CLASSIFICAÇÃO E ANÁLISE DE ERROS EM ÁLGEBRA

Helena Noronha Cury*
Beatriz Konzen**

Resumo: A análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática vem enfocando conteúdos específicos, em vários níveis do ensino de Matemática. Investigações já realizadas com calouros de Cálculo Diferencial e Integral mostraram que a maior parte dos erros dos alunos, na resolução de questões de Cálculo, é decorrente de problemas com conteúdos da Educação Básica, especialmente de Álgebra, tais como simplificação, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações polinomiais. Dessa forma, para entender a origem de erros em Álgebra, realizamos uma investigação com alunos 8ª série de ensino fundamental, para os quais foi aplicado um teste com questões que envolvem porcentagem, valor numérico e operações com expressões algébricas. Os resultados são apresentados nesta comunicação.

Palavras-chave: Análise de erros – Álgebra – Ensino Fundamental

Introdução

A análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática vem se desenvolvendo desde o início do século XX, sob variadas formas. Inicialmente envolvendo alunos e professores de séries iniciais e conteúdos matemáticos básicos, aos poucos foi sendo incorporada a outros níveis de ensino e enfocando tópicos variados. (CURY, 1995).

Nos últimos anos, temos desenvolvido várias investigações sobre erros em Cálculo Diferencial e Integral, com alunos da área de Ciências Exatas (CURY, 2003a; 2003b; 2004a; 2004b), inclusive com apoio de bolsistas de Iniciação Científica. (CASSOL e CURY, 2003; CURY e MÜLLER, 2004) e os resultados desses trabalhos mostram que a maior parte dos erros cometidos por alunos de Cálculo não se relacionam, especificamente, aos tópicos específicos da disciplina, como limites, derivadas e integrais. Efetivamente, a maioria dos problemas é decorrente da falta de pré-requisitos, especialmente quanto aos assuntos relacionados à Álgebra do ensino fundamental e médio, como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificação de expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações polinomiais. Assim, resolvemos aproveitar a metodologia implementada neste tipo de pesquisa (CURY, 2003a) e enfocar erros em Álgebra, novamente

* PUCRS. E-mail: curyhn@pucrs.br
** PUCRS. E-mail: mmfrantz@brturbo.com.br

desenvolvendo um projeto de pesquisa com a bolsista FAPERGS que é co-autora desta comunicação.

Fundamentação Teórica

Um dos problemas detectados nas investigações sobre erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral foi o não reconhecimento de padrões em uma expressão algébrica, de forma que fosse possível fatorá-la. Por exemplo, no cálculo de $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$, espera-se que os alunos fatorem as expressões do numerador e do denominador, para encontrar o fator comum (x-2). No entanto, muitos estudantes não "vêem" o padrão subjacente na expressão do numerador, ou seja, não reconhecem um polinômio de terceiro grau nem tentam encontrar suas raízes. Hoch e Dreyfus (2004) tecem considerações sobre tais dificuldades, apresentando, por exemplo, as expressões $30x^2 - 28x + 6$ e $(5x-3)(6x-2)$, que são registros diferentes de expressões equivalentes. Os autores consideram que, se um aluno não "vê" a possibilidade de utilizar uma ou outra expressão, de acordo com a necessidade do problema, ele não tem "percepção da estrutura"[1].

Linchevski e Livneh (1999) também empregam estes termos, apontando dificuldades de alunos com a ordem das operações. Por exemplo, em pesquisas realizadas em Israel e no Canadá, os autores mostram que uma equação como 6+9x=60 pode ser resolvida por alguns estudantes como 15x=60, para obter, então, x=4. Os autores consideram ser necessário que os alunos desenvolvam uma percepção da estrutura, que lhes permitam ser capazes de manipular tais expressões com flexibilidade. Hoch e Dreyfus (2004) consideram que "percepção da estrutura" pode ser descrita como:

> [...] uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade, reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada, dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer qual manipulação é possível e [...] qual é útil para realizar. (p. 51).

Um erro bastante comum em Cálculo consiste em não reconhecer a necessidade de usar parênteses ao aplicar a regra da derivada de um quociente. Por exemplo, ao solicitar a

[1] No original, *structure sense*.

derivada de $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{x-3}$, muitos alunos aplicam corretamente a regra, mas muitos, também, expressam o resultado como $f'(x)=\dfrac{2-2x.x-3\ -\ 2x-x^2}{(x-3)^2}$. Dessa forma, tendo "perdido" os parênteses, o resultado final fica prejudicado, pois os alunos efetuam, apenas, o produto 2x.x. (CURY, 2004b). Sobre essa dificuldade, a pesquisa de Hoch e Dreyfus (2004) mostra um resultado interessante: sendo proposto a alunos de 11º ano[2] a resolução da equação $1-\dfrac{1}{n+2}-(1-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{1}{110}$, os investigadores constataram que a maioria dos estudantes, ao invés de notar que havia uma mesma estrutura dentro e fora dos parênteses, o que ocasionaria uma resposta do tipo "não há solução", tentaram resolvê-la multiplicando por um denominador comum e cancelando termos. Assim, ficou evidente que não houve percepção da estrutura.

Outro autor que tem apontado dificuldades dos alunos em mudanças de representação é Duval (2003), que considera existir um paradoxo de compreensão em Matemática: "como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?" (p. 21). Efetivamente, o conceito de expressão algébrica só é acessível ao aluno por meio de suas representações e a passagem de um tipo para outro de representação é uma dificuldade a mais. O mesmo autor classifica as representações em **tratamentos** e **conversões**. No primeiro caso, as transformações são dentro do mesmo registro, como, por exemplo, resolver uma equação, como a do exemplo acima. No segundo caso, as transformações consistem em mudar de registro, como passar da lei de uma função (escrita algébrica) para a sua representação gráfica.

Na Álgebra, há um nível de abstração que provoca, tanto na Educação Básica quanto na Superior, um momento de ruptura com conceitos e procedimentos já internalizados pelos alunos. Os professores do ensino fundamental muitas vezes buscam recursos baseados na linguagem usual, para introduzir conteúdos de Álgebra; assim, surgem os "quadradinhos" que funcionam como "marcadores de lugar", esperando apenas a resposta do cálculo mental para "cederem seu lugar" ao número que vai ser obtido. (CURY et al., 2002, p. 12). No ensino superior, encontramos alunos que já formaram concepções sobre a Álgebra, já introjetaram esquemas ou "macetes" que lhes impedem de pensar sobre o que estão fazendo; uma das

[2] Ensino médio, em nosso sistema escolar.

“regras” mais recitadas diz que “ao trocar de lado, muda-se o sinal”. Ora, sem entender o porquê da regra, o aluno, muitas vezes, não sabe a que se refere o “mudar de sinal”, cometendo erros que nos parecem absurdos e que comprometem todo o aprendizado de conteúdos de Cálculo, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, etc.

Professores de Matemática de todos os níveis de ensino têm se preocupado com esses problemas, enfocando-os sob vários ângulos. Podemos citar o trabalho de Ribeiro (2001), que investigou, em sua dissertação de mestrado, as estratégias que alunos de 8ª série utilizam para resolver questões de Álgebra Elementar como as que aparecem no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP/97). Por exemplo, na questão “O número natural 3 é solução da equação: a) 2x - 8 = 1; b) $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$; c) 5(x - 1) = 2(x + 2); d) $\frac{x-1}{3} = \frac{2}{5}$ ”, o autor apresentou uma análise dos erros e uma descrição das estratégias. Apenas 40% dos alunos pesquisados acertaram a questão, sendo que, no SARESP, este índice foi menor ainda, em torno de 33%. Dois tipos de estratégia foram identificados: a substituição de x por 3 e a resolução de cada equação. No entanto, ainda que iniciando corretamente, muitos alunos erraram porque não souberam resolver equações fracionárias.

Pelos trabalhos acima apresentados, vemos que há uma série de problemas relacionados aos erros em Álgebra, enfocados sob diversos ângulos e com base em teorias distintas. É importante, ao localizar os maiores erros, encontrar maneiras de auxiliar os alunos a superá-los, discutindo com os professores da Educação Básica algumas formas de minimizar os problemas. Para o ensino fundamental, há propostas que envolvem estratégias variadas, como uso de jogos, de modelagem matemática ou entrelaçamento de atividades em Geometria e Álgebra.

A Metodologia Empregada, o Problema, as Questões de Pesquisa e os Objetivos

Face aos resultados obtidos nas pesquisas anteriores, bem como à fundamentação teórica apresentada, delineou-se o problema a ser investigado: quais são os erros mais freqüentes, cometidos por alunos de Educação Básica e Superior, na resolução de questões que envolvem tópicos de Álgebra? Para encaminhar a pesquisa, estabelecemos os seguintes questionamentos:

a) quais são as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos da Educação Básica e Superior na resolução de questões de Álgebra?

b) que habilidades é necessário desenvolver, para a resolução correta de exercícios que envolvem tópicos de Álgebra?

c) que estratégias de ensino podem auxiliar os alunos a superarem suas dificuldades em Álgebra?

Para buscar respostas às questões acima apresentadas, a investigação está sendo desenvolvida com os seguintes objetivos:

a) fazer um levantamento da bibliografia existente sobre o tema "erros em Álgebra", em artigos, dissertações e teses da área de Educação Matemática;
b) elaborar instrumentos de pesquisa, a serem aplicados a alunos de Educação Básica e superior, para detectar os erros mais freqüentes;
c) analisar e classificar os erros elencados;
d) elaborar estratégias de ensino para auxiliar os alunos em suas dificuldades.

A pesquisa é predominantemente qualitativa e, inicialmente, está sendo feito um levantamento de bibliografia sobre o tema. Também iniciamos a escolha de turmas de ensino fundamental, médio e superior, para coletar dados provenientes dos instrumentos elaborados.

Na análise dos erros cometidos pelos alunos investigados, inicialmente é realizada uma categorização a partir das unidades, agrupando os erros em classes, usando um critério de semelhança. Após, descreve-se cada tipo de erro e faz-se um levantamento de hipóteses sobre suas causas, para permitir a elaboração de estratégias de ensino que venham auxiliar os alunos nas dificuldades. Na parte quantitativa da pesquisa, são apresentados dados estatísticos sobre as respostas dadas.

Os Dados da Pesquisa

Nesta comunicação, vamos apresentar resultados referentes à aplicação de um teste de múltipla escolha a 76 alunos de 8ª série, de quatro turmas do ensino fundamental de uma escola particular de Porto Alegre, com questões relativas a porcentagem, regra de três, teorema de Pitágoras e operações com expressões numéricas e algébricas. O aluno deveria resolver a questão no espaço ao lado das alternativas, para que pudéssemos analisar a solução. O número de alunos que acertaram, erraram ou não responderam a cada uma das questões do teste é apresentado na tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Número de alunos que acertaram, erraram ou não responderam às questões do teste

Questão	Acertaram		Erraram		Não responderam		Total de alunos
	nº	%	nº	%	nº	%	
1	12	16	46	61	18	24	76
2	9	12	48	63	19	25	76
3	68	89	6	8	2	3	76
4	22	29	51	67	3	4	76
5	31	41	42	55	3	4	76
6	52	68	19	25	5	7	76
7	33	43	42	55	1	1	76
8	51	67	16	21	9	12	76

Pelos resultados apresentados, vemos que os alunos tiveram bastante dificuldade em resolver as questões. Para exemplificar o procedimento qualitativo, vamos analisar os erros apresentados na questão 1, cujo enunciado é: *O valor numérico da expressão* $\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$ *é A para x = -1 e B para x =* $\frac{1}{2}$*. O valor de A+B é: a)* $-\frac{1}{4}$ *; b)* $-\frac{3}{4}$ *; c)* $-\frac{1}{2}$*; d)* $-\frac{1}{12}$ *; e)* $-\frac{1}{6}$.

As respostas, apresentadas no espaço correspondente, foram categorizadas conforme as semelhanças entre os tipos de erro encontrados. Obtivemos, assim, as seguintes classes, exemplificadas com algumas ocorrências:

Classe A: o aluno não substitui corretamente o valor de x.

Ex: a) $x=\frac{-1}{1}+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{-2+1}{2}=\frac{-1}{2}$

Classe B: o aluno não sabe efetuar a adição de frações, soma numeradores e denominadores.

Ex: $\frac{3(-1)}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-2}{5}$

Classe C: o aluno soma os numeradores e multiplica os denominadores.

Ex: $\frac{3}{2}.(-1)+\frac{1}{3}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

Classe E: O aluno substitui corretamente o valor de x, mas erra cálculos com frações.

Ex: $A=\dfrac{3.(-1)}{2}+\dfrac{1}{3} \Rightarrow A=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{1}{3} \Rightarrow A=\dfrac{-2}{5}$;

$$B=\frac{3.(\frac{1}{2})}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{\frac{3}{2}}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{2}{6}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{1}{3};$$

$$A+B=\frac{-2}{5}+\frac{1}{3} \Rightarrow A+B=\frac{-1}{6}$$

Classe F: o aluno substitui corretamente, mas erra na soma de A + B.

Ex: $A=\dfrac{3.(-1)}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-9+2}{6}=\dfrac{-7}{6}$; $B=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{9+4}{12} \Rightarrow \dfrac{13}{12}$; $A+B=\dfrac{-7}{6}+\dfrac{13}{12}=\dfrac{-7}{6}$

Classe G: O aluno não substitui x, indica corretamente a soma de $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{3}$, mas depois soma apenas os numeradores, "perdendo" o denominador.

Ex: $\dfrac{9x}{6}+\dfrac{2}{6}=9x+2$

Considerações finais

Em uma análise parcial, apenas da questão 1, já podemos exemplificar as considerações que fazemos a partir dos erros. A questão pretendia avaliar se o estudante sabe substituir valores de uma variável e se efetua corretamente as operações com frações. No entanto, com tais exemplos de erros, consideramos que esses conteúdos não são dominados pelos alunos participantes da pesquisa. Uma das hipóteses que podemos fazer, sobre os erros nessas operações, é que eles tenham decorado regras sem entender seu significado, misturando-as no momento em que o exercício solicita mais de uma operação.

A partir dos erros identificados e das hipóteses feitas, podemos entrevistar os alunos para verificar como ele justifica sua forma de pensar em cada questão e, a partir das respostas, elaborar estratégias de ensino para que o aluno supere suas dificuldades. Por exemplo, podemos trabalhar com material manipulativo, como o Frac-Soma, para que o aluno possa entender o significado de frações equivalentes e das operações com frações.

Na investigação relatada nesta comunicação, ainda pretendemos analisar erros de Matemática em disciplinas de cursos superiores e também propor estratégias de ensino para auxiliar os alunos. Acreditamos que pesquisas sobre análise de erros podem ser implementadas em salas de aula, em qualquer nível de ensino, de forma que o professor possa ser um investigador de sua própria prática, tornando o ensino de Matemática menos pautado por regras e exercícios padronizados e mais adequado às necessidades dos estudantes.

Referências

CASSOL, Mariana; CURY, Helena Noronha. Ensino de cálculo em cursos de serviço. In: ENCONTRO SOBRE INVESTIGAÇÃO NA ESCOLA, 4., 2003, Lajeado. **Anais...** Lajeado: Univates, 2003. p. 122-124.

CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. **Zetetiké**, v.3, n. 4, p. 39-50, nov. 1995.

______. Análise de erros e análise de conteúdo: subsídios para uma proposta metodológica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos, SP. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003a.

______. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: IME, 2003b. CD-ROM.

______. Análise de erros em Educação Matemática. **Veritati**, Salvador, v. 3, n. 4, p. 95-107, 2004a.

______. Professora, eu só errei um sinal: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, Helena Noronha. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre, 2004b. p. 111-138.

CURY, H.N. et al. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista-RS**, v.4, n.4, p. 9-15, 2002.

CURY, Helena Noronha; MÜLLER, Thaísa Jacintho. Análise de erros em uma visão interdisciplinar. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 27., 2004, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: SBMAC, 2004. p. 196-196.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em matemática**: registros de representação. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

HOCH, M.; DREYFUS, T. Structure sense in high school álgebra: the effect of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. CD-ROM.

LINCHEVSKI, L.; LIVNEH, D. Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. **Educational Studies in Mathematics**, v.40, n.2, p. 173-196, Nov. 1999.

RIBEIRO, A.J. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.