

# A INFORMÁTICA EDUCATIVA E O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Carmen Teresa Kaiber<sup>1</sup>  
Sandra Pacheco Renz<sup>2</sup>

## RESUMO

Este artigo apresenta resultados parciais do projeto de pesquisa “Investigando o potencial de utilização do software Maple no ensino do Cálculo Diferencial e Integral” que objetiva investigar possibilidades de utilização do referido *software* no desenvolvimento teórico e prático do Cálculo Diferencial e Integral. Metodologicamente, o projeto fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1995), se caracteriza por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, no que diz respeito à concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

**Palavras-chave:** ensino do Cálculo, *software* Maple.

## PROJETO: INVESTIGANDO O POTENCIAL DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAPLE NO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Durante muito tempo, a utilização da tecnologia (calculadoras, computadores e outras mídias) foi muito criticada em função dos perigos que poderia trazer aos estudantes. Segundo Borba e Penteado (2001), ponderava-se que os alunos passariam a apertar teclas e obedecer à máquina, o que contribuiria para torná-lo cada vez mais um repetidor de tarefas. Esse pensamento era defendido (e ainda é) especialmente por quem acreditava (e acredita) ser a Matemática um corpo de verdades exclusivamente acessíveis por meio de uma linguagem abstrata e simbólica. Conforme o autor, atualmente, há argumentos que apontam o computador como a solução para os problemas educacionais, mas considera que, nessa discussão, há espaço para outros posicionamentos.

---

<sup>1</sup> Universidade Luterana do Brasil – ULBRA / [kaiber@ulbra.br](mailto:kaiber@ulbra.br)

<sup>2</sup> Universidade Luterana do Brasil -- ULBRA / [sp\\_renz@yahoo.com.br](mailto:sp_renz@yahoo.com.br)

Nesse contexto, o presente projeto de pesquisa visa investigar possibilidades de uso do *software* Maple nas atividades acadêmicas dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática, bem como avaliar o impacto da utilização do mesmo no desempenho e aprendizagem dos alunos, criando e organizando atividades que integrem aspectos teóricos e práticos, permitindo uma análise crítica e qualitativa dos conceitos matemáticos.

A pesquisa envolveu 23 alunos da disciplina de Cálculo III dos cursos de graduação de Engenharia e Licenciatura Plena em Matemática no período de Março a Julho de 2005.

Metodologicamente, o projeto fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1995), como metodologia de investigação, caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. A metodologia da Engenharia Didática abrange uma distinção temporal em seu processo experimental, composta de quatro fases: análise preliminar, concepção e análise a priori das situações didáticas, experimentação e fase de análise a posteriori e avaliação.

## **RESULTADOS**

### **Análise preliminar**

O Cálculo, que no início do seu desenvolvimento tinha um caráter mais geométrico, passou a ter, no século XVIII, um caráter mais algébrico, que passou a ser a base da argumentação e obtenção de resultados (RIVAUD, 1996). Embora tenha se desenvolvido para resolver problemas de Física, sua potência e versatilidade levaram aos mais diversos campos de estudo. A utilização dos seus conceitos fundamentais – a derivada e a integral definida – estão presentes na solução de problemas que vão desde a descrição do comportamento de partículas atômicas e a estimativa da evolução de um tumor na terapia radioativa até a determinação do trabalho necessário para mandar uma sonda espacial a outro planeta. Ambos os conceitos, de derivada e integral, são definidos por processos de limites. A noção de limite é a idéia inicial que separa o Cálculo da Matemática elementar.

No que se refere ao seu ensino, o Cálculo Diferencial e Integral, historicamente, caracteriza-se pela prevalência de processos algébricos seguidos de exercícios, via de regra, de caráter repetitivo e com pouca, ou quase nenhuma interdisciplinaridade. Aplicações a ciências

como física e engenharia são apresentadas como exercícios ou em capítulos separados, às vezes parecendo algo isolado.

No que se refere à utilização de recursos computacionais como apoio metodológico para o ensino do Cálculo, um aspecto importante a ser considerado é a disposição de professores e alunos em utilizá-los. Nesse sentido, investigou-se essa postura junto a alunos e professores.

Foram entrevistados vinte e três (23) alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III e ficou constatado que, dos alunos entrevistados, onze consideram seu conhecimento de informática regular, doze nunca utilizaram *software* matemático em sala de aula, dez consideram importante utilizar um recurso computacional na disciplina, e nove não conhecem o Maple.

Quando questionados sobre como deveriam ser as aulas de Cálculo utilizando recursos computacionais, oito indicaram que deve ser na exploração dos conteúdos, quatro na apresentação de exemplos e seis na resolução de exercícios.

Com relação aos professores, foram investigados quatorze docentes do Departamento de Matemática da Universidade onde o projeto se desenvolveu. Dos professores entrevistados, sete conhecem o Maple e consideram importante utilizá-lo para o desenvolvimento do conteúdo. Acreditam que o interesse dos alunos pelas aulas seria superior se fosse utilizado um *software*. Quanto à questão aprovação e reprovação, seis dos professores entrevistados acreditam que a aprovação dos alunos seria superior, caso fosse utilizado um *software* em aula enquanto que quatro indicam que a aprovação seria igual e quatro não opinaram a respeito. A opinião dos professores se dividiu com relação à forma como a aula deveria ser organizada, entre uma aula expositiva e prática, utilizando o *software* para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno que refaz no *software* os exemplos citados pelo professor e uma aula igualmente expositiva e prática, porém, utilizando o *software* para desenvolver o conteúdo com a participação do aluno que constrói seus próprios exemplos.

### **Concepção e análise *a priori* das situações didáticas**

As aulas de caráter teórico-prático foram desenvolvidas no laboratório de informática, alternando discussões teóricas, pesquisa bibliográfica e o trabalho com o *software*. Foram propostas atividades nas quais era solicitado que o aluno, primeiramente, apresentasse uma proposta de solução, ou seja, quais as estratégias que seriam utilizadas, em que momento e de que forma seria utilizado o *software* e como seria possível validar o resultado obtido, passando, a seguir, a resolver o problema. Foram realizados 17 encontros de quatro horas-aula sendo que 10 deles ocorreram no laboratório de informática. Os encontros, a produção e o desempenho dos alunos foram avaliados continuamente através da observação do professor e registrados em um diário de campo. O instrumento utilizado para avaliar a proposta de trabalho junto aos alunos foi um questionário aplicado no término do projeto. As situações didáticas, sob a forma de atividades, são apresentadas a seguir.

### **Aplicação da Seqüência Didática**

A fase da experimentação ou aplicação da seqüência didática é uma etapa importante do processo porque, nessa fase, são acompanhadas, observadas e registradas a postura, atitude e tomada de decisão dos alunos em relação à realização das tarefas propostas. O professor acompanha o trabalho do aluno, faz indagações, refuta, argumenta e registra os fatos relevantes em um diário de campo que é retomado para complementação logo após o desenvolvimento da sessão. As tarefas desenvolvidas pelos alunos, as soluções apresentadas, as estratégias desenvolvidas também são acompanhadas através da análise das escritas dos alunos. Esses registros são de fundamental importância para garantir a proximidade dos resultados com a análise teórica e permitir uma análise posterior de qualidade. A seguir, são apresentados exemplos de problemas propostos com os comentários pertinentes.

#### **Problema 1:**

(a) Se  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , encontre  $\int_1^t f(x) dx$  quando  $t = 1000, 2000, 3000, 4000$  e  $5000$ . O

que está acontecendo? Calcule a integral analiticamente quando  $t$  tende a mais infinito e compare os resultados.

(b) Se  $f(x) = \frac{1}{x}$ , encontre  $\int_1^t f(x) dx$  quando  $t = 1000, 2000, 3000, 10000$  e  $100000$ .

O que está acontecendo? Calcule a integral analiticamente quando  $t$  tende a mais infinito e compare os resultados.

(c) Compare as soluções dos itens (a) e (b) e justifique sua resposta.

Objetivo: Investigar o comportamento da integral de uma função a partir de um conjunto de valores. Analisar a convergência ou divergência de uma integral imprópria.

Solução apresentada (evolução da atividade):

A primeira idéia apresentada pelos alunos foi a construção do gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  em um intervalo qualquer. O software mostrou uma linha vermelha sobre o eixo das abscissas e das ordenadas. As manifestações foram imediatas: “Por que está acontecendo isso? Está errado?”, “O meu não deu certo!...”

Na comparação dos resultados com os colegas, houve a percepção que deveria ser colocada uma variação para o eixo das ordenadas.

Partiu-se, então, para a resolução da integral para diferentes valores de  $t$ , conforme figura 1.

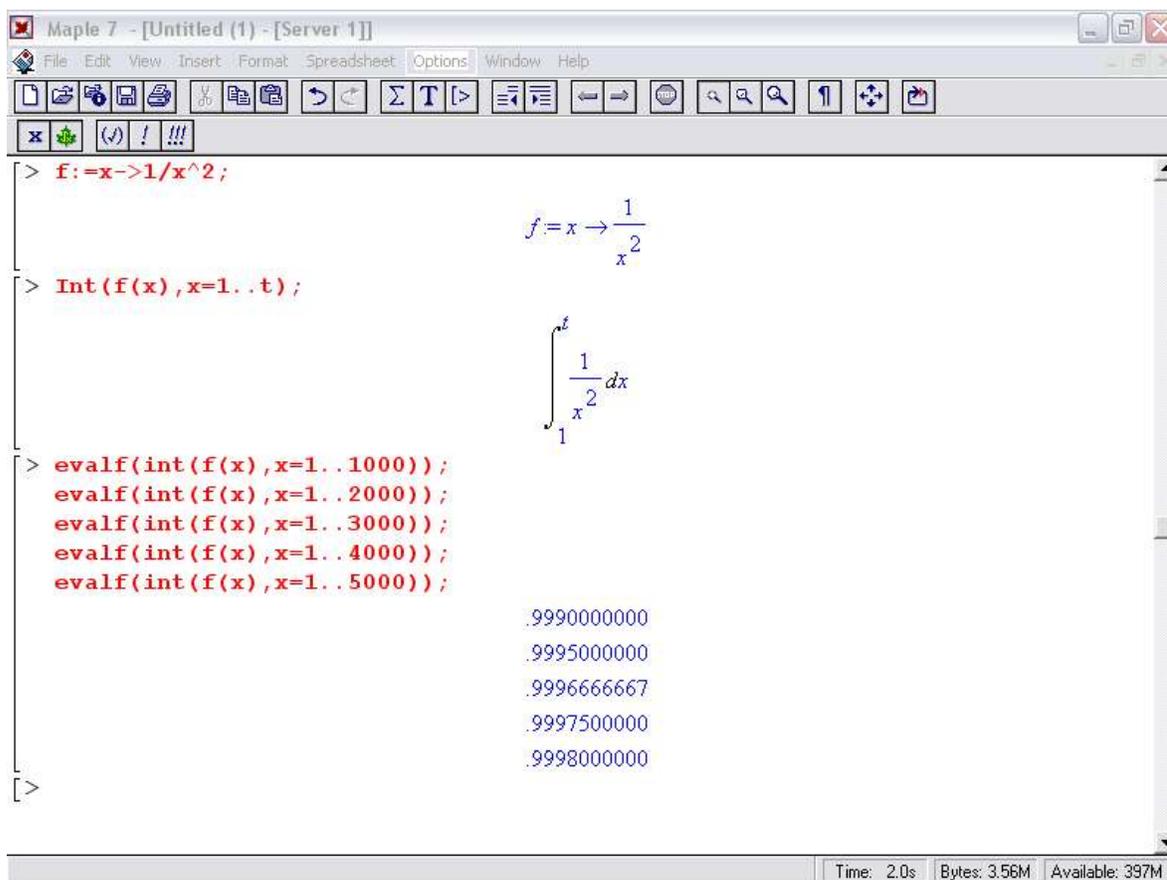


Figura 1 – Construção da solução apresentada pelos alunos ao item a

A idéia de limite foi percebida imediatamente, pois foram apresentadas as seguintes respostas: “Conforme t aumenta, a função tende a 1. O limite da integral dessa função, de 1 a t, com t tendendo a infinito é 1”. “O resultado está tendendo a 1, portanto, a integral converge”. “A integral está se estabilizando, tendendo a 0,9998000. A integral converge para 1”.

Quando solicitados a encontrar a solução analítica, alguns solucionaram utilizando o *software*, outros lápis e papel, confrontando os resultados e concluindo que a integral convergia.

Quanto ao item (b), a idéia inicial proposta pelos alunos foi a mesma do item (a): construção do gráfico em um intervalo qualquer. No entanto, um fato inusitado aconteceu, o *software* mostrou uma linha vermelha sobre o eixo das ordenadas, apesar da variação para y já ter sido estabelecida. Houve a percepção de que ocorreria um erro matemático,

devido à inclusão do zero no intervalo estabelecido para a construção do gráfico, o que permitiu a discussão sobre a continuidade da função.

Cabe ressaltar que, no primeiro caso, houve apenas uma má visualização gráfica, enquanto que, no segundo, uma limitação do software. Resolvido o problema gráfico, partiu-se para a resolução do problema do item (b).

Constatou-se, nesse item da questão, que os alunos resolveram um número maior de integrais para se certificarem que a solução divergia, o que ficou evidenciado pelos comentários realizados em sala de aula: “Acho que não dá certo”, “O resultado sempre dá diferente”, “O resultado está oscilando, porque a integral diverge”. No entanto, para alguns, foi necessário desenvolver a solução analítica para esclarecer as dúvidas a respeito da convergência ou divergência.

Quanto à comparação dos itens (a) e (b), a resposta mais comum foi que a integral do primeiro exemplo converge e a do segundo exemplo diverge devido ao limite da função, o que pareceu uma resposta ligada somente ao resultado obtido na integral. O professor provocou uma discussão sobre o decrescimento das funções em questão como justificativa da situação de convergência de ambas.

A partir da construção gráfica, da análise dos resultados e da verificação analítica, o conceito de integral imprópria ficou bem definido para os alunos. Ao longo do processo de aprendizagem, surgiram fatos novos que envolveram outros aspectos, que não o solicitado pelo professor, o que propiciou a reflexão e a discussão entre os alunos.

### **Análise a posteriori e validação**

Com a utilização do Maple como recurso na disciplina de Cálculo, constatou-se grande interesse e uma significativa participação dos alunos. Os trabalhos foram realizados em pequenos grupos, o que propiciou a investigação das atividades, a análise do software e o questionamento entre os envolvidos.

Quando solicitados a apresentarem uma proposta de solução para as atividades, houve uma resistência inicial. Foram comuns perguntas como “O que eu tenho que fazer?”, “Que comandos preciso usar?”. Aos poucos, foi se atingindo o amadurecimento dos alunos em relação à proposta de trabalho.

O estudo das integrais impróprias permitiu que a potencialidade do software fosse descoberta. Ao fazer uma análise gráfica e perceber que o *software* apresentava um resultado diferente do que era conhecido, rompeu-se um paradigma. O foco da aprendizagem passou a ocorrer no domínio do processo matemático e não na mecanização do processo ou exclusivamente na solução algébrica.

Os maiores avanços no processo de aprendizagem ocorreram quando as soluções obtidas com a utilização do Maple iam além dos conhecimentos do aluno. Por exemplo, analisando graficamente uma função, constata-se que a função não intercepta o eixo das abscissas, logo não tem raízes. No entanto, o *software* encontra as raízes dessa função. Alguns alunos achavam que estava errado; outros justificavam que o software encontrara raízes complexas. Surgiu a preocupação com a definição dos conceitos e com a maneira de expressar oralmente esses conceitos como, por exemplo, ao invés de dizer “não existe raiz de número negativo” diz-se “não existe raiz de índice par, real, de um número negativo”.

Cabe ressaltar que essas experiências foram possíveis devido à flexibilidade do Maple e através do enfoque não analítico adotado. Percebeu-se que o conhecimento foi construído a partir do envolvimento na solução dos problemas propostos, nas discussões realizadas nos pequenos e no grande grupo e através das ações e intervenções do professor. O ambiente informatizado foi o diferencial, pois possibilitou um substrato de ação que a aula convencional não propicia.

## CONCLUSÃO

O desenvolvimento do projeto mostrou que explorar softwares matemáticos, identificando o potencial de utilização dos mesmos no ensino da Matemática, é um trabalho fascinante e promissor. Levar esse trabalho para a sala de aula motiva os alunos, possibilita um trabalho autônomo, aumentando o interesse e a participação, o que leva a uma melhor compreensão dos conteúdos.

Contudo, incorporar tecnologia às aulas de Matemática vai muito além de proporcionar os instrumentos tecnológicos aos estudantes. A aprendizagem deve desenvolver-se em um ambiente apropriado e em situações que favoreçam a construção sólida dos conhecimentos, transformando a maneira como se resolvem problemas teóricos e práticos, como se faz e como se percebe a Matemática (Silva, 2003).

Cabe ressaltar que a continuidade das pesquisas envolvendo ferramentas computacionais é de grande importância, pois se constitui em estudo atual e necessário não só em termos de aplicações específicas, mas como base para a discussão dos efeitos da sua utilização no ensino.

## REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michéle et al. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BORBA, Marcelo de Carvalho e PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

RIVAUD, Juan José M. Del Cálculo al Análisis: Desarrollo del concepto de función. In: Trigo, Luz Manuel Santos e Sánchez, Ernesto Sánchez. *Perspectivas en Educación Matemática*. México: Grupo Editorial iberoamérica S. <sup>a</sup>, 1996. P117-133.

SILVA, Carmen Kaiber. Informática e Educação Matemática. In: V Simposio de Educación Matemática, 2003, Chivilcoy. **Memorias**. Buenos Aires: Edumat, 2003.