

TEORIA DOS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Claudia Lisete Oliveira Groenwald¹

Lisandra de Oliveira Sauer²

Rosvita Fuelber Franke³

Giovanni da Silva Nunes⁴

Luci Talita Gross Lautert⁵

Resumo

Este trabalho objetiva o estudo dos conceitos da Teoria dos Números que são desenvolvidos no Ensino Básico, apresenta os resultados da investigação “Teoria dos Números e suas aplicações no processo de ensino e aprendizagem”, desenvolvida em 2005, na Universidade Luterana do Brasil. Justifica-se essa investigação pelas dificuldades que os alunos apresentam em aplicar os conceitos de mdc, mmc, divisibilidade e equações diofantinas, na resolução de problemas. Também os professores apresentam dificuldades na transposição didática desses conceitos em sala de aula. A primeira etapa da investigação foi um estudo teórico com atividades didáticas da Teoria dos Números que permitam o desenvolvimento de pensamentos de alto nível em aritmética, na segunda etapa, foi a implementação de um experimento de ensino com alunos de Licenciatura em Matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Teoria dos Números, Formação de professores.

Introdução

A aritmética é uma ciência de todos os tempos, provêm do vocábulo ARITHMOS, que significa número. Foram os pitagóricos que estudaram as relações entre números do ponto de vista que hoje chamamos de Teoria dos Números. A Teoria de Números é a área da Matemática que estuda as relações e as propriedades relacionadas com os Números Inteiros.

Com a corrente da Matemática “Moderna”, tanto a Geometria como a Teoria dos Números ficaram relegadas a segundo plano nos currículos da Matemática, nos últimos anos, a Geometria voltou a recuperar sua força e importância nos currículos, porém não ocorreu o mesmo com a Teoria dos Números, talvez por não ter se encontrado um meio termo para sua

¹ Doutora em Ciências da Educação pela Pontifícia de Salamanca – Espanha; professora titular do Curso de Matemática – Licenciatura da ULBRA, claudiag@ulbra.br

² Mestre em Matemática pela UFRGS; professora adjunta do Curso de Matemática – Licenciatura da ULBRA, licasauer@terra.com.br

³ Mestre em Matemática pela UFRGS; professora adjunta do Curso de Matemática – Licenciatura da ULBRA, rosvitafranke@ig.com.br

⁴ Doutor em Matemática pela UFRGS; professor adjunto do Curso de Matemática – Licenciatura da ULBRA, gsnunes@portoweb.com.br

⁵ Aluna Curso de Matemática – Licenciatura e Bolsista de Iniciação Científica da ULBRA, talitagross@terra.com.br

apresentação como simples receituário ou, porque, seu ensino mais profundo apresenta muitas dificuldades de compreensão, tanto para os professores como para os alunos (Sierra, Acosta, Garcia e Astudillo, 1989).

Entre os obstáculos encontrados pelos professores de Matemática na transposição didática dos conceitos aritméticos está a falta de modelos, pois para cada problema o método utilizado na sua resolução é diferente e, além disso, nos livros existem poucas atividades didáticas aplicáveis no Ensino Básico.

Com o objetivo de auxiliar o professor de Matemática a transpor essas dificuldades investigamos e elaboramos atividades didáticas envolvendo conceitos de Teoria de Números visando ampliar a compreensão dos tópicos de mmc, mdc, divisibilidade, algoritmo de Euclides e equações diofantinas. Tópicos básicos para o desenvolvimento do raciocínio lógico de forma a estimular nos alunos o interesse pela Matemática, promovendo o refinamento do pensamento aritmético e fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular conceitos e propriedades relativas aos números inteiros de maneira clara e objetiva.

Neste contexto é de suma importância, proporcionar aos futuros professores de Matemática, um espaço para discussão e reflexão, durante o curso de Licenciatura de Matemática, sobre a importância de estudar e de desenvolver atividades relativas à Teoria de Números para que esta importante área da Matemática ganhe mais espaço nos currículos escolares de todos os níveis.

Referencial Teórico

Uma Equação Diofantina Linear é a equação linear com duas incógnitas x e y : $ax+by=c$, onde a , b e c são inteiros dados, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Todo par de inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0+by_0=c$ é uma solução inteira ou apenas uma solução da equação $ax+by=c$.

Consideremos, como exemplo, a equação diofantina linear com duas incógnitas: $8x + 2y = 22$. Temos: $8.2 + 2.3 = 22$; $8.3 + 2(-1) = 22$; $8(-1) + 2.15 = 22$.

Logo, os pares de inteiros: 2 e 3 , 3 e -1 , -1 e 15 são soluções da equação $8x+2y=22$.

Existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que *não têm solução*. Tomemos como exemplo a equação diofantina: $6x+2y=3$, esta equação não tem solução, porque $6x+2y$ é um inteiro par para quaisquer que sejam os valores de x e y , enquanto que 3 é um inteiro ímpar (observe que 2 é $\text{mdc}(6,2)$ e não divide 3).

De modo geral, a equação diofantina linear $ax + by = c$ não tem solução sempre que o $\text{mdc}(a, b)$ não divide c , como veremos no seguinte teorema, que nos dá uma condição para a existência de solução deste tipo de equação.

Teorema: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, o $\text{mdc}(a, b)$ divide c (Alencar Filho, 1992).

Um exemplo de uma equação diofantina, encontrado em Domínguez e Iezzi (2003) é: Ao entrar num bosque, alguns viajantes avistam 37 montes de maçã. Após serem retiradas 17 frutas, o restante foi dividido igualmente entre 79 pessoas. Qual a parte de cada pessoa? (Problema de Mahaviracarya, matemático hindu).

A equação diofantina que devemos resolver é: $37x - 17 = 79y \Rightarrow 37x - 79y = 17$. O $\text{mdc}(37, 79)$ pelo algoritmo de Euclides: 1 e $1|17$ logo a equação tem soluções. Devemos exprimir 1 como combinação linear 37 e 79, para isto basta eliminar os restos 2 e 5 do seguinte modo: $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(37 - 5 \cdot 7) = 15 - 2 \cdot 37 = 15(79 - 37 \cdot 2) - 2 \cdot 37 = 79 \cdot 15 - 32 \cdot 37 = 37(-32) + 79 \cdot 15$; isto é: $37(-32) + 79 \cdot 15 = 1$ e $37 \cdot (-544) - 79 \cdot (-255) = 17$

Logo o par de inteiros $x_0 = -544$, $y_0 = -255$ é uma solução particular da equação proposta, e todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas: $x = -544 - 79t$, $y = -255 - 37t$.

Como o problema pede o número de frutas, x e y devem ser números positivos, para isso devemos escolher um t que satisfaça as desigualdades: $-544 - 79t > 0$ e $-255 - 37t > 0$, o que nos leva a $t < -7$. Considerando $t = -7$, temos: $x = -544 - 79 \cdot (-7) = 9$ e $y = -255 - 37 \cdot (-7) = 4$ e, como y representa o número de maçãs que cada pessoa comeu e $y = 4$, temos que cada viajante comeu 4 maçãs. Evidentemente esta não é a única solução para este problema já que poderíamos ter escolhido outro valor para t como, por exemplo, $t = -8$. Este fato possibilita uma discussão entre os alunos sobre as possíveis soluções e sobre a necessidade de enunciar adequadamente um problema para que não ocorram múltiplos resultados.

Objetivos da investigação

1. Analisar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos da Teoria dos Números, investigando como realizar a transposição didática desses conceitos para o Ensino Básico.
2. Pesquisar atividades metodológicas e recursos que permitam ao aluno conjecturar, comparar e estabelecer estratégias mentais na resolução de situações problemas de outras áreas do conhecimento relacionando-os a Teoria dos Números.
3. Construir um espaço de discussão, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, sobre a necessidade de trabalhar os conceitos da Teoria dos Números no Ensino Básico.

Metodologia da investigação

Esse trabalho foi desenvolvido em duas etapas: estudo em torno dos conceitos de múltiplos, divisores, números primos, máximo divisor comum, algoritmo de Euclides e equações diofantinas e a implementação de um experimento de ensino.

A primeira etapa, para atender aos objetivos propostos, se constituiu em um estudo em torno do tema estudado, para Trivinos (1987) essa etapa permite aos investigadores envolvidos aumentar sua experiência em torno do problema, aprofundando seus estudos, buscando antecedentes e maiores conhecimentos para, em seguida, planejar uma pesquisa do tipo experimental. Essa fase foi desenvolvida com reuniões semanais para discussão do trabalho a ser desenvolvido com todo o grupo de pesquisa. Durante essa etapa foi realizada a pesquisa bibliográfica, onde foram analisadas as atividades relativas ao tema, em livros didáticos de uso no Ensino Básico, foram desenvolvidas atividades metodológicas aplicáveis no Ensino Básico e foi organizada uma seqüência didática com os conceitos estudados.

Na segunda etapa foi aplicado um experimento de ensino com as atividades metodológicas, pesquisadas na primeira etapa. O experimento de ensino buscou criar um espaço de discussão, onde os alunos, trabalhando em pequenos grupos, pudessem refletir e buscar soluções para os problemas apresentados e o professor, através da análise das conjecturas levantadas pelos alunos, os auxiliasse a alcançar sucesso no desenvolvimento do trabalho proposto.

Visou, também, possibilitar que estudantes de Licenciatura em Matemática se defrontassem com situações que possibilitassem a construção de condições para realizar a transposição didática de tais conceitos para o Ensino Básico.

Os participantes, dessa etapa, foram 11 alunos do início do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil, Rio Grande do Sul. A aplicação do experimento de ensino foi realizada em cinco terças feiras dos meses de setembro e outubro de 2005, com duração de 4 horas aula em cada encontro, totalizando 20h/a.

Os dados foram coletados através da observação participativa, registrando os eventos e registrando-os em um diário de bordo. Posteriormente os dados foram descritos, analisados e categorizados.

Optou-se pela abordagem qualitativa, entendendo que nessa perspectiva é possível uma análise mais detalhada da situação pesquisada, possibilitando conhecer e entender as circunstâncias particulares em que o objeto do estudo se insere.

Experimento de ensino

Para motivar a reflexão da necessidade do desenvolvimento de tópicos da Teoria dos Números no Ensino Básico é importante que alunos de Cursos de Licenciatura em Matemática, que serão futuros professores, analisem o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, tendo a oportunidade de conhecer e atuar com atividades que envolvam essa teoria.

Com tal objetivo foi implementado um experimento de ensino com atividades planejadas de forma a permitir a reflexão sobre a importância de estudar e desenvolver atividades relativas à Teoria de Números ao longo do Ensino Básico, bem como, de analisar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos.

É importante ressaltar que os problemas propostos não limitam-se a assuntos isolados, mas são tratados de forma integrada, visando uma melhor compreensão dos conceitos para que os estudantes, futuros professores, tenham condições de aperfeiçoar sua prática e possam realizar a transposição didática adequada desses conceitos quando atuarem no Ensino Básico.

As atividades visavam investigar se os alunos apresentavam um raciocínio aritmético de alto nível. Para Resnick citado por Lins e Gimenez (1997) um raciocínio aritmético de alto nível é aquele que estabelece relações e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algoritmos. Na aritmética é o estabelecimento de generalizações e a dedução de regras com base em observações de padrões numéricos.

No experimento de ensino foi empregada a metodologia resolução de problemas, é importante ressaltar que os problemas, primeiramente, foram resolvidos individualmente, em seguida os alunos foram distribuídos em pequenos grupos para discutir as estratégias desenvolvidas na resolução dos problemas. A resolução, tanto individual, quanto do grupo foi registrada e entregue para posterior avaliação do grupo de pesquisa.

Segue um resumo das atividades realizadas em cada encontro.

Quadro 1: Resumo das atividades realizadas no Experimento de Ensino

	Número de alunos presentes	Atividades desenvolvidas
1º Encontro 30/08/05	11 alunos	Resolução de problemas envolvendo os conceitos de múltiplos, divisores, mmc, mdc e números primos.
2º Encontro 06/09/05	9 alunos	Resolução de um problema que aborda os tópicos: números primos, quadrados perfeitos, divisibilidade, seqüências e progressão aritmética.
3º Encontro 13/09/05	10 alunos	Atividades didáticas com os conceitos de identidade, equação do primeiro grau, equação do primeiro grau com duas variáveis, equações diofantinas.
4º Encontro 27/09/05	11 alunos	Resolução de problemas que recaem em uma equação diofantina. Introdução dos teoremas de equações diofantinas.

5º Encontro 04/10/05	11 alunos	Resolução de problemas com equações diofantinas. Análise da utilização de tais conceitos no Ensino Básico.
-------------------------	-----------	---

Análise dos Resultados

1. Perfil do aluno

Com a intenção de conhecer melhor os participantes do experimento, foi aplicado um questionário, preenchido pelos alunos envolvidos neste projeto.

Observando a tabela 1, percebemos que a idade dos participantes foi bastante variada.

IDADE	N.º de Participantes
17 ← 22 anos	4
22 ← 27 anos	3
27 ← 32 anos	1
32 ← 37 anos	2
37 ← 42 anos	0
42 ← 47 anos	0
47 ↔ 52 anos	1

Tabela 1: Idade do grupo investigado

Dos 11 participantes, 6 trabalham mais de 40 horas semanais, 2 trabalham 20 horas por semana e apenas 3 não trabalham. Entre os alunos, há uma aluna que já leciona, ela exerce suas atividades na E.E. de Ensino Fundamental América, em uma turma de 4ª série do Ensino Fundamental.

Também, verificamos que a grande maioria dos alunos cursou o Ensino Fundamental em escolas públicas, como podemos observar na tabela 2:

	Escola Particular	Escola Pública
Participantes	1	10

Tabela 2: Ensino Fundamental

E todos os alunos, sem exceção, cursaram o Ensino Médio em escolas públicas.

2. Estratégias empregadas pelos alunos na resolução dos problemas: exemplo de uma atividade do experimento de ensino

Um terreno retangular de 221m por 117m será cercado; em toda a volta desse cercado, serão plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível entre elas?

Estratégia utilizada na resolução do Problema	N.º de participantes
Aplicou o conceito de MDC e encontrou o resultado correto	4
Aplicou o conceito de MDC, mas não encontrou o resultado correto	1
Tentou de outra forma, mas não encontrou o resultado correto.	4

Não resolveu o problema.	2
--------------------------	---

Tabela 3: Resolução Individual problema 1

Estratégia utilizada na resolução do Problema	N.º de participantes
Aplicou o conceito de MDC e encontrou o resultado correto	1
Tentou de outra forma e encontrou o resultado correto.	2
Aplicou o conceito de MMC e afirmou aplicando o MDC, conseqüentemente não encontrou o resultado correto	1

Tabela 4: Resolução dos Grupos problema 1

Como podemos observar foram muitas as dificuldades encontradas, apesar deste ser um problema simples, sua resolução está ligada à aplicação do conceito de máximo divisor comum, mas apenas quatro dos onze participantes se deram conta deste fato, o que nos indica a dificuldade de relacionar conceitos matemáticos com a resolução de problemas.

Um dos participantes afirmou estar calculando o máximo divisor comum, porém calculou o mínimo múltiplo comum. Outros dois participantes dividiram 221m por 117m e afirmaram que a distância máxima entre as árvores seria 1,88m, houve ainda um participante que calculou o perímetro do terreno e colocou como resposta 676m, ou seja, haveria uma única árvore para cercar o terreno.

Considerações finais

O experimento didático foi avaliado, pelo grupo de pesquisa, como muito positivo nos seus resultados. Os alunos estiveram, durante o trabalho de grupo, motivados e interessados na realização das atividades.

Os alunos demonstraram desenvoltura no trabalho em grupo, propiciando um clima de discussão e trocas de idéias, bem como, um ambiente favorável ao levantamento de dúvidas em todas as atividades propostas, o que é fundamental para a aplicação de uma metodologia que busca a resolução de problemas.

Observou-se que os alunos participantes do experimento encontraram dificuldades para realizar as tarefas. As atividades que exigiam aplicação direta dos conceitos foram solucionadas, porém quando as atividades exigiam uma interpretação mais detalhada e não estavam identificados os conceitos a serem aplicados, os alunos não conseguiram relacionar a teoria com a prática e a solução não foi encontrada.

Os alunos demonstraram não ter conhecimento de atividades desse tipo e nem da importância do trabalho com os conceitos referidos para o desenvolvimento do pensamento

aritmético e do quanto esse conhecimento auxilia os alunos na compreensão de outros conceitos e na resolução de problemas. Os onze alunos afirmaram que reconhecem a importância das mesmas e mostraram-se receptivos a aplicação de uma metodologia de trabalho em sala de aula, como as desenvolvidas no experimento didático.

Logo é de extrema importância o aluno de Licenciatura em Matemática, futuro professor, defrontar-se, durante sua formação, com atividades que o levem a refletir sobre uma metodologia adequada ao desenvolvimento do pensamento aritmético, qualificando, assim sua prática docente.

Referências Bibliográficas

ALENCAR FILHO, Edgard. *Teoria Elementar dos Números*. São Paulo: Nobel, 1992.

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna: Volume Único*. São Paulo: Atual, 2003.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. São Paulo: PAPIRUS, 1997.

TRIVINOS, Augusto Nivaldo Silva. *Introdução à pesquisa em Ciências Sociais*. São Paulo, Atlas, 1987.

SIERRA, Modesto; ACOSTA, Mario Gonzáles; GARCÍA, Andrés Sánches; ASTUDILLO, Maria Teresa González. *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis, 1989.