O PENSAMENTO INFINITESIMAL DE ALUNOS DE CÁLCULO

Raquel Milani[1]

Resumo

O artigo tem como objetivo discutir sobre uma possibilidade de trabalho nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. A idéia é legitimar as concepções infinitesimais dos alunos, como a tradicional que afirma que 0,999 ... é menor que 1, pois existe, de fato, uma diferença entre os dois números. Considerando dx e dy quantidades infinitesimais, os conceitos de Cálculo são desenvolvidos de forma diferente da tradicional. Um amálgama conceitual formado por alunos de um curso de graduação é apresentado para reforçar a idéia do trabalho com os infinitésimos.

Palavras-chave: Infinitésimos, Concepções Espontâneas, Cálculo Diferencial e Integral

Introdução

As idéias que aqui serão discutidas partem da dissertação de mestrado que desenvolvi no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP/ Rio Claro. O motivo de fazer um mestrado nesta área surgiu, principalmente, da experiência de ser monitora de Cálculo na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Ali tive o primeiro desafio de praticar a Educação Matemática. Discutir sobre Cálculo com os colegas fez com que eu refletisse mais seriamente a respeito de questões como: o que significa $\frac{dy}{dx}$? É apenas um símbolo? Tem sentido analisar separadamente dy e dx? Qual a semelhança com Δy e Δx? O que significa o dx que aparece no símbolo de integral? Essas questões me levaram ao Cálculo Infinitesimal, aos infinitésimos.

Trabalhar com as quantidades infinitesimais não é uma prática recente. Leibniz, no final do século 17, definia dy, geralmente, chamado de diferencial de y, como $dy = f(x + dx) - f(x)$, onde dy e dx eram acréscimos infinitesimais às variáveis y e x. Com a formalização do conceito de limite, no século 19, os infinitésimos foram banidos da Matemática. Mas será que desapareceram também do pensamento dos alunos?

[1] Universidade de Caxias do Sul/Faculdade Fátima - raqmilani@yahoo.com.br

O estudo

A pesquisa que desenvolvi tratou-se de um experimento de ensino realizado em alguns encontros com um grupo de alunos da disciplina de Cálculo do curso de graduação em Física, da UNESP de Rio Claro, cuja abordagem era a tradicional, baseada no conceito de limite. O trabalho desenvolvido foi um estudo a respeito de alguns conceitos de Cálculo, tratados segundo a abordagem infinitesimal. O grupo era formado por quatro alunos. Foram desenvolvidos seis Encontros de Cálculo Infinitesimal (ECI). Nos quatro primeiros, trabalhei com os alunos conceitos como a derivada de funções polinomiais e da função seno, regras de derivação, integral definida e segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo. Em seguida, ocorreu um encontro de preparação, onde os alunos deveriam organizar uma apresentação para seus colegas e professora responsável pela disciplina. O último encontro foi a própria apresentação do grupo. Esse momento foi essencial para que eu pudesse refletir sobre a pergunta-diretriz da pesquisa: *Como alunos de Cálculo I do curso de Física, da UNESP de Rio Claro, lidam com as concepções infinitesimais, no trabalho com tópicos dessa disciplina, estudados segundo a abordagem infinitesimal?* No último encontro, o grupo de alunos apresentou suas crenças e opiniões a respeito do que havíamos estudado durante os quatro primeiros ECI.

O trabalho com o grupo começou com minha solicitação para que falassem sobre suas idéias a respeito de infinitésimos e também sobre a seguinte questão: 0,999 é menor ou igual a 1? As respostas foram na seguinte direção: *0,99...<1. Por menor que seja a diferença entre esses dois números, ela existe. Infinitésimos são pontos infinitamente pequenos, que podem ser desprezíveis*. Essas concepções infinitesimais (MILANI, 2002) dos alunos foram legitimadas. Disse a eles que podiam pensar desse jeito. Era possível desenvolver um curso de Cálculo com base nessas idéias. Essa legitimação foi importante, se não fundamental, para a credibilidade do trabalho. A partir dessas concepções, o estudo de conceitos de Cálculo via abordagem infinitesimal foi desenvolvido. Disse que a diferença que eles determinaram entre 1 e 0,999... era um infinitésimo, um número muito próximo de zero, menor que qualquer real positivo[2].

[2] Nesse momento, nem em qualquer outro dos ECI, os alunos não falaram sobre a possibilidade de –5, por exemplo, ser um infinitésimo, já que era menor que qualquer real positivo. Ao apresentar essa concepção, estava pensando nos infinitésimos positivos. Seria com esses números que trabalharíamos em todos ECI.

A nomenclatura e as atividades

Nos ECI, foi criada uma nomenclatura para ser utilizada nos estudos da abordagem infinitesimal. O quadro abaixo mostra uma comparação entre o trabalho que foi desenvolvido com os alunos nos Encontros, baseado nas quantidades infinitesimais de Leibniz, e o que se encontra, atualmente, na maioria dos livros de Cálculo, baseado nos estudos de Cauchy, e que foi desenvolvido com os alunos nas aulas regulares de Cálculo.

Leibniz	Cauchy
$y = f(x) = x^2$ $dy = f(x+dx) - f(x)$ $dy = (x+dx)^2 - x^2$ $dy = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2 = 2xdx + dx^2$ $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$ quase - derivada $f'(x) = 2x$ derivada $dy = 2xdx + dx^2$ quase - diferencial	$y = f(x) = x^2$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ def. de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$ outra notação da derivada $dy = f'(x)dx$ diferencial

Quadro 1 - comparação entre as abordagens infinitesimal e tradicional

Na abordagem infinitesimal, o cálculo da derivada começou com a determinação de dy, diferença infinitesimal na função decorrente de um acréscimo em x. O segundo passo do processo foi dividir dy pelo infinitésimo dx. O quociente $\frac{dy}{dx}$ é denominado de quase-derivada, pois é a derivada acrescida de uma quantidade infinitesimal. Nesse quociente, podemos notar uma parte real e uma parte infinitesimal. A respeito desta caracterização, os alunos da pesquisa associaram a "estrutura" de $\frac{dy}{dx}$ a de um número complexo, formado de uma parte real e uma imaginária. Dessa forma, a derivada da função, denotada por $f'(x)$, é definida como a parte real de $\frac{dy}{dx}$. No exemplo acima, x é real. Ao ser multiplicado por 2, resulta em um número real. Já dx é infinitesimal. Ao ser elevado ao quadrado, torna-se um infinitesimal de ordem 2. Portanto, $f'(x) = 2x$.

Para ilustrar o que ocorre quando se opera com o conceito de derivada através da idéia intuitiva de limite, muitas vezes, utiliza-se o esquema das retas secantes se aproximando da reta tangente. Para fazer com que as quantidades infinitesimais fossem visualizadas geometricamente, a ferramenta zoom do software Corel Draw foi utilizada. Esse procedimento, bem como todas as fichas de trabalho utilizadas com o grupo de alunos, foram elaborados por Roberto R. Baldino (orientador da pesquisa de mestrado desenvolvida) e Tânia C. B. Cabral, e podem ser encontradas em BALDINO & CABRAL (2000), MILANI (2002), MILANI (2003) ou http://www.gritee.com.

A Formalização dos Infinitésimos

O trabalho realizado com os alunos na pesquisa foi feito no nível intuitivo, como deve ser pensado um curso de Cálculo. A teoria matemática que sustenta e fundamenta o pensamento infinitesimal dos estudantes é chamada de Análise Não-Standard, que formaliza os infinitésimos trabalhados desde os tempos de Leibniz. Essa teoria foi criada por Abraham Robinson, por volta de 1960.

Os infinitésimos são elementos do conjunto dos hiper-reais $(^*\Re)$ que inclui os números reais. Um número hiper-real é definido como uma classe de equivalência de seqüências de números reais, cuja relação é dada por $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathrm{N} / a_n = b_n\} \in U$, onde U é um ultra-filtro. Um infinitésimo é um hiper-real, cujo módulo é menor que qualquer real positivo, por exemplo, $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$.

Essa teoria matemática, que fundamenta as concepções infinitesimais dos alunos, deve ser estudada em outro nível, como numa disciplina de Análise, e não em um curso de Cálculo. Essa linguagem não foi trabalhada com os alunos. Apenas, a título de curiosidade, apresentei algumas idéias sobre o conjunto dos hiper-reais, falando de seus elementos: infinitésimos, mônadas e números infinitos.

As Implicações da Pesquisa na Prática Docente

Os alunos que participaram da pesquisa estiveram em contato com duas abordagens de trabalho sobre o Cálculo: abordagem infinitesimal, durante os ECI, e a do conceito de limite, nas aulas regulares. Era natural que os alunos trouxessem comparações entre os dois contextos. Tal comparação ficou bastante visível no encontro de apresentação, quando os quatro alunos tiveram que falar, aos colegas e professora responsável pela disciplina de Cálculo, sobre o que havíamos estudado nos encontros. Como o assunto seria novo aos colegas, o grupo buscou uma aproximação entre as duas abordagens. Nessa tentativa, eles apresentaram as seguintes idéias: "*Porque o limite quando* x *tende a* a*, você está pegando os infinitésimos próximos de* a", "*O limite é quando você está pegando os infinitésimos mesmo*".

Essas idéias representaram a construção de um novo conhecimento. Trata-se de um amálgama conceitual entre limite e infinitésimos. Por vezes, na apresentação, o conceito de limite era evocado para que os colegas compreendessem a idéia dos infinitésimos. Em outros momentos, o pensamento infinitesimal era utilizado para falar sobre o conceito de limite. Enfim, limite e infinitésimos surgiram juntos para tratar sobre conceitos de Cálculo.

Esse amálgama é aceitável? Do ponto de vista matemático, a separação entre limite e infinitésimos deve ser feita, tanto que existem duas teorias que fundamentam essas idéias: a Análise Real e a Infinitesimal. Estamos tratando, porém, de uma disciplina de Cálculo, cujo objetivo é trabalhar com as concepções espontâneas (CORNU, 1983) dos alunos e com os conceitos de modo a aplicá-los em diversas áreas do conhecimento, sem formalizá-los. Se o objetivo não é a formalização dos conceitos (objetivo de uma disciplina de Análise), o amálgama entre limite e infinitésimos é cabível em uma disciplina de Cálculo. Estamos falando, agora, a partir do ponto de vista da Educação Matemática. Qual professor nunca falou, ou até mesmo pensou, em um pequeno retângulo abaixo de uma curva, ao tratar do conceito de integral definida? Os infinitamente pequenos sempre estiveram presentes no pensamento dos alunos e professores.

Não estou propondo extinguir o conceito de limite dos cursos e substituí-lo pela idéia de infinitésimo. Tendo em vista o objetivo de um curso de Cálculo, a proposta é de um trabalho conjunto entre as duas abordagens: compreender o conceito de limite através da idéia de infinitésimos e vice-versa. Em minha prática, como professora de Cálculo, procuro utilizar o ensinamento dos quatro alunos sobre o amálgama conceitual. Trabalho o conceito de derivada, por exemplo, partindo da idéia de velocidade instantânea, mostrada nas lombadas eletrônicas, que envolve quantidades de espaço e tempo muito pequenas, infinitesimais. Esse é um contexto que faz parte da realidade dos alunos. Em aula, eles opinam como acham que tal velocidade é calculada e passamos a discutir se o número representa, de fato, uma velocidade instantânea. Quando se conclui que o que temos, em verdade, é a velocidade média, surge a questão do que fazer para que esse número represente melhor a velocidade desejada. Nesse momento, aparece tanto a idéia de diminuir os intervalos de espaço e tempo quanto a de tomar tais intervalos muito pequenos. Diminuir os intervalos nos remete à noção dinâmica de limite quando $\Delta S \to 0$ e $\Delta t \to 0$. Tomar intervalos muito pequenos trata das quantidades infinitesimais dS e dt.

Outra situação, em que o amálgama conceitual é colocado em prática, é quando estuda-se os limites trigonométricos fundamentais, como $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. O que está envolvido nesses cálculos é a idéia de um arco muito pequeno (dx), próximo de 0. Com o apoio do zoom do software Corel Draw, a afirmação $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1$ quando $x \approx 0$ torna-se intuitiva, de modo que os alunos visualizam, de fato, o que está envolvido no raciocínio.

Quando estudamos o conceito de integral definida e suas aplicações no cálculo de áreas e volumes, partimos de uma fatia infinitesimal de área, chamada *dA*, ou de volume, chamada *dV*. No caso do cálculo da área abaixo do gráfico de uma função, tomamos um retângulo de base infinitesimal *dx* e altura *f(x)*. Sua área é representada por $dA \approx f(x)dx$. Obtemos a área desejada quando somamos as infinitas fatias de áreas infinitesimais *dA* (BALDINO, CABRAL, 2003).

Considerações Finais

Com esse artigo espero ter contribuído para uma reflexão sobre a prática docente de professores de Cálculo, incluindo a minha, tanto em sala de aula, quanto em nível institucional, ao discutir-se sobre os objetivos do curso, ementas, atividades e outras questões pertinentes, sempre tendo em vista a importância da legitimação do conhecimento prévio e intuitivo dos alunos.

Ouvir as idéias do aluno, saber de suas concepções é um ato essencial do professor em sua prática docente. Conhecendo suas idéias, como professora, tenho condições de saber “onde” o aluno se encontra, para que eu possa me “colocar” junto a ele e orientá-lo para um determinado “lugar”. Foi ao ouvir o aluno que percebi que as concepções espontâneas infinitesimais estavam presentes em seu pensamento. Como educadora, não posso negá-las, mas sim aceitá-las e legitimá-las como conhecimento válido.

Referências bibliográficas

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. *Concepções infinitesimais na mat*emática. Rio Claro: Departamento de Matemática/IGCE/UNESP, 2000. (Relatórios Internos, 56/00)

BALDINO, R. R., CABRAL, T. C. B. *Reserva de vagas e curso noturno na UERGS: um problema para a Educação Matemática*. Educação Matemática em Revista – RS, Osório, n.5, p.36-45, 2003.

CORNU, B. *Aprendissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. 1983. Tese (Doctorate de Toisieme Cycle de Mathèmatiques Pure) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

MILANI, R. *Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Univerisdade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MILANI, R. *Uma Nova Antiga Proposta para o Cálculo Diferencial e Integral*. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8.,2003, Pelotas. *Anais* ... Pelotas: UCPel, 2003.