Zeros de Funções - Equações não Lineares

por

Milton Procópio de Borba

Dada uma equação do tipo $f(x) = 0$, queremos encontrar uma raiz x' , com "precisão estipulada". Esta precisão pode ser dada de forma que a distância entre x' e a raiz exata X seja menor que um valor ε_1 dado. Podemos ainda querer x' tal que $|f(x')|$ seja menor que outro ε_2 dado.

1. Métodos Iterativos com dois pontos iniciais

Parte-se de dois pontos $P_0(a, f(a))$ e $P_1(b, f(b))$, com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais contrários. Isto nos garante, se a função f for contínua em $[a, b]$, que a raiz x' procurada está neste intervalo. Estes métodos consistem em tomar este intervalo cada vez menor.

O intervalo $[a, b]$ pode ser determinado pelo conhecimento prévio do problema prático, ou do gráfico da função f .

1.1 Bisseção

Dados os valores a e b , calcula-se o valor médio $m = (a+b)/2$. A seguir, abandona-se ou o intervalo $[a, m]$ ou $[m, b]$, conforme o sinal de $f(m)$ seja igual ao de $f(a)$ ou $f(b)$ respectivamente.

Evidentemente, se $f(m) = 0$ então encontramos a raiz exata $m = X$.

Neste método o erro na resposta vai ficando aproximadamente a metade do erro anterior, ou seja:

$$E_{k+1} \leq 2^{-1} \cdot E_k \rightarrow E_{k+1} \leq 2^{-k} \cdot E_0 \text{ onde } E_k = X_k - X, \text{ significa o erro na } k^{\text{a}} \text{ etapa.}$$

1.2 Falsa Posição

A diferença entre este método e o anterior é que a média (entre a e b) não é aritmética, mas ponderada, considerando os inversos de $|f(a)|$ e $|f(b)|$ como pesos. Isto se deve ao fato de que a posição da raiz deve estar mais próxima do ponto onde a função é menor. O ponto médio é:

$$M = \frac{a \cdot |f(b)| + b \cdot |f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|} = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

2. Métodos Iterativos com um ponto inicial

Consiste em escrever a equação $f(x) = 0$ na forma $x = G(x)$. Isto pode ser feito de várias maneiras.

Partindo-se de X_0 , uma estimativa prévia para a raiz, calcula-se $X_1 = G(X_0)$, ..., $X_{k+1} = G(X_k)$, ...

Evidentemente, se a seqüência $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ convergir para X , então teremos $X = G(X)$ e portanto X será solução de $f(x) = 0$.

2.1 Iteração Linear

A função G descrita acima é chamada de função de iteração. Devemos escolher uma "boa" G .

Pela fórmula de Taylor, temos que $G(X_k) = G(X) + G'(\xi) \cdot (X_k - X)$, para algum ξ entre X e X_k .

Portanto, $E_{k+1} = X_{k+1} - X = G(X_k) - G(X) = G'(\xi) \cdot (E_k)$. Assim se $|G'(x)| < 1$ numa certa vizinhança de

X , contendo X_0 , então $E_{k+1} < E_k$ e a dita convergência ocorre. Na verdade, se $|G'(x)| < M < 1$,

então $E_{k+1} < M \cdot E_k < M^{k+1} \cdot E_0 \rightarrow 0$. Quanto menor o valor de M , mais rápida é a convergência.

2.2 Método de Newton-Raphson

Uma maneira ampla de apresentar $G(x)$ pode ser $G(x) = x + A \cdot f(x)$, com qualquer A .

A função de iteração "ótima" foi sugerida por Newton, escolhendo A para que $G'(X) = 0$, quando X é a solução de $f(x) = 0$. Resultado: $A = -1/f'(x)$, se $f'(X) \neq 0$. Assim, $G(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Assim, como a derivada de G é nula na raiz, numa certa vizinhança de X , $|G'|$ deve ser menor que 1 e a convergência fica garantida com um "chute" inicial X_0 adequado.

Novamente, por Taylor, sabemos que $G(X_k) = G(X) + G'(X) \cdot (X_k - X) + G''(\xi) \cdot (X_k - X)^2/2$.

Se $f'(X) \neq 0$ então $G'(X) = 0$ e portanto, $G(X_k) - G(X) = G''(\xi) \cdot (X_k - X)^2/2$. Neste caso, obtemos uma convergência quadrática, isto é $E_{k+1} \leq C \cdot E_k^2$, com $C = (\text{máx } |G''(x)|)/2$.

Se $f'(X) = 0$, $G'(x) \rightarrow 0,5$, se $x \rightarrow X$. Então a convergência é linear: $E_{k+1} < 0,5 \cdot E_k$.

Problemas	Solução
$f'(X_k) = 0$	Trocar X_k
$X_{k+2} = X_k$ com $f(X_{k+2}) \cdot f(X_k) > 0$	Trocar X_k
$X_{k+2} = X_k$ com $f(X_{k+2}) \cdot f(X_k) < 0$	$X_{k+3} = (X_{k+2} + X_k)/2$
Cálculo da derivada	$f'(x) \approx [f(x+h) - f(x)]/h$, com h "pequeno"

3. Raízes de Polinômios

Vamos restringir nosso estudo, agora aos polinômios de grau n:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \text{ de coeficientes } a_k \text{ reais.}$$

Propriedades:

P_n tem n raízes (reais ou complexas, simples ou múltiplas);

Se $a+bi$ for raiz de $P_n(x)$, então $a - bi$ também será raiz;

Se n for ímpar, então P_n tem pelo menos uma raiz real (quantidade ímpar de raízes)

Tendo-se "boas" estimativas X_0 para as raízes, usamos o já conhecido método de Newton-Raphson

$X_{k+1} = X_k - P/P'$ para melhorar a precisão. Usamos Briot-Ruffini para achar e P e P'.

	P _n (x)	
X _k	Q(x)	P
X _k	...	P'

	a ₀	a ₁	a ₂	...	a _{n-1}	a _n
X _k	b ₀	b ₁	b ₂	...	b _{n-1}	P
X _k	c ₀	c ₁	c ₂	...	P'	

Justificativa: $P(x) = (x - X_k).Q(x) + R \rightarrow P'(X) = (x - X_k).Q'(x) + Q(x) \rightarrow P(X_k) = R$ e $P'(X_k) = Q(X_k)$.