

A MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONSTRUÇÃO DE TELHADOS COM DIFERENTES TIPOS DE TELHAS

Angéli Cervi¹, Rosane Bins², Taila Deckert³ e Pedro A. P. Borges⁴

1. Resumo

A modelagem matemática é um método de investigação que utiliza a associação das estruturas matemáticas às variáveis e parâmetros de problemas dos quais se necessita conhecer soluções com relativa precisão.

O tema escolhido para este estudo, foi a construção civil, e os modelos matemáticos deste trabalho foram baseados em um telhado plano em duas águas, para casas de 6 a 10 metros de largura, com a utilização de telhas cerâmicas (francesa e colonial paulista) e chapas onduladas de cimento-amianto. Iremos nos ater apenas aos cálculos relativos às tesouras (treliças isostáticas) que servem para a sustentação da cobertura..

As coberturas executadas em chapas onduladas de cimento-amianto, apresentam vantagem econômica, pois necessitam de menor inclinação do telhado.

2. Descrição do Problema

Com os modelos matemáticos que iremos desenvolver a seguir, procuramos saber qual a quantidade de madeira e o respectivo custo para a construção de uma tesoura simples, utilizada em casas residenciais, cuja largura varia de 6 a 10 metros.

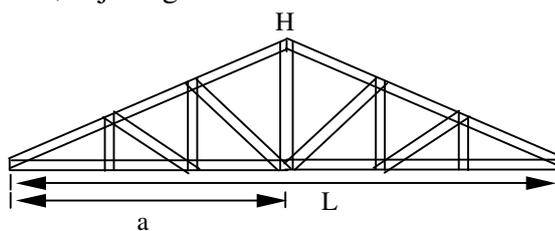


Figura 3 – tesoura howe, com a simbologia utilizada no cálculo de sua altura.

3. Resolução do Problema

Em primeiro lugar, utilizamos um modelo de cálculo da altura da tesoura (H) em função da inclinação do telhado (I) e da largura da casa, já acrescida do beiral (L). Lembramos que a inclinação desejada varia de acordo com o tipo de telha a utilizar.

¹ Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ. E-mail: agcervi@yahoo.com.br

² Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUÍ. E-mail: rosane.bins@detec.unijui.tche.br

³ Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUÍ. E-mail: taila.deckert@detec.unijui.tche.br

⁴ Professor orientador da disciplina de Modelagem Matemática I, do Departamento de Física, Estatística e Matemática da UNIJUÍ. E-mail: pborges@unijui.tche.br

altura largura (base)



Aplicando a regra de três:

$$H \cdot 1 = I \cdot a$$

$$\boxed{H = I \cdot a}$$

(1)

onde:

a = largura dividida por 2, ou seja: $L/2$

I = inclinação do telhado (em decimais)

H = altura da tesoura

Em seguida, utilizamos um modelo para cálculo do ângulo de inclinação do telhado (

)

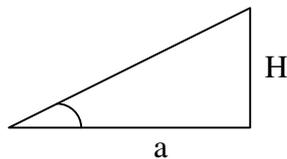


Figura 4 – cálculo do ângulo de inclinação

Aplicando noções de trigonometria, temos:

$$tg\alpha = \frac{H}{a} \quad \text{onde } H = I \cdot a$$

$$tg\alpha = \frac{I \cdot a}{a}$$

$$tg\alpha = I$$

$$\boxed{\alpha = arctg(I)}$$

(2)

O próximo passo é a utilização de um modelo de cálculo do comprimento do banzo superior (B) da tesoura.

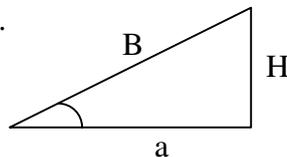


Figura 5 – cálculo do Banzo superior

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$B^2 = a^2 + H^2$$

$$B = \sqrt{a^2 + H^2}$$

$$B = \sqrt{a^2 + (I \cdot a)^2}$$

$$B = \sqrt{a^2 + I^2 \cdot a^2}$$

$$B = \sqrt{a^2(1 + I^2)}$$

$$\boxed{B = a\sqrt{1 + I^2}}$$

(3)

onde: B = comprimento do banzo superior.

Feito isso, passamos a calcular o comprimento das verticais e diagonais da tesoura, procedendo da seguinte forma:

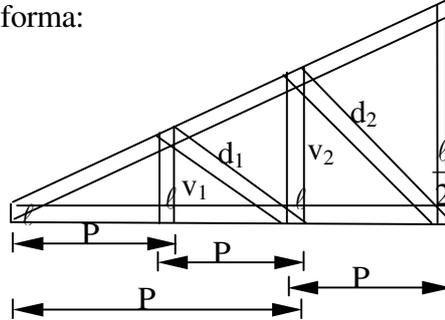


Figura 6 – parte da tesoura, com a simbologia utilizada nos cálculos.

A seguir, apresentamos um modelo de cálculo de um vão entre as verticais da tesoura somado à largura das verticais anterior e posterior ao vão (P_1):

$$\frac{\ell}{2} + \ell + \ell = \frac{\ell + 2\ell + 2\ell}{2} = \frac{5\ell}{2} \quad \text{onde: } \ell = \text{largura da guia de madeira.}$$

$$P_1 = \frac{a + \frac{5\ell}{2}}{3}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{2a + 5\ell}{6}} \quad (4)$$

Passamos, agora, ao modelo do cálculo da altura da primeira vertical (v_1), com a utilização de conceitos de trigonometria:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{v_1}{P_1}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \cdot P_1 = v_1$$

$$\boxed{v_1 = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \left(\frac{2a + 5\ell}{6} \right)} \quad (5)$$

Para que possamos calcular a segunda vertical, procuramos primeiramente, um modelo de cálculo da largura do vão somada à largura da guia (P_1 já encontrado), agora, multiplicado por 2 (P_1):

$$P_2 = 2P_1 - \ell$$

$$P_2 = 2 \cdot \left(\frac{2a + 5\ell}{6} \right) - \ell$$

$$P_2 = \frac{2a + 5\ell}{3} - \ell$$

$$P_2 = \frac{2a + 5\ell - 3\ell}{3}$$

$$P_2 = \frac{2a + 2\ell}{3}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{2(a + \ell)}{3}} \quad (6)$$

Modelo de cálculo da altura da segunda vertical (v_2), também aplicando conceitos trigonométricos:

$$tg(\alpha) = \frac{v_2}{P_2}$$

$$tg(\alpha) \cdot P_2 = v_2$$

$$\boxed{v_2 = tg(\alpha) \cdot \frac{2(a + \ell)}{3}} \quad (7)$$

Na seqüência, utilizamos um modelo de cálculo da primeira diagonal (d_1) em relação à altura da primeira vertical (v_1) e à largura do vão entre as verticais (P_1). Aplicamos, neste caso, novamente o Teorema de Pitágoras:

$$d_1^2 = P_1^2 + v_1^2$$

$$\boxed{d_1 = \sqrt{P_1^2 + v_1^2}} \quad (8)$$

Necessitamos, ainda, de um modelo de cálculo para a segunda diagonal (d_2), em relação à altura da segunda vertical (v_2) e à largura do vão entre as verticais (P_1), também pelo Teorema de Pitágoras:

$$d_2^2 = P_1^2 + v_2^2$$

$$\boxed{d_2 = \sqrt{P_1^2 + v_2^2}} \quad (9)$$

Enfim, para calcular a metragem total de madeira (M) necessária para a construção de uma tesoura, basta somar a base com a altura, o banzo superior, as verticais e as diagonais encontradas anteriormente:

$$\boxed{M = H + 2(a + B + v_1 + v_2 + d_1 + d_2)} \quad (10)$$

Tentaremos, agora, resumir um pouco mais as fórmulas encontradas, em um novo modelo matemático que engloba todos os outros já citados.

$$M = Ia + 2\left(a + a\sqrt{1 + I^2} + v_1 + v_2 + \sqrt{P_1^2 + v_1^2} + \sqrt{P_1^2 + v_2^2}\right)$$

onde:

I = inclinação (em decimais);

$a = \frac{L}{2}$, sendo que L = largura da casa acrescida do beiral.

ℓ = largura da guia;

$$P_1 = \frac{2a + 5\ell}{6}$$

$\alpha = \arctg(I)$;

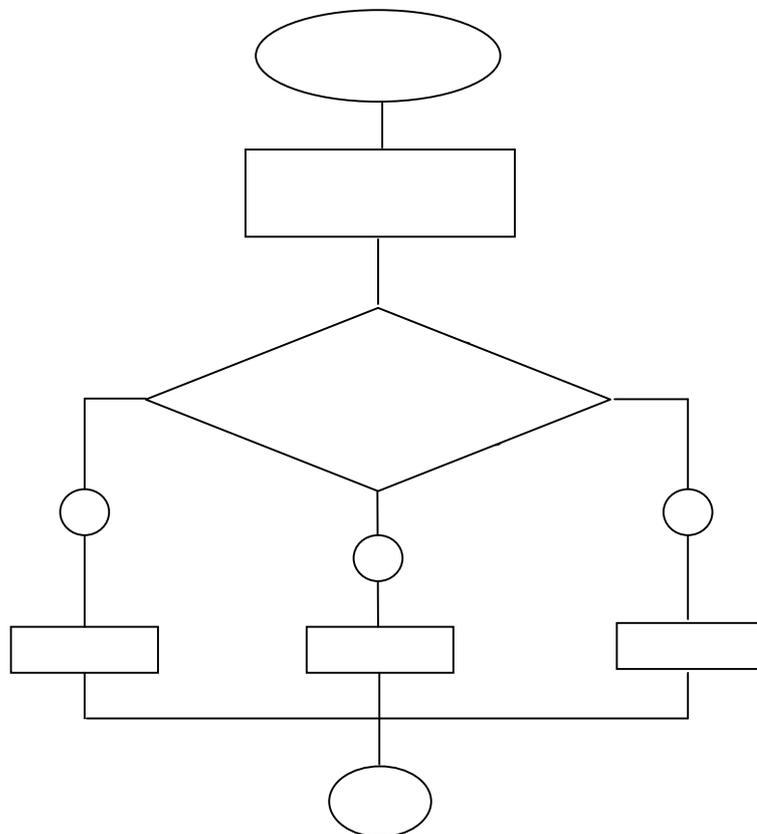
$$v_1 = P_1 \cdot \text{tg}(\alpha)$$

$$v_2 = \text{tg}(\alpha) \cdot \frac{2(a + \ell)}{3}$$

Multiplicando-se a metragem encontrada pelo preço do metro de guia (R), obteremos o Custo da Madeira de uma tesoura (C).

$$\boxed{C = M \cdot R} \quad (11)$$

Para facilitar na simulação do modelo matemático, a partir de dados numéricos, permitindo comparativos entre alguns tipos de telhas empregados nas construções residenciais, e suas respectivas variações de inclinação, utilizamos o aplicativo MATLAB, e para isso, criamos um organograma que apresentamos a seguir:



Largura da Casa	6m		8m		10m	
Tipo de Telha	Metragem	Custo	Metragem	Custo	Metragem	Custo
Colonial	21,47	69,36	28,40	91,73	35,32	114,10
Francesa	22,87	73,86	30,24	97,67	37,61	121,49
Cimento Amianto	19,59	63,27	25,91	83,69	32,23	104,11

Tabela 1 – Comparativo dos valores quanto ao tipo de telha

O gráfico abaixo, nos fornece uma visão de que o tipo de telha e a conseqüente inclinação do telhado têm influência no custo de fabricação de uma tesoura, e que as telhas de cimento-amianto apresentam vantagem econômica, pois necessitam de menor inclinação.

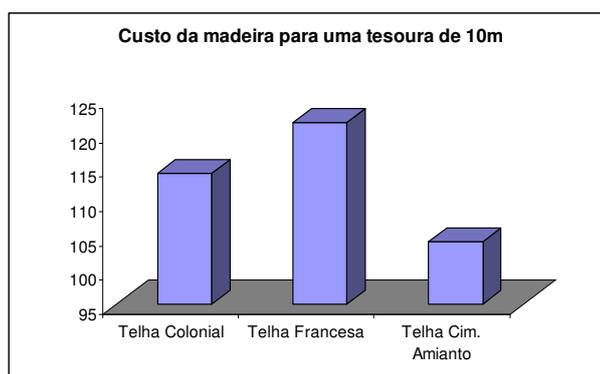


Gráfico 1 – comparativo dos valores quanto ao tipo de telha.

Simulamos, ainda, o comportamento do custo em relação às inclinações dos telhados, e, conforme gráfico abaixo, vimos que essa variação é praticamente linear.

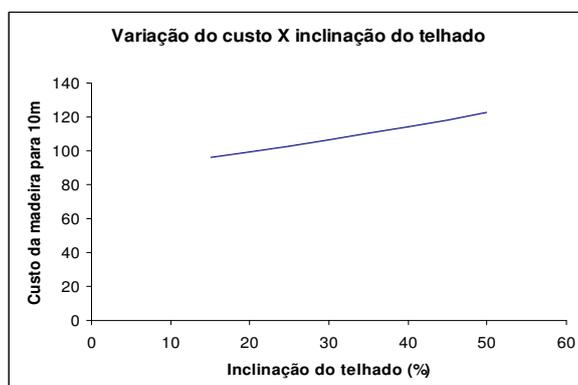


Gráfico 2 – custo de uma tesoura variação quanto à inclinação do telhado.

4 – Conclusão

Os modelos matemáticos foram utilizados de tal forma que, com exceção das diagonais da tesoura (d_1 e d_2), as partes possam ser calculadas com os dados iniciais referente ao comprimento da tesoura (a), a inclinação desejada (I) e a largura das guias (ℓ). Já no programa que fizemos utilizando o MATLAB, usamos uma seqüência, onde cada fórmula utiliza resultados da anterior, para simplificar a digitação.

Para que os cálculos com utilização dos modelos resultassem em uma aproximação confiável, consideramos nas medições sempre o lado extremo da peça a ser calculada,

considerando, inclusive, que as peças poderão ficar sobrepostas ao serem pregadas umas às outras, como podemos ver na figura 6.

Pelos resultados obtidos, podemos observar que a inclinação do telhado implica na quantidade de madeira a ser utilizada para a construção das tesouras, bem como respectivo custo. Cada tipo de telha a ser escolhido, em função de sua característica, tem uma recomendação específica no que diz respeito à declividade da estrutura.

Esses procedimentos de investigação da modelagem matemática podem, também, servir como uma possibilidade metodológica para o ensino de matemática, pois levam em conta os interesses e necessidades práticas da comunidade, e pode ser um caminho para despertar nos alunos o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhecem, além de aprenderem a arte de modelar, matematicamente, porém é necessário ter o cuidado para que isso não seja apenas uma atividade que procure firmar conceitos matemáticos. Esse método conduz, também, a um trabalho de natureza interdisciplinar, o qual requer diálogo constante com outras áreas do conhecimento.

Esse trabalho foi de grande proveito para nós, pois nos deu uma idéia de como podemos explorar a aplicabilidade da matemática nas situações do dia-a-dia. Foi fascinante ver como, através de um tema comum como a construção civil, e ainda mais, utilizando apenas uma pequena parte da casa, que é a tesoura do telhado, podemos utilizar vários conhecimentos matemáticos, como regra de três, teorema de Pitágoras, radiciação, trigonometria, geometria, e outros mais. Por outro lado, tivemos a oportunidade de explorar um pouco mais os recursos tecnológicos que temos, como por exemplo, os softwares Matlab e Excel.

Entendemos que existe um campo muito amplo para ser explorado em relação a esse assunto. Seria importante podermos dar continuidade neste trabalho em outros momentos, onde poderíamos desenvolver outros modelos matemáticos que fossem úteis nas demais etapas da construção civil. Outros pesquisadores poderão, também, se aprofundar mais, descobrindo novos modelos mais precisos para apuração dos valores.

5 – Referências Bibliográficas

BARBOSA, Jonêi Cerqueira. **O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?** Zetetiké – CEMPEM – FE/UNICAMP. v.7, n. 11. Jan/Jun, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática e Implicação no Ensino e Aprendizagem de Matemática.** Blumenau: FURB, 1999.134p.

MOLITERNO, Antonio. **Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira.** São Paulo: Edgard Blücher, 2 ed., 1999. 461p.