



# *NOVAS TECNOLOGIAS, INTERDISCIPLINARIDADE E O ESTUDO DAS FUNÇÕES*

---

**Profa. Mirian Buss Gonçalves, Dra.  
Universidade Federal de Santa Catarina  
22 de Outubro de 2007**



## *O MOMENTO ATUAL*

---

- ☆ Busca-se tornar a Matemática mais atraente e agradável;
- ☆ Ênfase à contextualização dos conteúdos. (Etnomatemática, Modelagem, Interdisciplinaridade);
- ☆ Calculadoras e computadores permeiam o cotidiano da vida de um grande número de pessoas;
- ☆ Pipocam experiências de uso de novas tecnologias no ensino de matemática;



## *O COMPUTADOR NO ENSINO*

---

- Possibilidade de repensar o processo ensino-aprendizagem (**PCN,1997**)
- .Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela criação de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- .Evidencia para os alunos a importância do papel da **linguagem gráfica e de novas formas de representação**, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;



# Como planejar uma aula com apoio computacional?





## *Cenário*

---

Descrição de um conjunto de atividades propostas pelo professor (Seqüência Didática), para alcançar objetivos previamente definidos.

Deve especificar:

- ◆ Os objetivos
- ◆ As atividades previstas
- ◆ Os recursos necessários
- ◆ O comportamento esperado dos alunos



## *Tipos de Sequências Didáticas:*

---

- ◆ Motivação e introdução de novos conteúdos: são propostas situações problemas, cuja análise deve levar o aluno à novos conceitos e/ou generalizações
  - ☞ O aluno deve estar motivado a fazer conjecturas, deve trabalhar o mais livremente possível, participando ativamente da construção de seu conhecimento



## *Tipos de Sequências Didáticas*

---

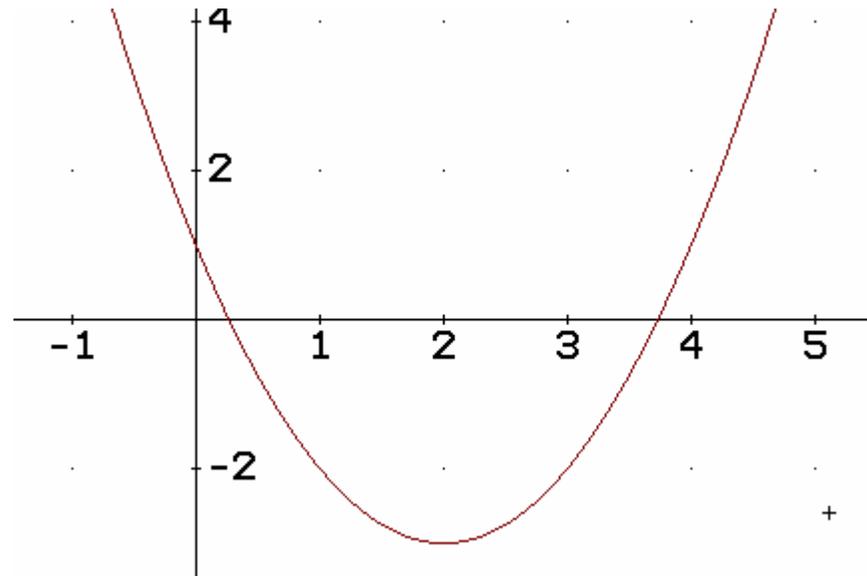
- ◆ Fixação, reforço ou revisão de conteúdos:
  - ☞ As atividades propostas aos alunos são constituídas de exercícios e análise de situações que englobam conceitos já conhecidos.
  - ☞ A utilização do computador, neste caso, pode apresentar vantagens como a exploração de situações mais próximas da realidade, melhor visualização gráfica, etc.



## *Fundamentação Teórica*

Uso de representações semióticas: o aluno adquire um dado conhecimento, quando consegue passar de uma forma de representação para outra.

$$f(x) = 0$$





# *REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO*

---

- ☆ Teoria proposta pelo psicólogo francês Raymond Duval, e divulgada no Brasil por Regina F. Damm.
- ☆ Três aproximações da noção de representação:
  - ↳ **RM** - Representações Mentais
    - ✓ Representações do mundo na infância
  - ↳ **RC** - Representações Computacionais
    - ✓ Internas e não conscientes do sujeito
    - ✓ O sujeito executa certas tarefas sem pensar em todos os passos (p. ex., algoritmos das operações).



# *REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO*

---

## ↪ **RS** - Representações Semióticas

- ✓ Externas e conscientes do sujeito
- ✓ Podem ser usadas como um instrumento didático/pedagógico para a aquisição de conhecimento
- ✓ **Semiótica** - Denominação usada para a ciência geral do signo (sinal, símbolo); Arte dos sinais.



# ***SOBRE AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (RS)***

---

- Representações Gráficas são representações semióticas. O representante visível (traços no plano) tem lei de organização própria que permite a representação de outras coisas (funções ou outros objetos matemáticos);
- RS têm dois aspectos: sua forma (ou o representante) e seu conteúdo (o representado);



# ***SOBRE AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (RS)***

---

- Podemos falar em conceitualização, aquisição de conhecimentos somente a partir de momento em que o aluno “transitar” naturalmente por diferentes registros;
- O professor precisa ter claro o objeto matemático a ser ensinado. Isso lhe possibilitará definir quais os registros de representação semiótica que possibilitarão a construção do mesmo;



# ***SOBRE AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (RS)***

---

→ **Converter** uma representação é “mudar a forma pela qual um conhecimento é representado”.

◆ Exemplo: números racionais  $0,5=1/2$

◆ Diferença na forma de representação e não no objeto/conteúdo representado

→ A conversão não é simples e exige a interferência do professor, como mediador do processo



# *TRATAMENTO*

---

- ➔ O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada (é interna a um registro);
- ➔ A cada registro estão associadas regras de tratamento próprias;
- ➔ Os tratamentos estão ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático;
- ➔ Duas representações diferentes em geral envolvem tratamentos completamente diferentes.

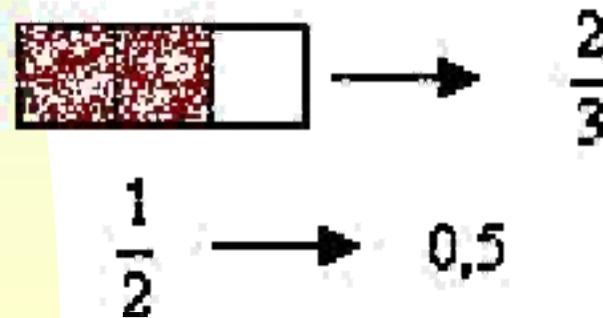


# *SITUAÇÕES EXEMPLOS*

① Objeto ou conteúdo: números racionais

Registros de representação:

- frações;
- decimal;
- representação geométrica (material concreto);



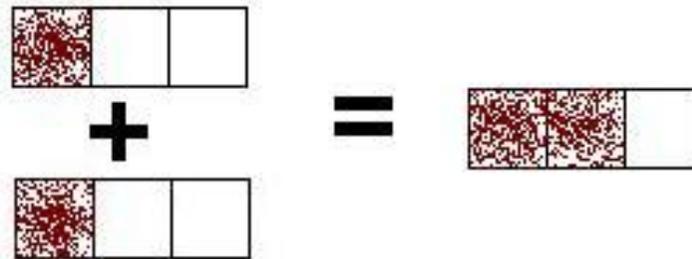


# SITUAÇÕES EXEMPLOS

## Tratamentos:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$0,5 + 0,2 = 0,7$$





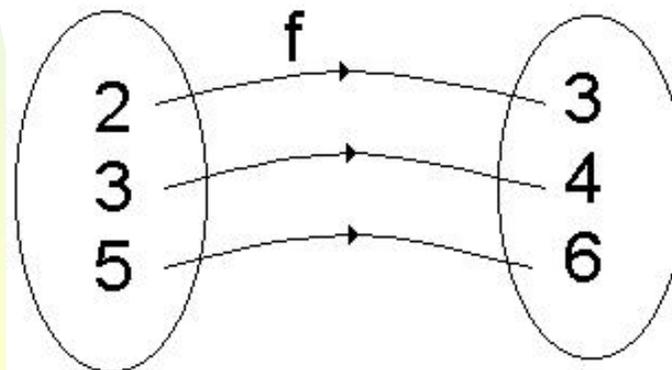
# SITUAÇÕES EXEMPLOS

② Objeto ou conteúdo: função

**Registros de representação:** analítico; gráfico; linguagem natural.

$$f: \{2, 3, 5\} \rightarrow \{3, 4, 6\}$$

$$f(x) = x + 1$$





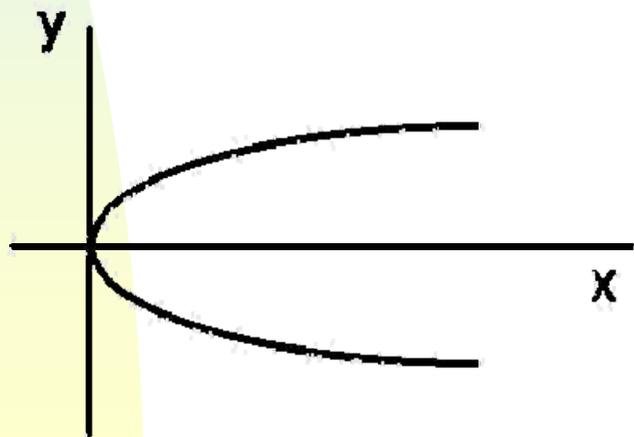
## *SITUAÇÕES EXEMPLOS*

**É função?**

a)  $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$

$$f(x) = x + 2$$

b)





# *COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO*

---

**“Qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano?”**

① Custos de tratamento e funcionamento de cada registro

➔ economia de tratamento

Ex.: Cálculo mental, material concreto para a adição, etc..



# *COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO*

---

② Limitações representativas específicas a cada registro:

➔ a conversão entre os registros possibilita ao sujeito perceber outros aspectos da situação representada.

③ A conceitualização implica uma coordenação de registros de representação.



# ***TRANSITAR EM DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO***

---

**ANÁLISE MATEMÁTICA**



**LINGUAGEM NATURAL X LINGUAGEM MATEMÁTICA**

**COMPUTADOR**



**GRANDE POTENCIAL PARA O REGISTRO GRÁFICO**



**REPRESENT. GRÁFICA X REPRESENT. ANALÍTICA**



# *Uma abordagem para o estudo das funções*

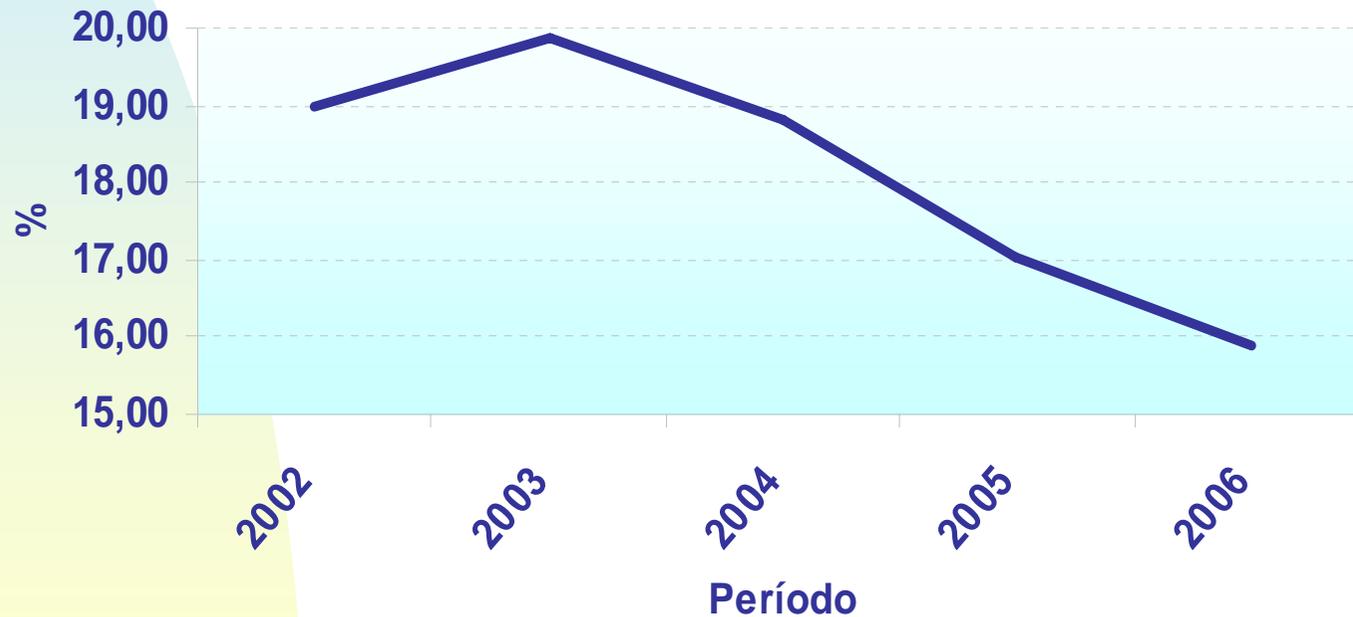
---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **1ª. Etapa:** Exploração de gráficos da vida cotidiana
  - ◆ Quais as grandezas envolvidas?
  - ◆ Quais são as variáveis?
  - ◆ Uma variável depende da outra?
  - ◆ Existem padrões de regularidade?
- O professor pode finalizar esta etapa apresentando a definição formal de função e realçando a sua importância prática.



# *Uma abordagem para o estudo das funções*

Taxa de Desemprego no Brasil (2002 a 2006)



Fonte: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada - IPEA



# *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **2ª. Etapa: Análise gráfica experimental**
  - ◆ Explorar aspectos gerais, como domínio, conjunto imagem, crescimento e decrescimento, raízes, máximos e mínimos, etc.
  - ◆ Conversões do registro de representação gráfica para o analítico e vice-versa.
  - ◆ Institucionalizar a compreensão dos conceitos



## *Situações exemplos*

---

1. Analisando visualmente o gráfico da função dada, determinar domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, raízes, paridade, periodicidade e o que ocorre quando  $x$  cresce indefinidamente  $(x \rightarrow \infty)$ .

a)  $f(x) = 1/x$

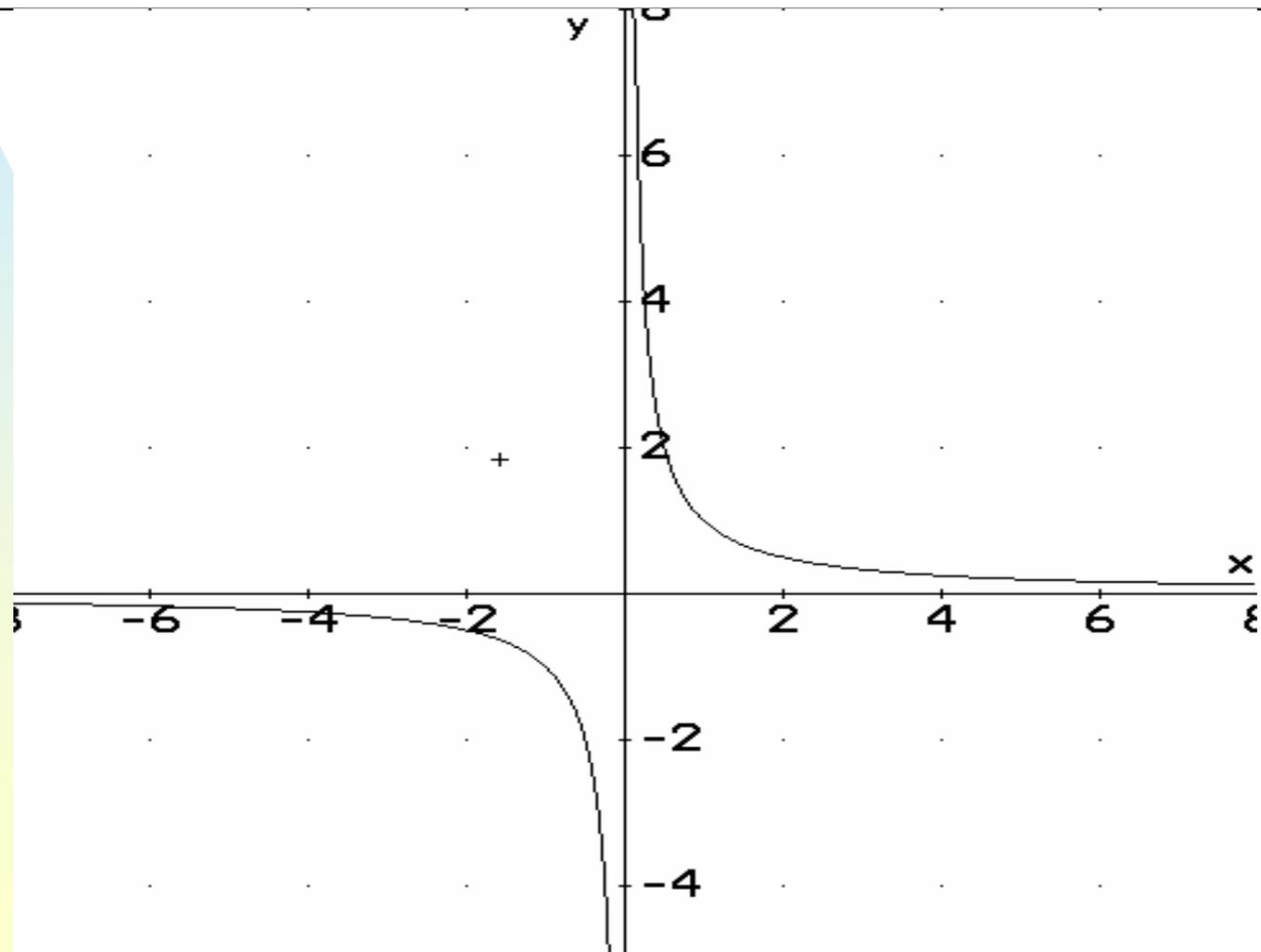
b)  $f(x) = 1/(x-2)$

c)  $f(x) = x^2 - 4$

d)  $f(x) = 4x - x^2$

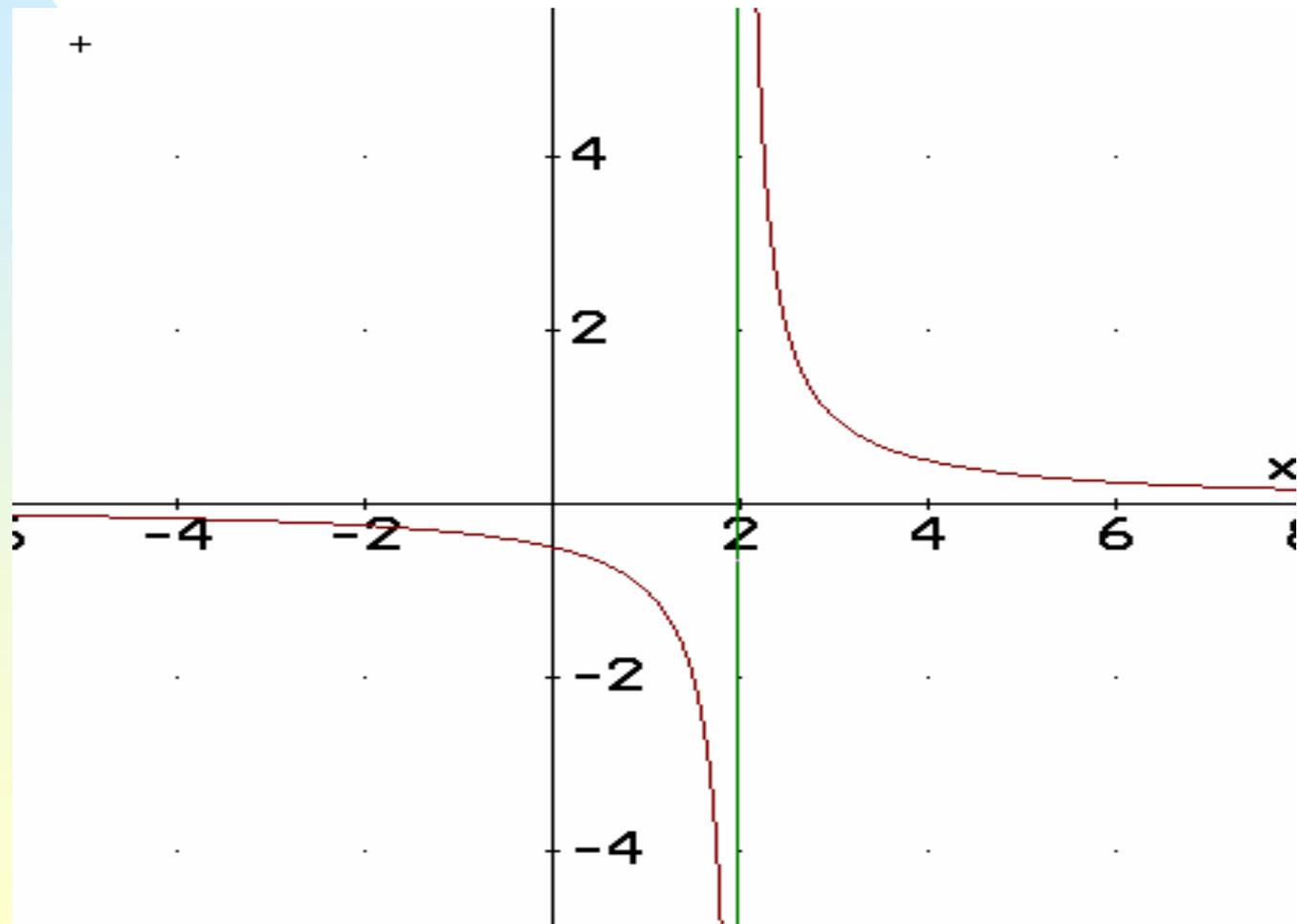


## *Situações exemplos*



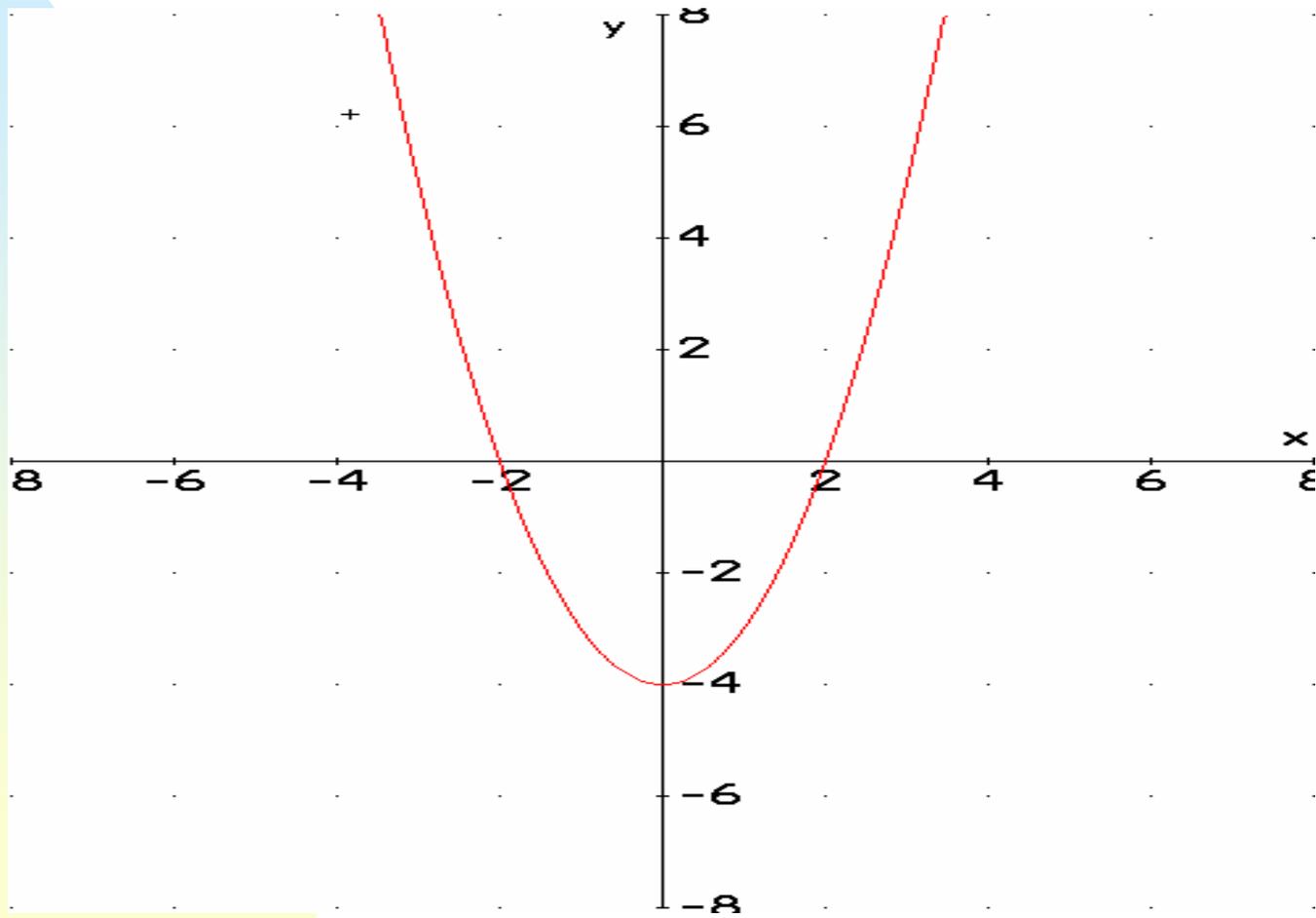


## *Situações exemplos*





## *Situações exemplos*





# *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **3ª. Etapa:** Introdução das funções de primeiro grau, quadrática e modular
  - ◆ Reforçar os conceitos já explorados
  - ◆ Exemplificar algumas situações práticas onde as mesmas são utilizadas.



## *Situações exemplos*

---

1. Faça o gráfico da função  $y = 2x + 3$  . A medida que  $x$  cresce, o que ocorre com  $y$ ? Como você denominaria uma função que satisfaz esta propriedade?

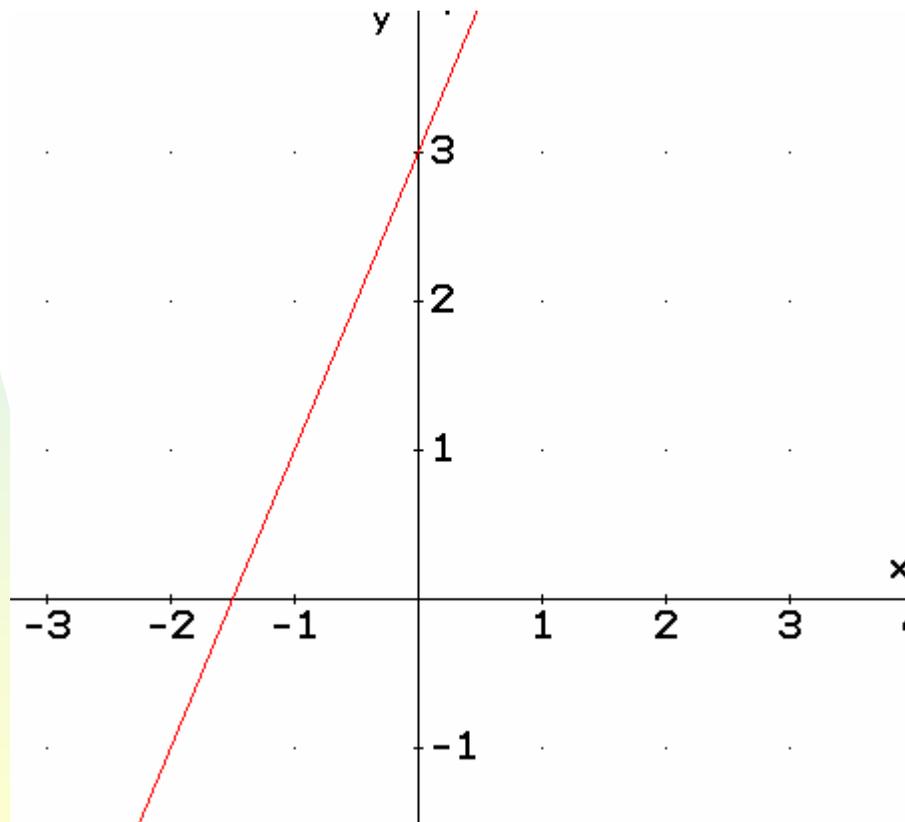
2. Faça o gráfico da função  $y = x^2 - 2x + 1$  .

a) No intervalo  $(1, +\infty)$  o que ocorre com  $y$  quando  $x$  cresce? E no intervalo  $(-\infty, 1)$  ?

b) A função dada assume um valor máximo e/ou um valor mínimo? Em que ponto(s) isso ocorre?

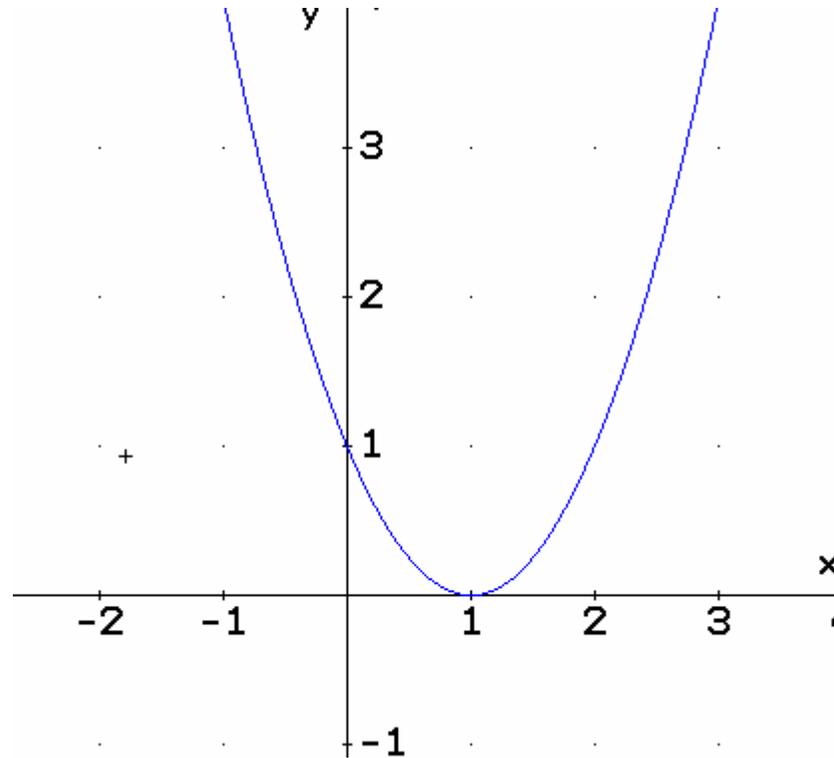


## *Situações exemplos*





## *Situações exemplos*





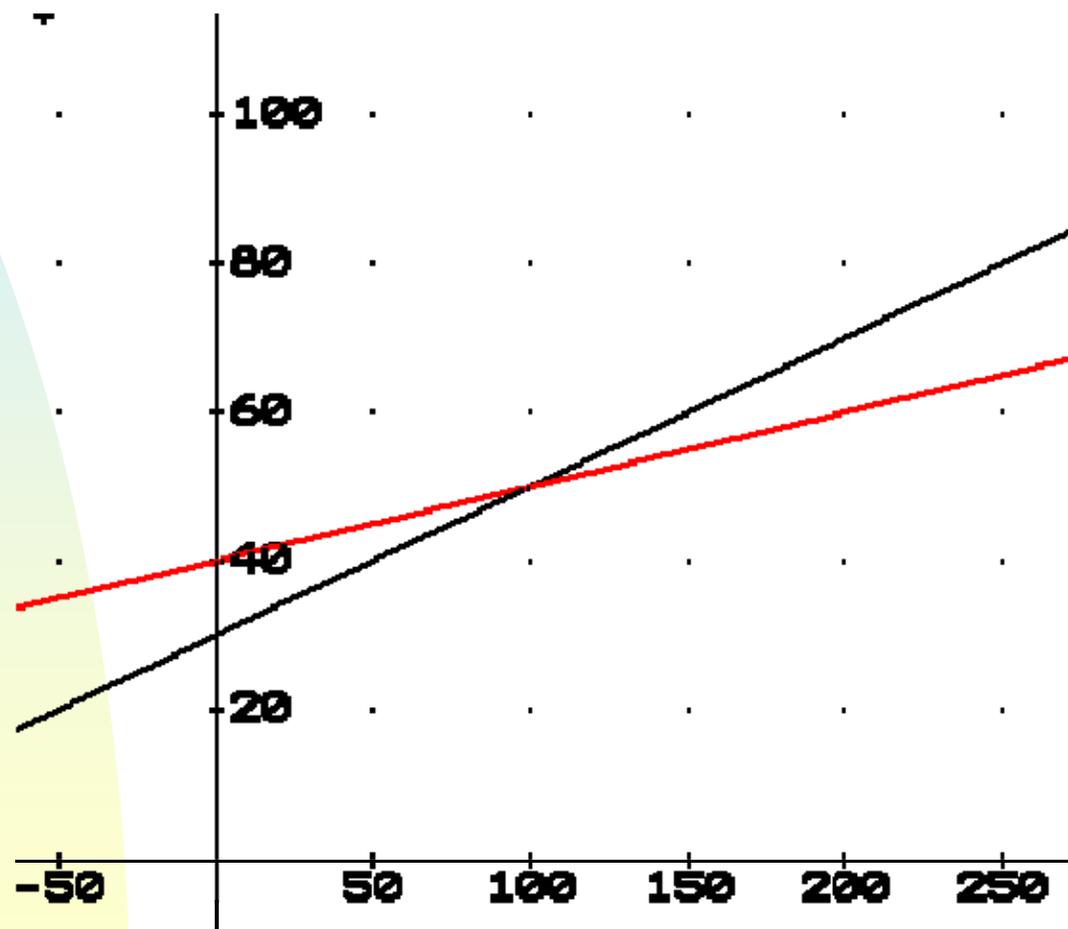
# Um exemplo

A locadora A aluga um carro popular ao preço de R\$ 30,00 a diária mais R\$ 0,20 por quilômetro rodado. A locadora B o faz por R\$ 40,00 a diária mais R\$ 0,10 por quilômetro rodado. Qual a locadora você escolheria, se você pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível?





# Um exemplo





## *SITUAÇÕES EXEMPLOS*

---

Uma criança tem um montante fixo  $M=R\$180,00$  para comprar latinhas de refrigerantes e cachorros quentes para sua festa de aniversário. Suponha que cada latinha de refrigerante custe  $R\$1,20$  e cada cachorro quente  $R\$1,50$ .

- (a) Obtenha a equação de restrição orçamentária.
- (b) Esboce o gráfico, supondo as variáveis contínuas.
- (c) Se a criança optar em usar todo seu orçamento comprando somente cachorros quentes, estime o número de cachorros quentes que podem ser comprados.



## *SITUAÇÕES EXEMPLOS*

---

O custo total de uma plantação de soja é função em geral, da área cultivada. Uma parcela do custo é aproximadamente constante (custos fixos) e diz respeito às benfeitorias e equipamentos necessários. A outra parcela diz respeito aos custos dos insumos e mão-de-obra e depende da área plantada (custos variáveis). Supor que os custos fixos sejam de R\$ 12.400,00 e os custos variáveis sejam de R\$ 262,00 por hectare.

- (a) Determinar o custo total da plantação em função do número de hectares plantado.
- (b) Fazer um esboço do gráfico da função custo total.
- (c) Como podemos visualizar os custos fixos e variáveis no gráfico?



## *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **4ª. Etapa:** Análise gráfica explorando deslocamentos horizontais e verticais, reflexões, simetrias, etc.
  - ◆ É importante propor atividades que levem o aluno a inferir resultados mais gerais.
  - ◆ Não esquecer as conversões entre os registros de representação gráfico e analítico.



## *Situações exemplos*

Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:

Dado o gráfico de  $y=f(x)$ , o que se pode afirmar sobre o gráfico de  $f(x-a)$  quando  $a>0$ ? E quando  $a<0$ ?

(a)  $y= x^2$

$y=( x - 2)^2$

$y=(x - 4)^2$

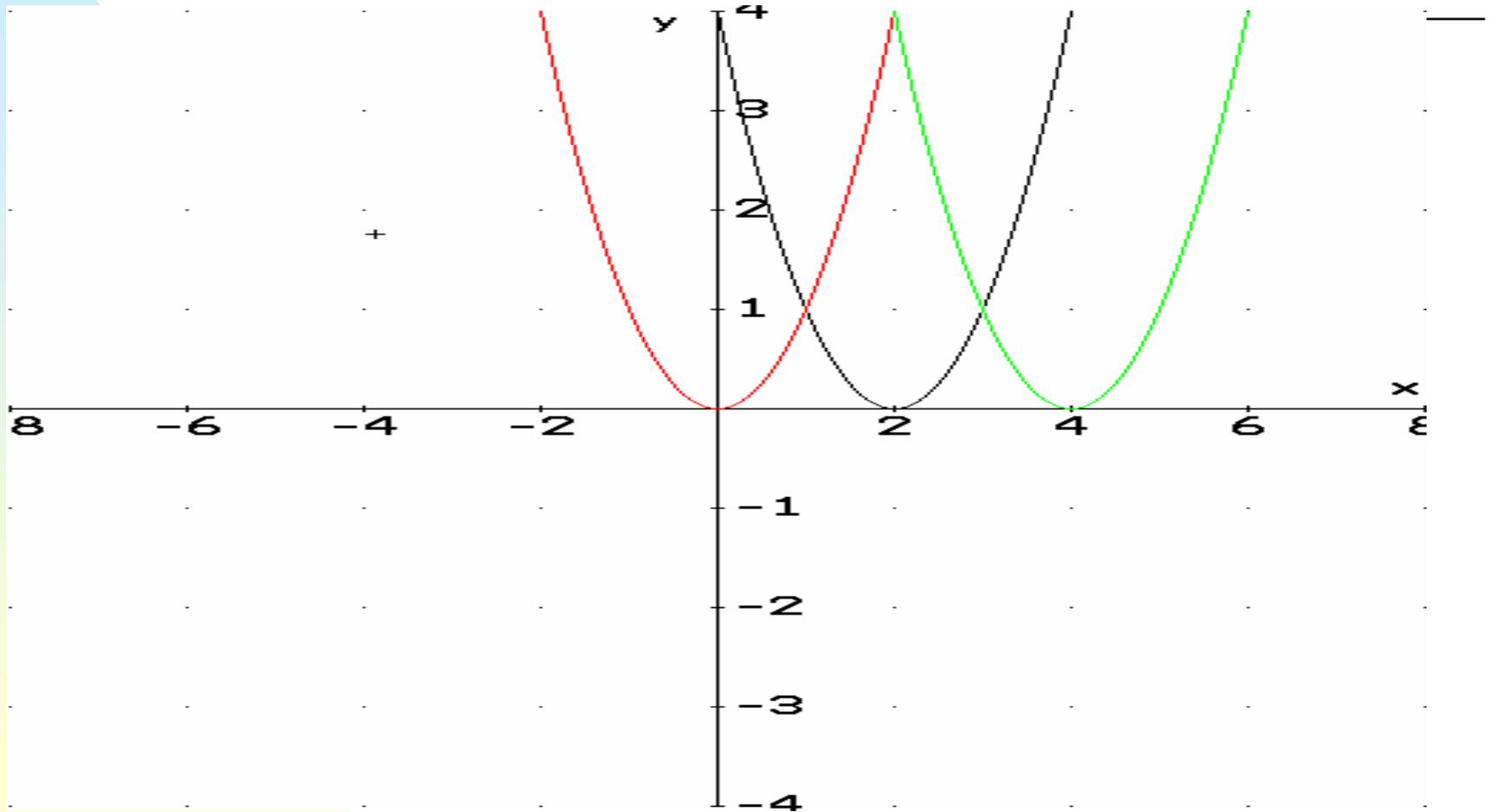
(b)  $y= x^2$

$y=(x + 2)^2$

$y=(x + 4)^2$



## *Situações exemplos*



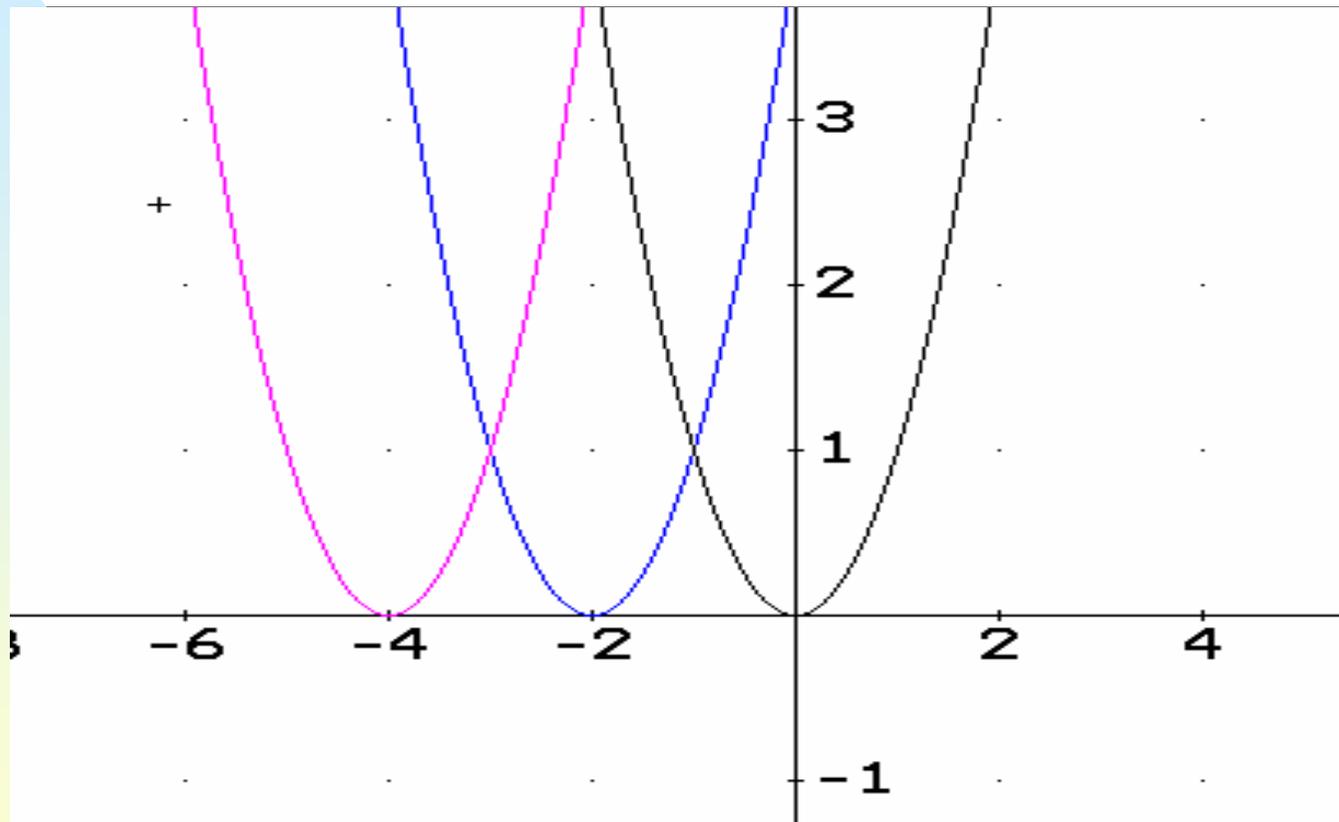
$$y = x^2$$

$$y = (x - 2)^2$$

$$y = (x - 4)^2$$



## *Situações exemplos*



$$y = x^2$$

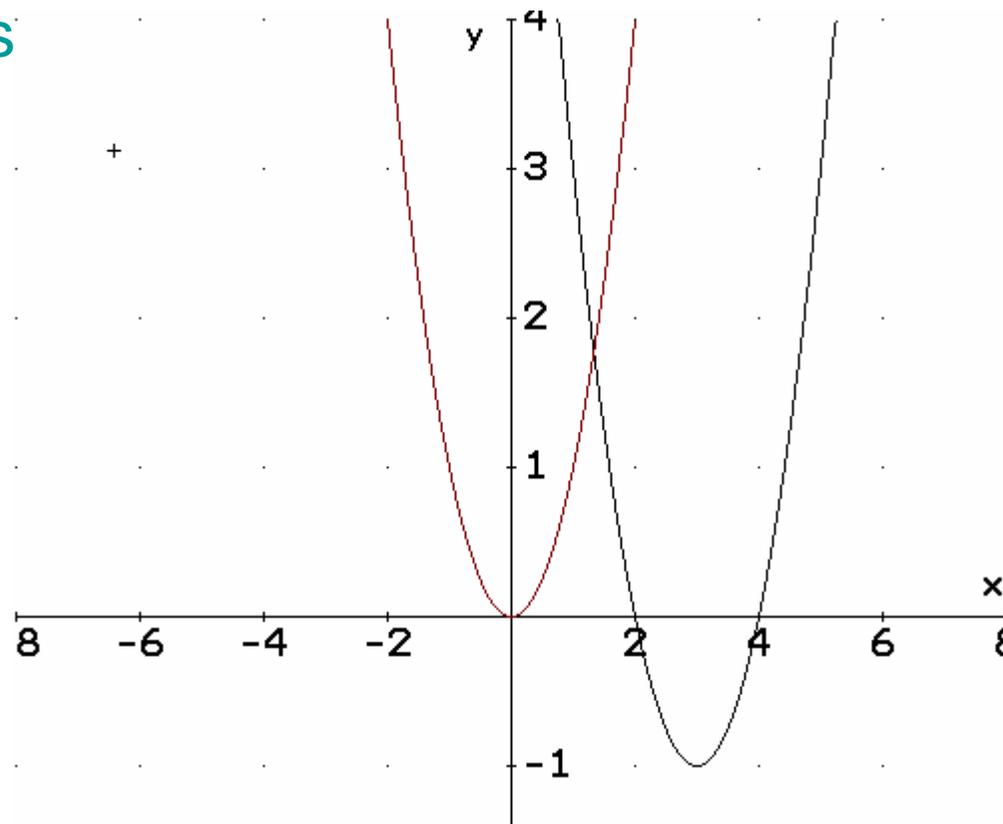
$$y = (x + 2)^2$$

$$y = (x + 4)^2$$



## *Situações exemplos*

Identifique algebricamente as transformações realizadas na parábola “mãe”  $y=x^2$ , para obter a seguinte função quadrática:  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . A seguir trace o gráfico e compare os resultados





## *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

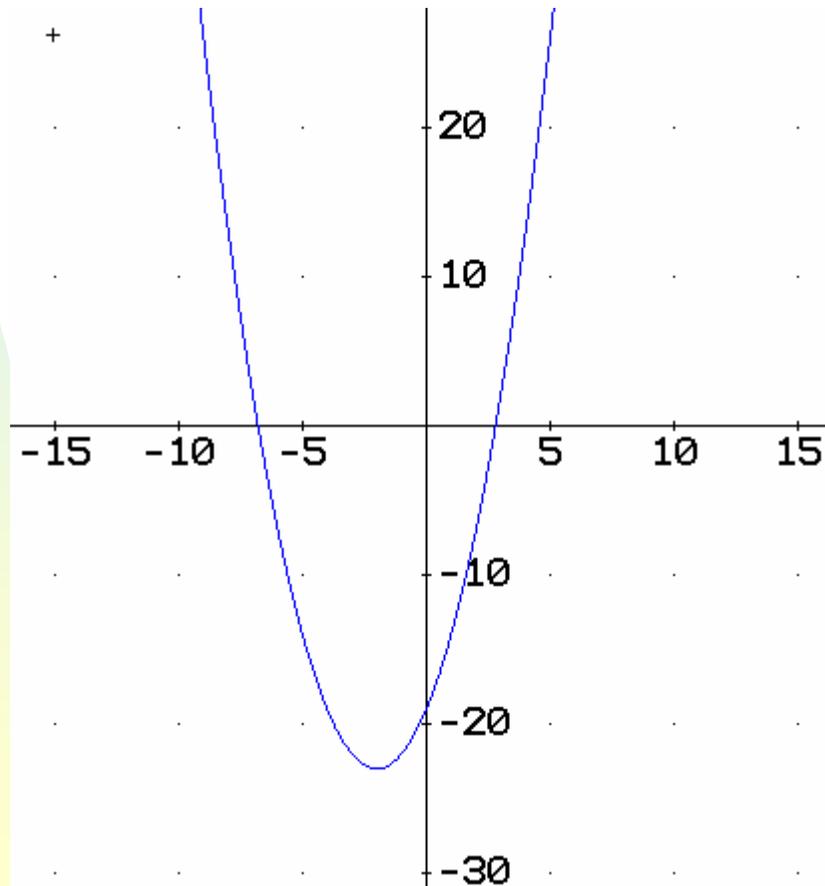
- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **5ª. Etapa:** Análise de algumas situações genéricas.
  - ◆ Nesta etapa o professor pode explorar as limitações da representação gráfica para obter resultados exatos.
  - ◆ Por exemplo, determinar os zeros da função

$$y = x^2 + 4x - 19$$



# *Uma abordagem para o estudo das funções*

---





# *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **5ª. Etapa:** Análise de algumas situações genéricas.
  - ◆ Se  $f$  é linear e é uma função crescente então o coeficiente angular é (+).
  - ◆ Se uma função quadrática tem dois zeros distintos, então, no conjunto imagem teremos números reais positivos e também negativos.



## *Uma abordagem para o estudo das funções*

---

- **Palavras chave: motivação, contextualização e representação gráfica**
- **6ª. Etapa:** Introdução das demais funções elementares, utilizando todo o embasamento das etapas anteriores.
  - ◆ **Obs.:** Esta abordagem pode ser feita mesmo sem um laboratório de informática.



## *Trabalhar em paralelo no ambiente lápiz/papel*

---

**Exemplos:** Identificar as afirmações verdadeiras, fazendo um esboço gráfico para justificar a sua resposta.

- ➡ Se  $f$  é côncava para baixo, então o segmento de reta que une os pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  está abaixo do gráfico de  $f$ .
- ➡ Se  $f$  é decrescente e  $a < b$ , então o ponto  $(b, f(a))$  está abaixo do gráfico  $f$ .



## *EXEMPLOS*

---

☞ Se fizermos uma reflexão em torno do eixo  $y$ , do gráfico de  $y = f(x)$ ,  $x > 0$ , e este coincidir com o gráfico de  $y = f(x)$ ,  $x < 0$ , então

$$f(-x) = f(x), \forall x$$

☞ Se  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x$  então uma dupla reflexão (uma em torno de cada eixo) leva o ponto  $(a, f(a))$  no ponto  $(-a, f(-a))$ .



## *ALGUNS PONTOS PARA REFLEXÃO*

- **Sobre a natureza das imagens construídas (Luc Trouche, 1996)**

<b>A imagem lápis-papel</b>	<b>A imagem teclado-tela</b>
A imagem é fabricada; o aluno é produtor	A imagem é recebida; o aluno é espectador
A imagem resta; ela reside no caderno, dentro do contexto; fica colada às definições e teoremas	A imagem se desvanece; fica colada à máquina que não tem status de ferramenta matemática



## *ALGUNS PONTOS PARA REFLEXÃO*

- **Sobre a natureza das imagens construídas (Luc Trouche, 1996)**

<b>A imagem lápis-papel</b>	<b>A imagem teclado-tela</b>
A imagem é única. Para obter as informações necessita-se refletir sobre a mesma.	A imagem é múltipla. Pode-se fazer zoom para frente, para trás; As imagens sucessivas são memorizadas? São memorizáveis? Não constituem um quebra-cabeça?



## ***ALGUNS PONTOS PARA REFLEXÃO***

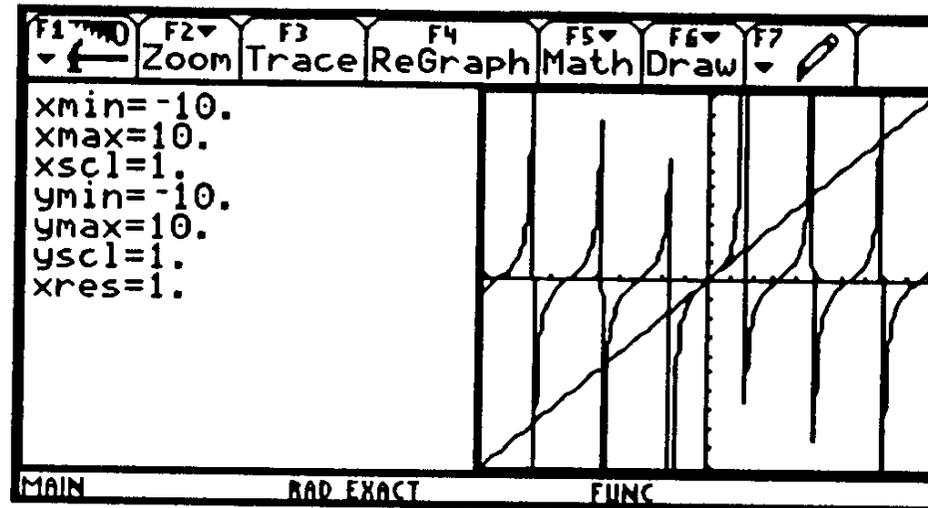
<b>A imagem lápis-papel</b>	<b>A imagem teclado-tela</b>
<p>A imagem é uma imagem de síntese. Aparece como o resultado de um trabalho, como “término”.</p>	<p>A imagem é uma imagem para a análise. Ela é, em potencial, um recurso para a formulação de conjecturas, para a verificação parcial das mesmas e para resolver problemas.</p>
<p>A imagem é falível. Ela tem a autoridade do papel e de seu portador, que se engana freqüentemente.</p>	<p>A imagem é infalível. Ela tem a autoridade “incontestável” da máquina</p>



# *SITUAÇÕES EXEMPLO*

*(Luc Trouche, 1996)*

⇒ Quantas soluções tem a equação  $x = \text{tg } x$  ?



**Resposta:** 5 ou 6, dependendo da calculadora.



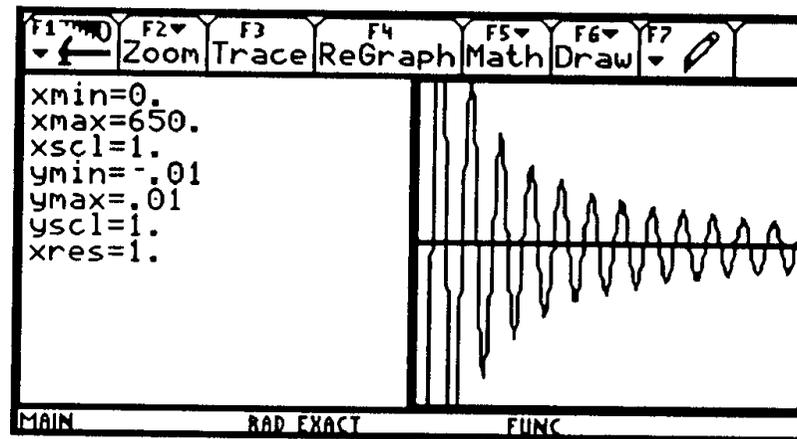
# *SITUAÇÕES EXEMPLOS*

## *(Luc Trouche, 1996)*

⇒ Qual o número de soluções de  $\text{sen}x/x = 0$  no intervalo  $(0, 650]$  ?

**Primeiro momento:** procedimentos de cálculo

**Segundo momento:** análise gráfica



**Resultado:** Muitos alunos deixaram de lado o resultado teórico e deram respostas erradas.



## *SITUAÇÕES EXEMPLO*

*(Luc Trouche, 1996)*

---

⇒ Explicar a expressão: “uma reta é tangente à parábola...”

**Tipo de resposta:** Uma reta é tanto mais tangente à parábola quanto mais pontos em comum elas tiverem.

⇒ **Além disso, no Brasil, ...**



## *Cuidado!*



### **Desconectados**

Sem supervisão, computadores nas escolas brasileiras mais distraem do que ensinam

Fonte: Revista Veja, 8 de agosto de 2007

Mesmo assim, vale a pena usar apoio computacional em nossas aulas?



### **EFEITO NEGATIVO**

O que concluiu o Ministério da Educação (MEC) sobre o impacto do computador nas escolas brasileiras

- Os estudantes que usam computador na escola estão seis meses atrasados nas matérias em relação aos que não têm acesso ao equipamento
- Eles se saem pior em sala de aula porque perdem tempo com jogos e bate-papos virtuais



# ***SOBRE O PERÍODO QUE ESTAMOS VIVENCIANDO***

---

⇒ Lakatos (1976):

***“Nenhum dos períodos “criativos” e praticamente nenhum dos períodos “críticos” das teorias matemáticas poderiam ser admitidos no paraíso formalista, onde as teorias matemáticas habitam como serafins, purificadas de todas as incertezas terrestres”.***



# ***SOBRE A NOSSA EXPERIÊNCIA***

---

⇒ Alguns aspectos importantes:

- ◆ Grande motivação por parte dos estudantes
- ◆ Possibilidade efetiva de explorar mais os conceitos e utilizar problemas mais “reais”
- ◆ Necessidade de criar seqüências didáticas que mostrem as limitações da máquina
- ◆ Falta de recursos humanos e concepção ergonômica dos laboratórios
- ◆ Falta de manutenção dos equipamentos



# ***SOBRE A NOSSA EXPERIÊNCIA***

---

⇒ Alguns aspectos importantes:

- ◆ É importante que exista uma máquina para cada dois alunos. Quando três estudantes usaram a mesma máquina, a experiência mostrou que um deles não participou efetivamente das atividades.
- ◆ É importante complementar (ou intercalar) as atividades desenvolvidas no computador com **atividades no ambiente lápis/papel**. Isso permite uma reflexão maior do estudante, com ganho de aprendizagem.
- ◆ O papel do professor é fundamental para explorar e formalizar os novos conhecimentos surgidos e para promover a institucionalização dos mesmos.



## ***FINALIZANDO...***

---

- ☆ **MOTIVAÇÃO:** mola propulsora para a aprendizagem.
- ☆ A máquina é “**BURRA**”. Explorar muito as suas deficiências.
- ☆ **Interdisciplinaridade?** Contextualizar: mude os enunciados dos problemas.

### **TAXI - BANDEIRADA**

- ☆ **CONFIANÇA E AUTO-ESTIMA DOS ESTUDANTES**  
**professor x aluno**
- ☆ **A matemática é útil, é linda... Cabe a nós professores possibilitar que os alunos descubram isso.**



## *DESAFIOS FUTUROS*

---

- ☆ Tornar rotineiro o uso do computador no ensino, em todos os níveis, em todas as escolas.
  - ☆ Cada sala de aula teria um computador com um projetor (mas continuaríamos a usar o quadro...)
  - ☆ Todos os estudantes teriam acesso a laboratórios de informática.
- ☆ Tornar obsoleto o desperdício de tempo com a aprendizagem de “receitas de bolo” e cálculos inúteis. Priorizar o desenvolvimento do raciocínio, do estabelecimento de relações, etc.



---

# Muito Obrigada!

*Profa. Mirian Buss Gonçalves*

[mirianbuss@brturbo.com.br](mailto:mirianbuss@brturbo.com.br)

[mirianbuss@deps.ufsc.br](mailto:mirianbuss@deps.ufsc.br)