INTERDISCIPLINARIDADE:

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS ASSOCIADAS À IONIZAÇÃO DE ÁCIDOS

Caren Saccol Berleze(1)

Eleni Bisognin(2)

RESUMO

Nos últimos anos, numerosos relatórios têm enfatizado uma abordagem interdisciplinar dos conteúdos nos cursos de matemática de nível básico. Nesse sentido, fazer conexões significativas entre matemática e outras disciplinas pode fornecer uma visão mais ampla e adequada da realidade que tantas vezes aparece fragmentada pelos meios de que se dispõe. Neste trabalho considera-se uma aplicação de equações quadráticas para resolver um problema comum na química. Será mostrado como o uso de equações quadráticas simples pode ser aplicado para estimar o quanto de um ácido fraco se ioniza, bem como será ressaltada a dependência da solução em relação aos coeficientes da equação. Será discutido um caso específico de equação quadrática completa e incompleta que mostra relações sobre a proximidade de suas raízes.

PALAVRAS-CHAVE: interdisciplinaridade, equações quadráticas, constante de ionização.

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que os currículos do Ensino Básico sejam organizados em áreas de conhecimentos estruturados pelos princípios pedagógicos da interdisciplinaridade, da contextualização, da diversidade e da autonomia. Nesse contexto, a interdisciplinaridade aparece como eixo articulador desvinculando o saber escolar da linearidade e da hierarquia, permitindo o rompimento das fronteiras entre as disciplinas. Segundo Lück (1994), a interdisciplinaridade pressupõe mais do que a interação entre duas ou mais disciplinas; ela é fruto de um trabalho de equipe que dialoga e contribui com informações acerca dos diferentes conteúdos dessas disciplinas.

(1)Aluna do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática – UNIFRA carenberleze@gmail.com
(2) Professora do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática – UNIFRA eleni@unifra.br

Embora os PCNs reforcem a idéia de que o ensino e a aprendizagem não podem ser um conjunto de compartimentos estanques e desconectados, essa orientação ainda não alcançou a sala de aula ou o contexto escolar, de modo geral. Talvez a matemática seja uma das disciplinas que mais se encontre isolada.

De acordo com Loureiro (2001), pelos aspectos específicos relativos ao raciocínio e à resolução de problemas, a Matemática constitui uma área de saber plena de potencialidades para realização de atividades interdisciplinares. Entende-se que a importância de abordar questões dessa natureza está no pensar um ensino científico ativo, construtivo, contextualizado, integrado e com significado, pois questões interdisciplinares permitem a construção de um conhecimento sem fronteiras e provoca uma atitude de busca, de envolvimento e de reciprocidade diante do conhecimento. Segundo (Berlin e White, 2001), essas atividades interdisciplinares devem ser baseadas na investigação, em como os alunos aprendem a Matemática e as demais ciências; devem referir-se a fenômenos interessantes e decorrentes de situações do mundo real. Elas devem propiciar oportunidades para desenvolver a capacidade de raciocínio, capacidade de investigação, capacidade de resolução de problemas, de tomada de decisões e de comunicação dos resultados.

Tendo em vista esses pressupostos, nosso propósito nesse trabalho é apresentar uma proposta de atividade interdisciplinar para alunos do ensino básico, envolvendo os conhecimentos matemáticos relativos à equação do segundo grau e à ionização de ácidos, em química, integração essa que será desenvolvida através da perspectiva dos métodos e estratégias comuns de ensino de química e de matemática.

Relação com a química

Ácidos e suas propriedades são normalmente estudados nos cursos de química. Pela definição, um ácido é uma substância que, na presença da água, doa um próton. Por exemplo: em solução aquosa, o ácido clorídrico (HCl) se dissocia (se quebra) completamente, ou ioniza, formando íons positivos H^+ e íons negativos Cl^-.

Assim, numa solução de ácido clorídrico não existem moléculas completas de HCl; elas estão todas ionizadas. HCl é um exemplo de ácido forte. A concentração final de íons de hidrogênio é igual à concentração inicial de HCl, porque um íon de hidrogênio é criado para cada molécula que se ioniza.

Poucos ácidos são ácidos fortes. A maioria são fracos. Por exemplo, os ácidos fosfórico (H_3PO_4) e acético ($HC_2H_3O_2$), são ácidos fracos. Numa solução de ácido fraco, a maioria das moléculas não se dissocia (mas algumas, sim). A solução química incluirá moléculas de ácido completas, assim como íons positivos e negativos. Uma pergunta básica em química é: Quanto de um ácido fraco se ioniza numa solução?

Um dos objetivos deste trabalho é discutir a equação usada para determinar quanto de um ácido fraco se ioniza, e detalhar o comportamento gráfico quando os coeficientes da equação são alterados.

A força de um ácido é dada pelo nível de PH, que é completamente determinado pela concentração de íons de hidrogênio presentes na solução. Os químicos denotam os ácidos pelo símbolo HA. Este ácido se dissocia em íons positivos H^+ e negativos A^-. Assim, o estado de equilíbrio de uma solução de ácido fraco contém moléculas HA, íons H^+ e íons A^- e é denotado por uma equação química $HA \leftrightarrow H^+ + A^-$. Esta equação indica que a concentração de todas as três substâncias permanece constante. Isso não significa que a reação esteja parada; ao mesmo tempo em que moléculas HA se ionizam, íons positivos H^+ e negativos A^- estão formando moléculas de ácido HA.

Os químicos indicam a quantidade de uma substância química presente numa solução em moles por litro (um mole tem $6{,}02.10^{23}$ partículas).

Por exemplo, $[H^+]$ denota a concentração de íons de hidrogênio na solução. Uma vez que uma solução de ácido está em equilíbrio, a proporção $\frac{[H^+].[A^-]}{[HA]}$ é uma constante que depende do ácido particular.

Para cada tipo de ácido, esta constante, conhecida como K_a (constante de ionização), é diferente e pode ser determinada experimentalmente.

Assim, para um ácido numa solução em equilíbrio, as concentrações são relatadas pela equação $K_a = \frac{[H^+].[A^-]}{[HA]}$. (1)

Dada a concentração inicial de um ácido fraco $[HA]=C_o$ e o valor de K_a, pode-se determinar a concentração final de HA, H^+ e A^- .

Para encontrar a equação, representa-se por x a quantidade de HA que se ioniza. A concentração final de HA é dada por C_o-x. Para cada molécula de HA que se ioniza são produzidos um íon positivo e um íon negativo. Assim, $[H^+]=[A^-]=x$.

Substituindo na equação (1), tem-se $k_a = \frac{x.x}{c_o - x}$ (2)

que pode ser escrita na forma $x^2 + k_a x - k_a C_o = 0$ (3)

Para muitos ácidos fracos, a quantidade que se ioniza é muito pequena comparada com a concentração inicial. Dessa forma, $C_o - x$ pode ser aproximado para C_o. Assim, equação (2) pode ser escrita na forma $k_a = \frac{x^2}{c_o}$ ou como $x^2 - k_a C_o = 0$ (4)

Se k_a e C_0 são números positivos, então ambas as equações sempre têm solução real e serão consideradas apenas as soluções positivas.

De um modo geral, resolver a equação (4) é bem mais simples do que resolver a equação (3). Pode-se mostrar, através de desigualdades simples conforme (BRILLESLYPER, 2004), que a diferença entre as soluções positivas das duas equações é sempre inferior a 5%. Obter uma resposta com erro inferior a 5% em relação à solução da equação completa é uma aproximação bastante razoável.

Qual é a diferença entre as raízes positivas x_2 da equação (4) e x_1 da equação (3)?

De acordos com essas equações, $x_2 = \sqrt{k_a C_o}$ e $x_1 = \frac{-k_a}{2} + \sqrt{\frac{k_a{}^2 + 4k_a C_o}{4}}$. Portanto, a diferença x_2- x_1 fica:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{k_a C_o} - \left(\frac{-k_a}{2} + \sqrt{\frac{k_a^{\;2}}{4} + k_a.C_o} \right) = \sqrt{k_a C_o} + \frac{k_a}{2} - \sqrt{\frac{k_a^{\;2}}{4} + k_a C_o} \leq \sqrt{k_a C_o} + \frac{k_a}{2} - \sqrt{k_a C_o} = \frac{k_a}{2} \quad (5)$$

mostrando que a diferença x_2- x_1 independe da concentração inicial C_0.

Como um exemplo, considera-se o caso de tomar uma solução de ácido cloroso $HClO_2$, para o qual K_a=0,012, e uma concentração inicial C_o=2moles/litro.

Usando a equação simplificada (4), a concentração final de íons de hidrogênio é x_2= $\sqrt{k_a C_o} = \sqrt{0{,}012.2} = \sqrt{0{,}024} = 0{,}155$

Calculando através da equação (3), tem-se que a raiz x_1 da equação $x^2 + 0{,}012x - 0{,}024 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0{,}149$ e a diferença percentual é:

$\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{0{,}155 - 0{,}149}{0{,}149} = \frac{0{,}006}{0{,}149} = 0{,}04026 \cong 4\%$ Portanto, o resultado está dentro do esperado. Observe ainda que x_2- x_1=0,006$\leq \frac{0{,}012}{2}$.

Por isso, dada a maior facilidade na resolução da equação incompleta e uma diferença insignificante quando comparada à solução da equação completa, muitos livros didáticos de química aconselham resolver o problema através da equação (4), uma vez que, em sala de aula, a exatidão dos resultados não é tão relevante.

A aplicação da equação do 2º grau à química serve de motivação para um estudo matemático mais detalhado, como é feito, por exemplo, em BRILLESLYPER (2004).

Considere as equações $x^2 + bx - 1 = 0$ (6) e $x^2 - 1 = 0$ (7).

Pode-se fazer as seguintes perguntas:

- Essas equações sempre admitem uma raiz positiva?
- Em que intervalo encontra-se a raiz positiva?

O discriminante da equação (6) é b^2+1 e, portanto, a equação sempre tem duas soluções reais e como $\sqrt{b^2+4} > b$ para todo b real. Isso garante que a equação sempre apresenta uma única raiz positiva.

Considere a função $f_b(x) = x^2 + bx - 1$. Pergunta-se: Qual é o comportamento dessa função?

Observe que as raízes x_1 e x_2 da equação x^2+bx-1=0 são $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}$ e

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2+4}}{2}.$$

Tem-se que a raiz positiva de $f_b(x)$ está sempre entre 0 e 1 e quanto menor o valor de b, mais próximo de 1 se encontra essa raiz.

Seja $h(b) = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}$, isto é, h(b) é a raiz positiva de $f_b(x)$. Qual é o comportamento da função h quando b varia?

A Tabela 1, a seguir, mostra os valores de h(b) para diferentes valores de b.

TABELA 1: Valores da raiz positiva de $f_b(x)$

Valor de b	Valores de h(b)
0	1
0,5	0,7807
1	0,6180
2	0,4142
10	0,0990
100	0,01

Nota-se que h(b) é uma função decrescente de b, pois, à medida que b aumenta, h(b) diminui.

A Figura 1 mostra o gráfico da função h(b).

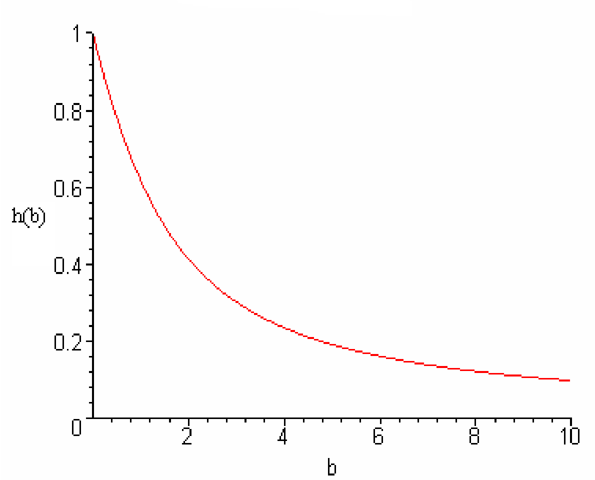

Figura 1: Gráfico da função h

Observe que os valores de h(b) se aproximam de zero à medida que b cresce.

Analisando o resultado obtido em (5), correspondente à diferença entre as raízes das equações (3) e (4), é possível estabelecer uma relação entre as raízes positivas x_1=1 da equação (7) e a raiz x_2=h(b) da equação (6).

A Tabela 2 abaixo mostra que à medida que b diminui, a diferença 1-h(b) é menor do que b/2.

TABELA 2: Diferença entre as raízes positivas

b	1-h(b)	b/2
0,5	0,2192	0,25
0,2	0,0950	0,1
0,1	0,0488	0,05
0,05	0,0247	0,025

A Figura 2, a seguir, mostra a relação entre os valores de 1-h(b) e b/2, quando b varia.

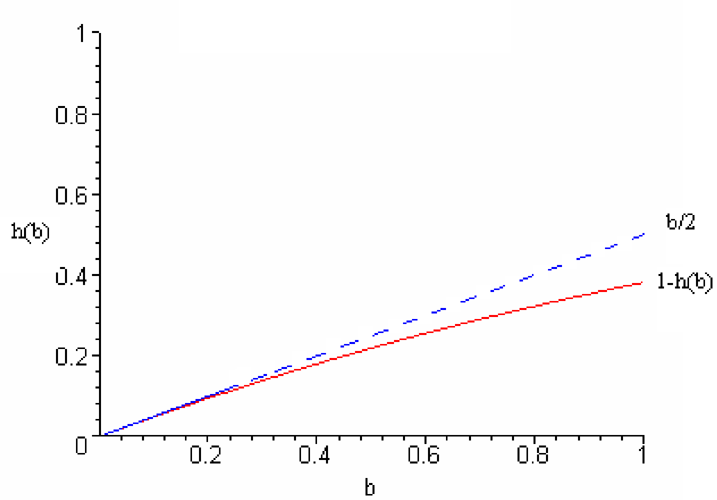

Figura 2: Gráficos das funções 1-h(b) e b/2

Analisando o gráfico na Figura 2, observa-se que a diferença entre as raízes positivas 1 e h(b) é menor do que b/2 e essa diferença aumenta à media que o coeficiente b se aproxima de 1.

CONCLUSÃO

Estudantes em nível mais avançado normalmente têm experiência em resolver equações quadráticas; entretanto, raramente é trabalhada em sala de aula a dependência das soluções em relação aos valores dos coeficientes da equação. Esta aplicação demonstra como a fórmula quadrática e algumas desigualdades básicas se associam para explicar um fenômeno comum na química. Além do mais, ela mostra que uma análise matemática pura pode ser de grande utilidade em outras áreas e que a interdisciplinaridade é possível de ser realizada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRILLESLYPER, Michael. Using Simple Quadratic Equations to Estimate Equilibrium Concentrations of an Acid. **Mathematics Teacher**, Reston, USA, v. 97, n. 3, p. 176-179, March 2004.

BERLIN, Donna; WHITE, Arthur . Conexões entre as Ciências e a Matemática Escolares. **Educação e Matemática**, Lisboa, Portugal, n. 64, set/out 2001.

LOUREIRO, Cristina. Ciência na Escola – Uma questão de Atitude(s). **Educação Matemática**, Lisboa. Portugal, n. 64, set/out 2001.