do nosso exemplo dos senos, mesmo considerando os coeficientes corretamente calculados, só teremos senos corretos para os valores de 30º, 45º, 60º e 90º.

Para os demais valores de x, o erro E(x) de interpolação dependerá da distância de x ao valores tabelados, do número (n+1) de pontos dados e da oscilação da função f(x) que se deseja interpolar por polinômios. Mais precisamente, $E(x) \le M_{n+1}.(x - X_0).(x - X_1) \ldots (x - X_n)/(n + 1)!$,
onde M_{n+1} significa o máximo que a derivada de ordem (n + 1) da função f(x) pode assumir.