SIGNIFICANDO TÓPICOS DE ÁLGEBRA COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Pedro Augusto Pereira Borges[1]
Denise Knorst da Silva[2]
Sonia Beatriz Telles Drews[3]

Resumo:
A modelagem matemática é um método de ensino que integra as disciplinas e relaciona os próprios conteúdos de matemática entre si, além de atribuir-lhes significados. Essas características tornam a modelagem atraente, mas por outro lado, sua aceitação na educação básica esbarra nas limitações da formação dos professores e na estrutura da escola formal. Uma alternativa à superação destes entraves passa pelo apoio à atividade de planejamento pedagógico e pelo desenvolvimento de formas alternativas de utilizar a modelagem no ensino, que mantenham a propriedade de conhecer a realidade utilizando o conhecimento matemático. O presente trabalho apresenta e discute alguns tipos de investigações em modelagem e suas relações com o ensino de Álgebra.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática no Ensino; Modelagem e Ciência; Ensino de Álgebra.

1. Introdução

O processo de modelagem matemática de um recorte da realidade, tal como é descrito em Edwards & Hamson (1990), Bassanezzi (2002), Biembengut (1999) dentre outros, quando usado em sala de aula, tem se revelado um método de ensino multidisciplinar e integrador de conteúdos da própria matemática. Essas características tornam a modelagem atraente, como estratégia de ensino que proporciona vínculos da matemática escolar com a realidade, mas por outro lado, esbarra em uma série de entraves tais como: a dificuldade que os professores têm para identificar um problema e transformar sua investigação em uma situação de aprendizagem de Matemática, provavelmente decorrente de uma graduação limitada a uma visão formal e purista da matemática; a estrutura formal seriada da organização dos conteúdos; a visão mecanicista e restrita dos conceitos e suas inter-relações, etc...

Devido a esses entraves e com base em tentativas de usar Modelagem em sala de aula, idéias alternativas de uso da modelagem matemática no ensino, têm sido pensadas, (Barbosa 2001 e Borges, 2003) reduzindo a não-diretividade - característica da proposta original – e transformando-a em uma estratégia de ensino mais previsível (mesmo que não totalmente) e direcionada de acordo com alguma intencionalidade prevista no plano de ensino. Em Barbosa (2003) a modelagem matemática é proposta como um ambiente de aprendizagem

[1] UNIJUÍ - DeFEM, pborges@unijui.tche.br
[2] UNIJUI – DeFEM, denisek@unijui.tche.br
[3] UNIJUI – DeFEM, soniad@unijui.tche.br

no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade, podendo tal ambiente configurar-se através de diferentes zonas de possibilidades sem limites claros que ilustram a materialização da modelagem na sala de aula.

A prática da modelagem na Educação Básica, diante da formalidade do ensino, perpassa por um novo entendimento, podendo ser proposta de diferentes formas, seja construindo modelos completos e inéditos, seja refazendo modelos existentes, seja usando partes de modelos existentes. Nas condições de trabalho dos professores, acredita-se que a utilização de modelos pré-elaborados venha a ser uma alternativa bastante prática.

O presente trabalho tem como objetivo mostrar os tipos de investigação dos problemas em processos de modelagem que levam a aplicações de tópicos de Álgebra. Para isso, uma atividade é apresentada com abordagem experimental, seguida de tratamento de dados, proposição e discussão de modelos. Também são discutidas as características de algumas formas alternativas de utilização da modelagem em sala de aula.

2. Uma abordagem quantitativa: Como determinar a rigidez da mola?

A mola é um componente presente em uma série de objetos usados cotidianamente: colchões, máquinas simples como fechaduras de portas, dobradiças modernas de móveis de cozinha, onde as molas nem ficam a vista, ou máquinas maiores como as agrícolas, as motos, carros, trens e caminhões. O conhecimento do funcionamento da mola e a sua adequada utilização deram conforto à vida do homem. Um bom exemplo é a estabilidade e conforto que a suspensão (amortecedores e molas) dá aos carros modernos. Portanto, estudar molas é conhecer uma parte da realidade tecnológica presente na vida do cidadão contemporâneo. (Borsa, 2004)

2.1. O experimento e a modelagem matemática

A questão que pode desencadear estudos mais detalhados sobre a mola é a escolha e implementação de um critério para determinar sua rigidez. Um experimento com materiais e procedimentos simples, que pode ser executado por alunos do ensino fundamental ou médio, é a medição da deformação da mola quando esta é submetida a uma força, por exemplo, a força peso de uma massa suspensa em uma extremidade, como mostra a Figura 1. A mola pode ser de plástico ou metal, como também podem ser utilizados elásticos ou atilhos de borracha. Para obter os dados da Tabela 1 foram colocadas massas (m) de *0,01 kg* em uma espiral plástica de encadernação, e anotadas as respectivas deformações (y). Colocando estes dados em um gráfico cartesiano obtém-se uma distribuição de pontos quase alinhados. Várias funções poderiam ser propostas para descrever esta distribuição (por exemplo, um polinômio de grau *n-1* , onde *n* é o número de medidas, passaria por todos os pontos !) . No entanto, neste trabalho será adotado o modelo linear, com base na Lei de Hooke:

$$F = k\,y \qquad (1)$$

onde F é a força da mola (N), igual em módulo à força peso que atua sobre a mola,
k é uma constante de proporcionalidade (kg/s^2) e
y é a deformação (m).

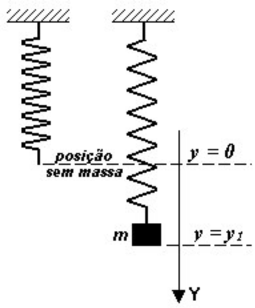

Figura 1 – Esquema do experimento

Para que a Lei de Hooke descreva satisfatoriamente a deformação da mola é necessário fazer algumas hipóteses:

- A mola é perfeitamente elástica. Isto significa que depois de deformada ela volta a posição original, se retirada a força que a deformou;
- A massa da própria mola é considerada nula.
- O sistema massa-mola está sempre estático, portanto não há atrito de deslocamento com o ar.

Tabela 1 - Dados experimentais

i	*y (m)*	*m (kg)*	*F (N)*
1	0	0	0
2	0,052	0,01	0,1
3	0,108	0,02	0,2
4	0,159	0,03	0,3
5	0,209	0,04	0,4
6	0,258	0,05	0,5
7	0,31	0,06	0,6

O valor de k pode ser determinado usando diferentes métodos. Neste trabalho serão analisados três métodos: o valor médio, os mínimos quadrados com b igual a zero e com b diferente de zero.

2.2. Ajuste da função linear com k médio ($F = k_m y$)

Este método consiste em calcular os valores de k_i, partindo diretamente da equação (1) para cada medida *i*. O valor de k_m é a média dos valores k_i, .

$$k_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \qquad (2)$$

2.3. Ajuste da função linear pelo método dos mínimos quadrados (*F=ky+b*)

Este método consiste em encontrar um valor de k que minimize as diferenças entre os dados experimentais e os valores calculados pela equação (1) com o k ajustado, considerando a possibilidade de erros de medida em todas as medias, inclusive na posição de repouso. Nesse caso, a Lei de Hooke deve ser re-escrita na forma

$$F = k\,y + b. \tag{3}$$

Substituindo os valores de y e F da Tabela 1 na equação (3), obtém-se um sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} F_1 = k\ y_1 + b \\ F_2 = k\ y_2 + b \\ (......) \\ F_n = k\ y_n + b \end{cases} \tag{4}$$

Escrevendo (4) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ ... \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \\ ... & ... \\ y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} \tag{5}$$

ou de forma mais compacta

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} \tag{6}$$

onde **F** é o vetor das forças,
A é a matriz dos coeficientes e
x é o vetor das incógnitas.

A solução desse sistema para $n = 2$ pode ser feita multiplicando (6) por $\mathbf{A}^{-1}$ pela esquerda (a matriz inversa existe, pois **A** é quadrada e não-singular, já que $y_1 \neq y_2 \neq ... \neq y_n$). Nesse caso, a solução seria somente:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{F}\ . \tag{7}$$

Para $n > 2$ pode-se usar o Método dos Mínimos Quadrados na forma matricial. Como a matriz **A** não é quadrada, não tem inversa. Porém, multiplicando (6) por $\mathbf{A}^T$, obtém-se

$$\mathbf{A}^T\ \mathbf{F} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\ \mathbf{x} \tag{8}$$

Multiplicando (8) pela inversa de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, obtém-se a solução do problema.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\ \mathbf{F}\ . \tag{9}$$

2.4. Ajuste da função linear sem erro na primeira medida (*F=ky*)

Este método é semelhante ao anterior, porém considera-se que não exista erro experimental na primeira medida (posição de repouso). Nesse caso, a Lei de Hooke tem a forma da equação (1). O vetor **F** é idêntico ao caso anterior e a solução é obtida usando a equação (9), porém com a matriz **A** e o vetor **x** escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = [k] \qquad (10)$$

Os parâmetros ajustados estão apresentados numericamente na Tabela 2 e os resultados das funções aproximadas ($\hat{F}_i$) e os erros quadráticos ($\hat{F}_i - F_i)^2$ estão apresentados graficamente nas Figuras 2 e 3. Apesar da pequena diferença na posição de cada reta como mostra a Figura 2, os coeficientes encontrados são diferentes.

Tabela 2 – Valores dos coeficientes das retas para os diferentes tipos de ajustes

	$F=ky+b$	$F=ky$	$F=k_my$
Coeficiente angular	1,9397	1,9232	1,9082
Coeficiente linear	-0,0037	0	0

Os três métodos produzem resultados bons para responder o problema da rigidez da mola, porém o maior erro quadrático é do ajuste com *k* médio (ver Fig. 3). Os menores erros são aqueles obtidos pelo Método dos Mínimos Quadrados, sendo que o menor de todos é o da equação completa, como era de se esperar, pois tem dois coeficientes (a outra opção tem apenas um) para serem ajustados, e por isto deve ser utilizado para verificar a rigidez da mola.

Os cálculos dos ajustes foram realizados com aplicativos computacionais, exatamente como propõem as equações (7) e (9) (portanto sem usar "pacotes" prontos). Esses procedimentos são bastante simples e programáveis por alunos do ensino médio, devido à semelhança com a linguagem matemática e com a vantagem de poupar o esforço dos cálculos enfadonhos de multiplicação de matrizes.

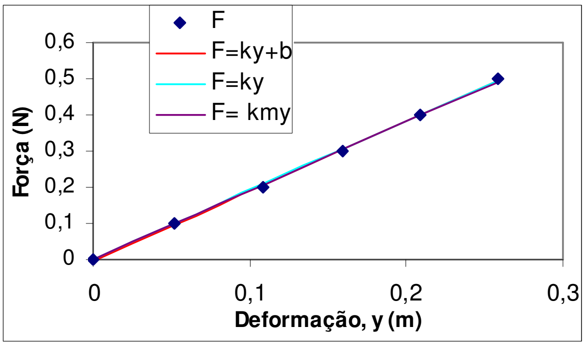

Figura 2 – Resultado do ajuste dos dados experimentais

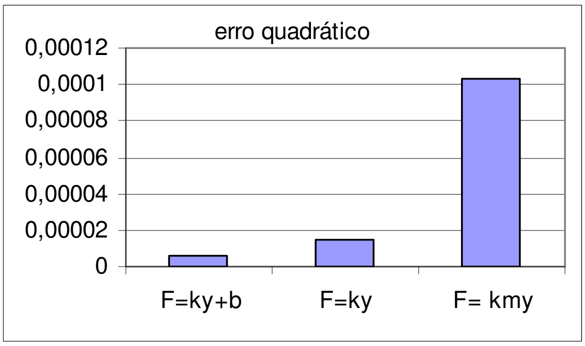

Figura 3 - – Comparação entre os desvios quadráticos dos ajustes

3. Formas alternativas do uso da atividade-Mola no ensino da Matemática

O estudo da mola pode ser feito com diferentes ênfases, de acordo com o que o professor precisa ensinar. A Figura 4 apresenta um esquema com três tipos de abordagens. A área vermelha ilustra as atividades básicas que geram a motivação (problemas reais associados ao uso da mola em máquinas, por exemplo) e os dados (resultados dos experimentos) utilizados para aplicar os conteúdos de Matemática. A modelagem matemática do problema ocorre com a análise física e as simplificações necessárias da abordagem, como foi descrito no item 2.1 deste artigo. A discussão do modelo em si (Lei de Hooke) é uma excelente situação de ensino para funções lineares, com a possibilidade de discutir o significado dos coeficientes angular e linear da equação da reta.

A área azul ilustra a ênfase no tratamento de dados experimentais. As discussões sobre a precisão dos instrumentos de medida estudados e análise do erro inerente às medições é uma boa oportunidade para introduzir o aluno em atividades científicas, ensinar e aplicar os conceitos de média e desvio padrão.

A área verde ilustra a ênfase na definição e precisão do modelo. Trata-se de uma aplicação do conteúdo de ajuste de curvas, normalmente dado em cursos de Cálculo Numérico e Estatística. No item anterior foram descritos os procedimentos do método dos mínimos quadrados em sua versão matricial. Para utiliza-lo no ensino médio é necessário considerar apenas dois pontos experimentais. Com isto, obviamente perde-se em precisão dos resultados, mas ganha-se uma aplicação dos conceitos de matriz transposta, inversão de matrizes, sistemas lineares e determinantes. Se a solução proposta for implementada em computador (o que pode ser uma atividade estimulante e desafiadora) o método pode ser aplicado em toda a sua totalidade.

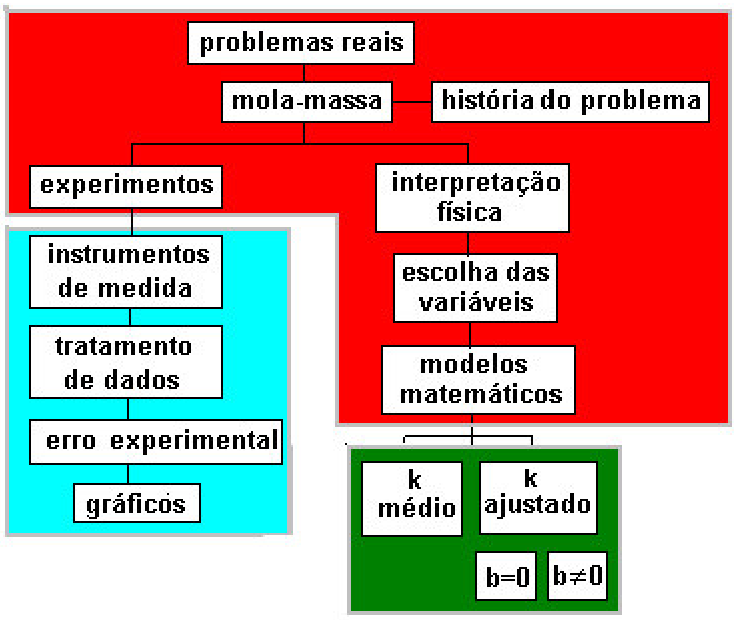

Figura 4 - Diferentes ênfases para o estudo da mola.

4. Considerações Finais

A análise de um problema como o que foi proposto (quantificação da rigidez de uma mola) exige procedimentos e conhecimentos que extrapolam o cotidiano, mas são fundamentais para a formação científica dos alunos, a qual está associado todo o conteúdo de Álgebra escolar. A análise dos dados obtidos nos experimentos, gerou diferentes situações de aprendizagem de vários conteúdos de Física e Matemática. A forma de utilizar estas situações é uma opção do professor. O estudo dos erros de medida fornece material de fácil compreensão para o ensino de estatística básica. A repetição do experimento com molas diferentes e a modelagem do problema com a Lei de Hooke, são boas aplicações de função linear, com significado real para as variáveis e os parâmetros. Com esse estudo o aluno pode identificar o efeito da variação do coeficiente linear no gráfico de diferentes molas. O ajuste de curvas (na forma simplificada ou pelo método dos mínimos quadrados) é um excelente exemplo de resolução de sistemas lineares e aplicação da teoria de matrizes. Ao fazer um ajuste de curvas o aluno compreende: a importância das funções em si, porque ao calcular os parâmetros, a função passa a expressar o fenômeno modelado; a necessidade de coerência entre o tipo de função e o comportamento físico das variáveis; e a utilidade de operações como transposição e inversão de matrizes, ou métodos de resolução de sistemas lineares.

Observou-se, com a análise do problema proposto neste trabalho, que o ensino da Álgebra, com Modelagem Matemática, se viabiliza com a abordagem quantitativa dos fenômenos estudados. Observou-se também, do ponto de vista pedagógico, que neste caso a

Modelagem Matemática para a Educação Básica é diretiva, com forte participação do professor na problematização e na resolução dos problemas. Tal diretividade, no entanto, não diminui o potencial da modelagem como processo integrador e multidisciplinar, apenas a viabiliza em uma estrutura escolar formalizada. A utilização de modelos pré-elaborados, serve de apoio à atividade de planejamento do professor, proporcionando-lhe maior segurança na condução do ensino, adaptando as investigações de acordo com o que, quanto e como deseja ensinar.

O exercício de identificar e entender fisicamente um problema, propor modelos, discutir métodos matemáticos de solução e sua validação são procedimentos fundamentais para a formação de qualquer profissional que use o conhecimento científico como ferramenta de trabalho. A Modelagem Matemática proporciona todos esses procedimentos.

6. Referências Bibliográficas

Barbosa, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001

Barbosa, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula.in *Perspectiva - URI*, Erechim, EdiFAPES, V. 27, n. 98, p. 65-74, junho, 2003

Bassanezi, R.C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

Biembengut, M.S. *Modelagem Matemática & Implicações no ensino-aprendizagem de Matemática*. Blumenau, Ed. da FURB, 1999.

Borges, P.A.P. Experiências de Modelagem Matemática em Curso de Licenciatura. In: *8º EGEM*. Pelotas, RS, 2003.

Borsa, L. B. *O ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de engenharia*. Monografia de Especialização em Educação Matemática da UNIJUI. Ijuí, 2004.

Edwards, D. and Hamson, M. *Guide to Mathematical Modeling*. Boca Raton: CRC Press, 1990. 277 p.