

# A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E O ESQUEMA DE VAN HIELE

Márcia Werlang <sup>1</sup>

Rubén Edgardo Panta Pazos <sup>2</sup>

## RESUMO

Esse trabalho de pesquisa está alicerçado num estudo desenvolvido na década dos anos 50 por um casal de professores holandeses, Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, que estudavam uma nova didática para ensinar aos seus alunos do Ensino Fundamental e Médio, os conceitos da Geometria Euclidiana. O casal buscava entender porque os alunos, de um modo geral, tinham tantas dificuldades em aprender Geometria. Desse estudo originou-se o esquema de van Hiele, que consiste em duas etapas: os níveis de raciocínio e as fases de aprendizagem, esquecido ou ignorado por cerca de 50 anos, mas resgatado por Freudenthal em USA. O nosso objetivo é verificar até que ponto esse esquema pode ser adaptado a outros conceitos matemáticos do Ensino Médio das redes particular e estadual do Vale do rio Pardo e Taquari.

---

Palavras- chave: *Esquema de van Hiele* – Educação Matemática – Funções

## 1 INTRODUÇÃO

Grandes são os problemas brasileiros e porque não dizer mundiais com referência a Educação. O nosso interesse nessa discussão está pautado em cima da Educação Matemática. No entanto, se, refletirmos sobre o ensino-aprendizagem dessa disciplina iremos ver que esses problemas não são novos. Em torno de 50 anos atrás iniciaram os movimentos que mostraram a preocupação dos educadores matemáticos quanto à aprendizagem efetiva dessa disciplina no contexto da vida social. Surgiu então o movimento da Educação Matemática. Hoje, várias áreas como a Psicologia, a Estatística e a Pedagogia estão empenhando-se em dar sua contribuição para obter melhores resultados no ensino-aprendizagem em geral. Com o avanço da tecnologia, e a presença dessas nos lares e em muitas escolas, os alunos passam a se sentir

---

<sup>1</sup> [marciawerlang@mx2.unisc.br](mailto:marciawerlang@mx2.unisc.br), UNISC, sala 1301, Departamento de Matemática, Av. Independência, 2293, CEP. 96815-900, Santa Cruz do Sul, RS.

<sup>2</sup> [rpazos@unisc.br](mailto:rpazos@unisc.br), UNISC, sala 5340, Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Processos Industriais - Mestrado, Av. Independência, 2293, CEP. 96815-900, Santa Cruz do Sul, RS.

atraídos pela possibilidade de estarem em contato permanente com o mundo, através da Internet, que é bem mais atraente que a realidade de muitas salas de aula. A Internet oferece um mundo de possibilidades, mas, cujo uso experimenta o acontecido com a língua na fábula de Esopo <sup>3</sup>, uma ferramenta que é muito boa e que pode ser também muito má; o poder de atração da televisão e da Internet são tão fortes que as crianças e os jovens reproduzem novos comportamentos frente à sala de aula que, com frequência, é administrada em termos clássicos, exceto casos muito isolados.

O Brasil possui instituições onde se faz Matemática de alto nível, só que não é difícil de observar que a menos de um quilômetro de tais instituições as crianças e jovens não trabalham com sucesso os conceitos matemáticos elementares. No último PISA <sup>4</sup>, numa avaliação sobre o desenvolvimento de problemas relativos a Matemática, o Brasil teve o último lugar num espectro de 40 países envolvidos.

Vários são os educadores que já estudaram o problema do processo de ensino-aprendizagem, entre os quais o casal holandês van Hiele, cujo projeto propunha investigar como o raciocínio *geométrico* dos alunos evoluía (*teoria dos níveis de raciocínio*). Estudava também, a forma de ajuda do professor a seus alunos, a fim de aperfeiçoar a qualidade desse raciocínio (*teoria das fases de aprendizagem*). O nosso grupo de estudo tem a intenção de adaptar e de aplicar ao longo do período de execução do projeto, esse modelo a outros conceitos matemáticos, tais como funções, vetores, equações elementares, probabilidade, seqüências, matrizes, entre outros. O modelo do casal van Hiele consiste em um esquema de compreensão do aluno através de níveis de raciocínio hierárquicos e seqüenciais. Estes níveis são classificados em visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Vejamos no que consiste cada um deles:

---

<sup>3</sup> Na fábula, Esopo advertia que a língua podia ser usada para fazer o bem, dar belos discursos, bonitas poesias, mas também podia empregar-se para insultar, fazer coisas ruins.

<sup>4</sup> O PISA é um programa internacional de avaliação comparada, cuja principal finalidade é produzir indicadores sobre a efetividade dos sistemas educacionais, avaliando o desempenho de alunos na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. Esse programa é desenvolvido e coordenado internacionalmente pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), havendo em cada país participante uma coordenação nacional.

- ✚ *Nível 0 (Básico) – Visualização:* Neste nível o aluno visualiza objetos que estão a sua volta, introduzindo desta forma noções de conceitos geométricos. Através desta visualização o aluno percebe as formas geométricas como um todo (aparência física), não pelas suas propriedades ou partes. Nesta fase o aluno ainda não é capaz de tamanha percepção, pois seu vocabulário geométrico está pouco desenvolvido, ou seja, seria incapaz de perceber nas figuras geométricas características como ângulos ou que os lados opostos são paralelos;
- ✚ *Nível 1- Análise:* Para o aluno esta fase é marcada pelo início de uma análise de conceitos e características das figuras geométricas. A partir disto o aluno reconhece que as figuras são divididas em partes. No nível de análise ainda não há uma explicação nas relações existentes entre as propriedades. Não são capazes de distinguir relações entre as figuras e não são capazes de definir conceitos;
- ✚ *Nível 2- Dedução Informal:* Alunos deste nível conseguem produzir relações entre as propriedades das figuras, surgindo assim deduções simples. Há a capacitação de decisões das propriedades das figuras e o reconhecimento das classes das figuras. Neste nível, porém os significados das deduções não são compreendidos como um todo. São capacitados para acompanhar as demonstrações formais, mas não conseguem alterar a ordem lógica e nem provas das deduções com novas formas;
- ✚ *Nível 3- Dedução Formal:* O significado da dedução das teorias geométricas é compreendido de uma forma mais complexa, a partir deste nível é empregado o sistema axiomático. O aluno se sente capaz em construir demonstrações e novas formas de desenvolver suas deduções. Não utiliza muito rigor matemático em suas derivações;
- ✚ *Nível 4- Rigor:* Dentro deste nível o aluno é capacitado a construir noções de várias questões dentro dos sistemas axiomáticos, isto é, há possibilidade de estudarem as geometrias não-euclidianas, neste nível a geometria é vista em um plano abstrato.

Nas fases de aprendizagem o objetivo é favorecer o deslocamento do aluno para um nível imediatamente superior ao que ele se encontra, tendo as seguintes etapas:

- ✚ *Informação:* o aluno explora, discute com os colegas e professor o material a ser estudado;
- ✚ *Orientação Dirigida:* o professor fornece material sobre o objeto de estudo em função do nível de raciocínio do aluno;
- ✚ *Explicitação:* o professor conduz, orienta as discussões da turma, para que os alunos se apropriem da linguagem pertinente;

- ✚ *Orientação Livre*: o professor fornece ao aluno material com várias possibilidades de uso e dá instruções que permitam diversas formas de atuação do aluno sobre o objeto de estudo;
- ✚ *Integração*: reflexão dos alunos sobre as suas próprias ações nas etapas anteriores.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Existe uma forte relação entre a sociedade e a educação; na Grécia antiga a educação esteve limitada a minorias no marco de uma sociedade culta, mas escravista. O diálogo socrático, a heurística, a hermenêutica são conceitos e fatos próprios dessa civilização. O repasse de informação era apenas um índice do elitismo, e assim na entrada da Academia, seu diretor e promotor o filósofo Platão colocou a inscrição “*não pode ingressar quem não saiba a geometria*”, pois ele achou que a Matemática da época tinha a geometria como um pivô da estrutura perfeita do conhecimento. Antes, os babilônios estabeleceram descobertas relativas a medições da terra, e registraram em tábuas graníticas seus principais conhecimentos. Sua escrita cuneiforme permitiu reconhecer que seus conhecimentos foram transmitidos em forma quase fechada de geração em geração. O que foi comum nas civilizações do velho mundo, e nas civilizações pré-colombianas. A Idade Média é um símbolo da escuridão, e o desenvolvimento da Matemática indiana e árabe permite observar que muitos tópicos da Matemática foram realizados em trabalhos individuais, mas com alguma relação em equipes primárias para resolver problemas concretos da Álgebra. Talentos do nível do persa Omar Khayyam destacaram-se em áreas tão diversas como a Poesia e a Matemática.

A burguesia trouxe um componente novo na história da humanidade. A procura do máximo lucro, também coincide com os estudos da Física do movimento; e nessa mesma época aparece o Cálculo Diferencial, com sua busca de máximos e mínimos dentre suas aplicações. A Matemática foi desenvolvida principalmente entre os eruditos e sábios que estiveram em torno às cortes imperiais. A idéia de uma cultura de tipo massivo apenas aparece no século XX, com o avanço das formas democráticas ou semidemocráticas de diversos países.

O problema de uma educação que abrange mais estratos da sociedade trouxe um fenômeno novo, a capacidade heterogênea de resultados no processo ensino-aprendizagem. O formalismo na Matemática, especialmente ao formular os conceitos do cálculo, foi seguido de técnicas simples no ensino da Matemática. Por que alguns alunos têm maior poder de assimilação em alguns conceitos do que outros? O que influencia no desempenho desses

alunos? Como reconhece Gardner (2000), alguns alunos possuem habilidades que não estão presentes em outros. Uns apresentam um bom raciocínio lógico-matemático e outros, nem tanto. Ele escreveu suas observações sobre as “inteligências múltiplas” indicando até oito tipos diferenciados de inteligências.

Depois foram postuladas formas da análise epistemológica ou análises psicológicas da forma da aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos matemáticos. O casal Van Hiele dedicou-se na elaboração de um trabalho de pesquisa buscando a forma ideal de aprendizagem dos alunos quanto aos conceitos geométricos elementares, especificamente, na Geometria Euclidiana. A proposta do casal não é só um diagnóstico sobre a evolução da aprendizagem dos alunos, que contempla a assimilação e a acomodação, através de níveis de raciocínio, mas também é uma proposta importante e corretiva. Alguns estudiosos, como Schonfeld, indicaram que não se trata de uma teoria determinista, que a teoria de Van Hiele apenas é uma proposta empirista. Para Piaget, conforme Rodrigues (1993), todo o processo de conhecimento ocorre por meio de assimilação e acomodação. Na assimilação o sujeito modifica o ambiente de acordo com suas necessidades. Incorpora novos elementos às estruturas já existentes. Na acomodação é o ser humano que se modifica. São reajustadas ou criadas estruturas de acordo com a necessidade do meio. Eles (assimilação e acomodação) estão presentes em todas as experiências de percepção do sujeito. Para que ocorra esta adaptação, é necessário que exista um equilíbrio do ambiente com o organismo. Isoda (1996) diz que, os níveis de raciocínio de van Hiele, indicam que o desenvolvimento do estudante se assemelha com o processo de assimilação e acomodação. Segundo Aranão (1997), é tarefa do professor provocar o desequilíbrio das afirmações construídas pelos alunos para que as hipóteses elaboradas pelos mesmos sejam confirmadas como verdadeiras ou sejam reelaboradas. Existem semelhanças e diferenças entre as teorias de Piaget e de van Hiele. O próprio P. van Hiele assinala, em algumas vezes, essas discrepâncias (conferir a obra de Braga, 1991). Estes dois autores afirmam que o desenvolvimento dos conceitos geométricos espaciais é de tipo seqüencial, isto é, partindo da idéia mais simples, passando por etapas até chegar ao conceito elaborado.

Porém, a teoria de Piaget, segundo Braga (1991), é do desenvolvimento e não da aprendizagem. Onde o processo de aprendizagem é entendido como processo de maturação, onde diminui o valor do ensino.

No entanto, o esquema de van Hiele nasceu da necessidade de resolver os problemas que, o casal e seus alunos, enfrentavam na disciplina de Geometria. A investigação fundamental do problema didático foi descobrir porque os alunos tinham tantas dificuldades

em compreender algum conceito novo ou de transferir os conhecimentos na solução de novas situações. Por que apenas conseguiam resolver os problemas concretos e não os abstratos. As preocupações em entender como pode o professor facilitar a ascensão de raciocínio geométrico de seus alunos foi o que levou o casal van Hiele a formular a segunda grande contribuição do modelo: as Fases de Aprendizagem.

Braga (1991), comenta que em seu país o estudo do modelo de van Hiele teve como objetivo adaptá-lo e aplicá-lo a outros conceitos matemáticos do Ensino Médio. Ela justifica esse procedimento tendo em vista que se trata de uma teoria educativa e não psicogenética. Para ela, os autores não caracterizam os níveis de raciocínio como estágios de desenvolvimento, mas como etapas por onde o aluno avança de acordo com as atividades de ensino proposta adequadamente para cada nível. Ela acredita que, a capacidade de provocar o avanço dos alunos através dos diferentes níveis de raciocínio, é decisiva.

Segundo Freudenthal (1973), para o casal holandês, a linguagem tinha um papel decisivo na estruturação do pensamento e por isso davam a ela muita importância, ao contrário de Piaget. Cada nível de raciocínio tem a sua linguagem própria, e o professor deverá adaptar-se a ela para poder, no momento apropriado, permitir que os alunos avancem em direção a linguagem formal. Pois,

O problema de ensino da matemática não é para os autores um problema de lógica da disciplina senão um problema fundamentalmente didático. A teoria dos van Hiele considera o processo de aprendizagem como um processo de reinvenção num momento no qual se considerava que se a análise era capaz de pôr de manifesto a existência de uma estrutura dedutiva das matemáticas, estas deveriam ser inculcadas com essa estrutura dedutiva. Em contraposição com esta idéia, ensinar matemáticas é para os autores iniciar ao aluno uma atividade, pelo que o método empregado não pode reduzir-se aos produtos acabados da disciplina, senão a suas atividades. FREUDENTHAL, H. considera o trabalho dos autores como o primeiro trabalho de qualidade que parte desta perspectiva, e critica aquelas posturas que analisam a estrutura da matéria a ensinar antes de construir o sistema de ensino. (BRAGA, 1991).

Mas, no mundo da epistemologia acontece essa disputa entre diferentes escolas de pensamento. Mesmo assim, trata-se de um proposta que para ser superada, no esquema hegeliano, deve ter uma anti-tese para dar um salto qualitativo depois, e chegar a uma síntese. Além disso, diversos educadores abriram um espaço para estender a proposta dos van Hiele a outros conceitos da Matemática, como limite e continuidade (HERRERO, Pedro Camilo. CARRERAS, Pedro Pérez. da Universidad Politécnica de Valência. Espanha), a formulação das funções (ISODA, Masami. do Institute of Education University of Tsukuba. Japão), etc.

### 3 METODOLOGIA

Queremos estudar o enfoque dos van Hiele aplicado a diversos conceitos Matemáticos do Ensino Médio, visando aperfeiçoar o ensino e aprendizagem na sala de aula. E também desenvolver material computacional para ser utilizado com sucesso e com baixo custo na aplicação destes conceitos matemáticos (função, equações elementares, vetores, probabilidade, seqüências, matrizes).

Para isso na metodologia do nosso projeto faremos uso de uma pesquisa de campo contendo questões sobre o conteúdo de funções onde, os alunos escolhidos, responderão da maneira que lhes melhor convier a essas perguntas. De posse desses dados, avaliaremos em que nível de raciocínio os alunos se encontram (seguindo o esquema de van Hiele) para podermos então elaborar material (conforme as fases de aprendizagem de van Hiele) que favoreça o avanço nos níveis de raciocínio dos alunos no objeto de estudo em questão. No caso do conceito de função, a adaptação do esquema dos van Hiele para esse conceito, no contexto da região do Vale do Rio Pardo e Taquari, seria a seguinte:

- + *Nível 0* - nível da linguagem comum: os estudantes descrevem as relações entre os fenômenos usando a linguagem comum;
- + *Nível 1 - nível da aritmética*: os alunos descrevem as regras das diferentes relações de fenômenos usando tabelas, que são construídas e exploradas com aritmética. Eles também usam fórmulas e gráficos para representar regras e relações;
- + *Nível 2 – nível da álgebra e da geometria*: os alunos descrevem e exploram as funções usando notações e tabelas, equações e gráficos, álgebra e geometria. Nesse nível, já fazem diferentes notações e *internalizações*;
- + *Nível 3 – nível do cálculo*: o cálculo é usado pelos alunos para descrever algumas funções através de derivadas ou de funções primitivas;
- + *Nível 4 – nível de rigorosidade*: nesse nível é realizada a análise formal e mais avançada dos cálculos, podendo ser usada derivada dessas funções.

Depois será novamente realizado um levantamento de dados com esses mesmos alunos para concluirmos a validade da adaptação desse esquema para outros conceitos fora a Geometria. Esse trabalho de coleta de dados será desenvolvido em algumas turmas de Ensino Médio do Vale do Rio Pardo e, num primeiro momento, em escolas de Santa Cruz do Sul.

#### 4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFIA

- ARANÃO, Ivana Valéria D. *A matemática através de brincadeiras e jogos*. Campinas: Papirus, 1997.
- BRAGA, Gloria Maria. *Apuntes Para La Enseñanza De La Geometría*, signos teoria y practica de la educación .Número 4. Página 52/57. Julio - Diciembre 1991.
- FARIA, Anália Rodrigues de. *O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget*. 2.ed. São Paulo: Ática, 1993.
- FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. D. Reidel. Dordrecht, pp 662-677
- FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1984): English translations of selected writings of van Hiele. School of Educ. Brooklyn College. City Univ, of N.York, N. York pp 5-207
- GARDNER, Howard. *Inteligência : um conceito reformulado : o criador da teoria de inteligências múltiplas explica e expande suas idéias com o enfoque no século XXI*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2000.
- ISODA, M.(1996), The Development of Language about Function : An Application of van Hiele's Levels, Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.3, pp.105-112
- VAN HIELE, P. (1986): *Structure and insight*. Academic Press. New York pp 5-6, pp 99-108.