# UMA APROXIMAÇÃO ENTRE A EDUCAÇÃO BÁSICA E O ENSINO SUPERIOR POR MEIO DE APLICAÇÕES TOPOLÓGICAS

Janaina Schemmer[1]

Patrícia Sândalo Pereira[2]

**RESUMO:** Neste artigo apresentamos a monografia de conclusão do Curso de Especialização em Educação Matemática realizado na UNIOESTE - Campus de Foz do Iguaçu, onde buscamos fazer um paralelo entre a educação básica e o ensino superior mediante aplicações topológicas, tentando apresentar aos alunos da educação básica conceitos de um conteúdo restrito a séries de nível superior.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geometria das Superfícies; Estruturas Topológicas; Topologia

## INTRODUÇÃO Á TOPOLOGIA

Segundo Sampaio (2004), define-se superfície como “um objeto geométrico bidimensional que não existe no mundo real, somente em nossa imaginação geométrica platônica” (p. 1). De acordo com Euclides, superfície é aquilo que só tem comprimento e largura. Podemos citar como exemplos a superfície de um plano, a superfície de uma esfera, entre tantas outras.

A noção inicial de topologia é atribuída ao matemático suíço Leonhard Euler. Em 1736, em uma cidade da Alemanha chamada Königsberg (hoje, Kaliningrad) corriam dois rios que se uniam formando o Rio Pregel.

Euler levantou um problema, tendo em vista as pontes ao longo do trajeto dos rios. O problema consistia em atravessar as sete pontes da cidade de Königsberg em um único trajeto, ou seja, passar por todas as setes pontes sem voltar a cruzar qualquer uma delas. Euler mostrou ser impossível atravessar as pontes sem passar duas vezes, pelo menos, por uma delas.

[1] Especialista em Educação Matemática pela UNIOESTE - Campus de Foz do Iguaçu. Docente do Colégio Franciscano Nossa Senhora de Fátima Email: jana_schemmer@hotmail.com

[2] Doutora em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro/SP e Docente da UNIOESTE – Campus de Foz do Iguaçu. Membro do Grupo de Pesquisa Educação Matemática. Email: patriciasandalop@uol.com.br

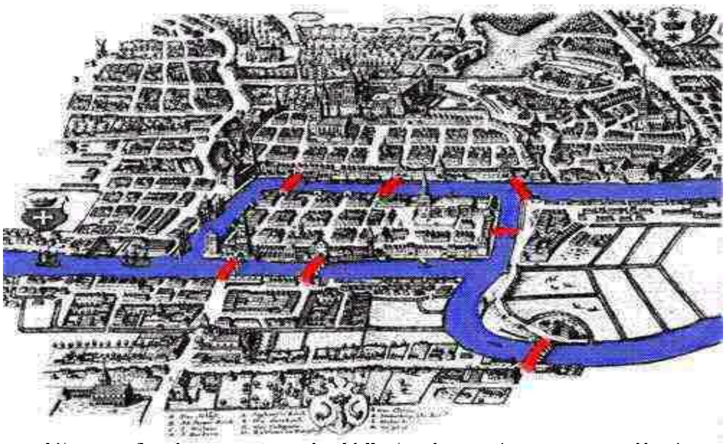


Figura 1: As pontes de Königsberg (em vermelho).

Ao estudar esse problema das pontes, o qual dá origem à teoria das redes, uma das formas mais práticas da Topologia, Euler percebeu a existência de algumas propriedades das figuras geométricas que não dependiam da forma nem do tamanho das figuras. Percebeu que poderia torcer, esticar, puxar algumas figuras, sem que essas propriedades se alterassem. O campo de estudo da Topologia é exatamente este: uma geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada através de transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas, ou seja, através de *homeomorfismos*. Em virtude disto, na topologia não se firmam conceitos de comprimentos, áreas, ângulos e tantos outros, pois os objetos podem ser representados por materiais totalmente deformáveis. Com isso, a topologia cria um universo muito particular, com características próprias. Podemos esticar as figuras ou encolhê-las sob certas condições, e continuar obtendo figuras equivalentes. Por isso podemos considerar a Topologia como uma "geometria elástica".

Na topologia vê-se, com muita clareza que os matemáticos abordam uma nova área de estudo. Outro matemático que contribui significativamente para o desenvolvimento desta nova área foi Augustus Möbius. Os trabalhos de Möbius foram impulsionados pela descoberta conjunta de que existem superfícies de um só lado. Em virtude de tal descoberta, surge a *faixa de Möbius* (também conhecida como *fita de Möbius)*. Obtem-se um modelo da faixa de Möbius torcendo-se uma tira de papel em 180º e colando-se as extremidades, segundo exemplo abaixo:

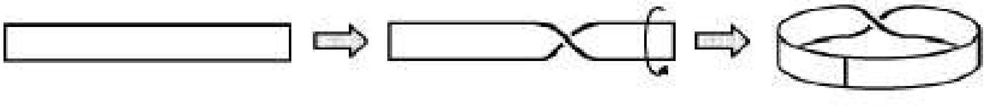


Figura 2: Processo de construção da Faixa de Möbius

Ao tentarmos pintar um lado desta faixa, chegamos a conclusão de que a faixa possui apenas um lado, e não dois lados como a figura aparenta ter.

Para caracterizar estruturas topológicas, define-se como Topologia de uma superfície o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando aplicamos as seguintes deformações, também denominadas *deformações legais*:

1. Esticar ou inflar a superfície ou partes dela.
2. Encolher a superfície ou partes dela.
3. Entortar a superfície ou partes dela.
4. Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada, processo esse denominado *recorte e colagem*. Para cumprir tais critérios, deve-se assumir que as superfícies não têm espessura. Com isso, ao esticarmos ou encolhermos as superfícies, certas propriedades irão manter-se inalteradas. Para isso, é necessária a utilização de material maleável e elástico, que proporcione e facilite tais deformações.

Assim, ao esticarmos ou encolhermos o objeto, as suas "características topológicas" não irão ser alteradas. O que se mantém é a essência da forma.

Existem ainda aspectos da natureza da superfície que sofrem alteração pelas deformações citadas anteriormente, como por exemplo, à distância, ângulos, áreas e curvatura, constituindo o que chamamos de geometria da superfície. Tais deformações que alteram a topologia de uma superfície, chamada de *deformações ilegais* resultam em superfícies não homeomorfas à superfície original. Para Sampaio (2004), as deformações consideradas *"ilegais"* definem-se:

1. Cortar a superfície, segundo uma curva nela demarcada, e não tornar a colar, uma na outra, as bordas gerada pelo recorte;
2. Realizar colagens de modo arbitrário fazendo com que dois ou mais pontos, originalmente separados, torne-se um só ponto da superfície;
3. Encolher a superfície, ou algumas de suas regiões, de modo que pontos originalmente separados se aglutinem num só ponto. (p. 08)

Outro conceito de fundamental importância para a topologia é a classificação de curvas. Classificamos com *curvas planas* aquelas que podem ser desenhadas num plano.

Figura 3: Curvas planas.

Denominamos *curva plana fechada* se, marcando um ponto X sobre ela, é possível, a partir de X, desenhar toda a curva com um lápis, sem tirar o lápis do plano e voltar ao ponto X, ou ainda, quando não for possível passar do interior para seu exterior sem cruzar a fronteira.

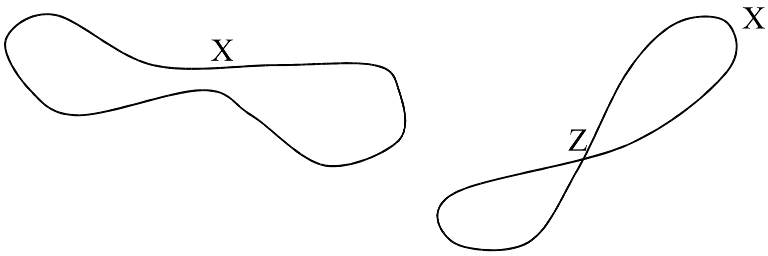



Figura 4: Curvas fechadas.

Pode-se verificar que na primeira figura a curva não intercepta a si mesma. Já na segunda figura, verifica-se que a curva intercepta-se no ponto Z.

Sendo assim, denominamos *curva fechada simples* quando a curva fechada não intercepta a si mesma ou quando divide o plano em apenas um interior e um exterior.

Figura 5: Curvas fechadas simples.

Porém, quando a curva fechada intercepta a si mesma é chamada de *curva fechada não simples*, ou quando divide o plano em mais de um interior e um exterior.

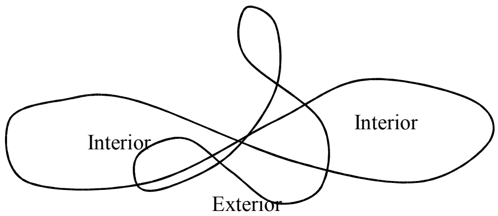



Figura 6: Curvas fechadas não simples.

As curvas planas que não são fechadas são chamadas de *abertas,* isto é, começas e terminam em pontos diferentes.

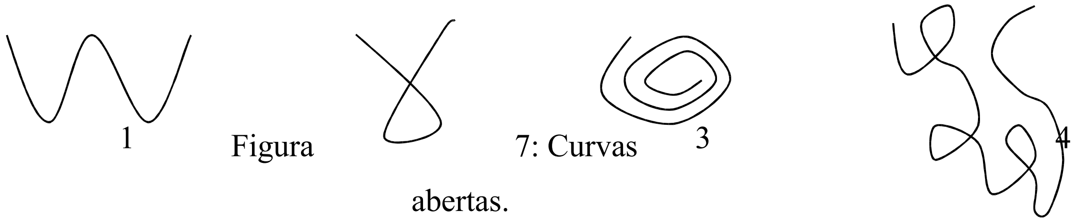



Figura 7: Curvas abertas.

Quando a curva não intercepta a si mesma é denominada *aberta simples*, conforme figura 7 (1) e (3).

No entanto, quando a curva intercepta a si mesma, é chamada *aberta não simples*, conforme figura 7 (2) e (4).

Sendo assim, todas as figuras abertas simples são equivalentes, porque podemos deformar umas nas outras. Entretanto, se tomamos uma figura aberta e outra fechada, jamais poderemos deformar uma na outra, pois precisaríamos cortar a curva fechada para torna-la fechada, o que não é permitido na topologia. Portanto, nenhuma curva aberta é equivalente a uma curva fechada.

Podemos citar outras estruturas que também fazem parte da topologia como os grafos, o número de Euler – considerado como um invariante topológico, os puzzles de metal, entre outros.

## PRÁTICA PEDAGÓGICA DA TOPOLOGIA

Na tentativa de mostrar a possibilidade de inclusão de conteúdos envolvendo Topologia em turmas de educação básica e procurando fazer-se uma aproximação destes níveis de ensino ao ensino superior, procurou-se, inicialmente, a aplicação de atividades que envolvessem assuntos topológicos. Para tanto, foram desenvolvidas atividades em turmas de 8ª série do ensino fundamental e 2ª série do ensino médio do Colégio Franciscano Nossa Senhora de Fátima na cidade de São Miguel do Iguaçu/PR. Como objetivos fundamentais desta aplicação, citam-se:

a) Fazer com que os alunos aproximassem o conteúdo trabalhado com a realidade vivenciada pelos mesmos, fazendo assim uma relação do que está sendo ensinado em sala com situações cotidianas.
b) Aproximação dos três níveis básicos de ensino: fundamental, médio e superior.

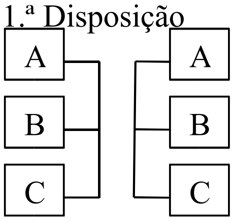
A aula iniciou-se apresentando alguns conceitos utilizados na Topologia e que são a base para qualquer aprendizado que envolva tal conteúdo. A apresentação destes conceitos foi feita através de uma apresentação em *PowerPoint* com o auxílio de um *Data Show*. Foram apresentados os seguintes conceitos: definição de Topologia, histórico da Topologia, deformações legais e não legais em estruturas topológicas, transformações topológicas, exemplos de estruturas topológicas, noções de interior e exterior, grafos e puzzles de metal. Apresentados os conceitos, iniciou-se a aplicação das atividades. Tais atividades envolviam questões utilizando grafos, Curvas fechadas simples e transformações contínuas, ou seja, análise da estrutura da superfície como sendo uma estrutura topológica, passível de transformações que poderiam ser continuamente desfeitas. Desta forma, as atividades foram realizadas individualmente em ambas as turmas. As atividades aplicadas no ensino fundamental foram igualmente aplicadas no ensino médio.

## ATIVIDADES

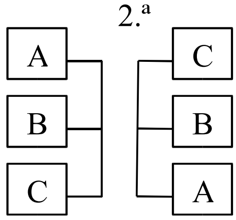
**Atividade 1:**

Certa vez, um Califa persa que, desejando selecionar um marido para sua filha, usou um problema de Topologia. Eram propostas duas situações para um mesmo problema: ligar A a A', B a B', C a C' por linhas que não se cruzem nem interceptem qualquer outra linha da figura.

1.ª Disposição

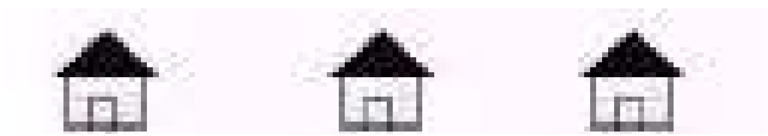



2.ª Disposição




**Atividade 2:**

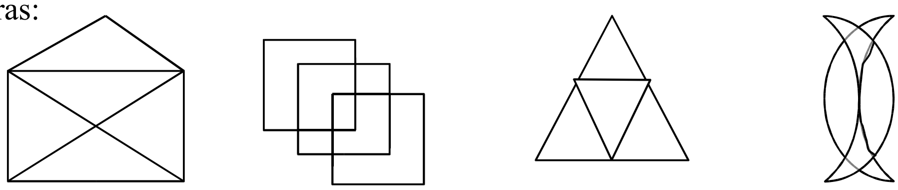
É possível conectar os 3 serviços em cada uma das casas sem haver cruzamento de tubulação?



Água Energia Telefone

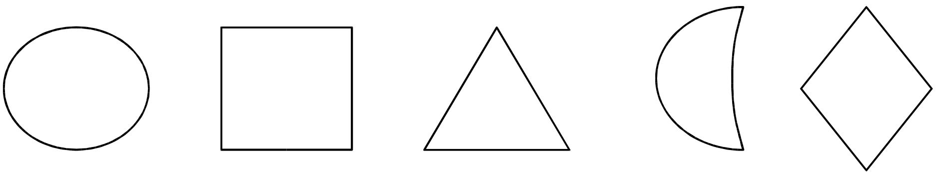
**Atividade 3:**

Sem levantar o lápis do papel nem passares 2 ou mais vezes pela mesma linha, desenhe as seguintes figuras:



**Atividade 4:**

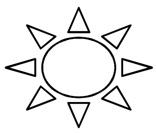
**4) Treinamento com massa de modelar:** TRANSFORME

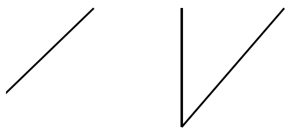
a) 

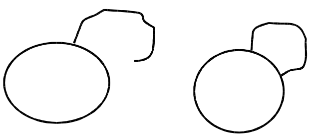
b) Reúnam em conjuntos distintos as letras e números abaixo que são topologicamente equivalentes. A B C D 1 E F G 2 H I J 3 K L M 4 N O P 5 Q R S 6 T U 7 V X 8 Y W Z 9

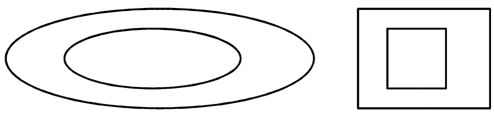
**Atividade 5**

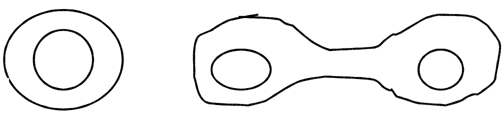
5) São equivalentes?

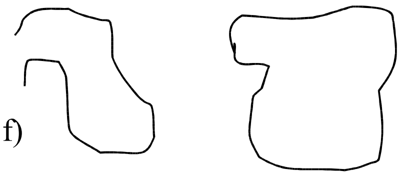
a) 

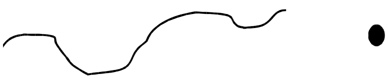
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

O objetivo da aplicação das atividades foi a de fixar conceitos topológicos e fazer com que os alunos se relacionassem com o conteúdo. É bem verdade que o conteúdo Topologia é destinado somente a estudos concentrados no ensino superior, mas para este trabalho, teve-se o intuito de fazer a aproximação dos níveis de ensino, situados na educação básica – ensino fundamental e ensino médio – e o ensino superior mediante as atividades que envolvessem topologia.

A prática pedagógica da Topologia teve importância significativa no desenvolvimento da pesquisa. O que pode ser analisado nas atividades foi que, quando há uma interação do aluno com o conteúdo, o aprendizado torna-se algo passivo, e isto não precisa acontecer somente mediante uma aplicação prática. Isto pode ser verificado na apresentação do conceito de Topologia. Para a apresentação de tal conceito, apresentou-se a definição e posteriormente, os alunos participaram de uma atividade que envolvia o conceito de topologia.

O objetivo da Educação Matemática vai ao encontro desta realidade: novas técnicas de ensino ou então, táticas que auxiliem no modo de ensinar. É visto que um conteúdo como a Topologia encontra-se totalmente afastado da educação básica, e isto não ocorre por acaso: a base da Topologia firma-se em conceitos, leis, teorias e teoremas que servem para a demonstração de muitos conceitos matemáticos. Reservá-lo ao ensino superior é algo totalmente compreensível, uma vez que para resolver problemas topológicos, é necessário o conhecimento de muitos destes teoremas, princípios básicos da topologia, e como conseqüência, fazer a demonstração do problema apresentado mediante a aplicação destes teoremas. Mesmo assim, é possível fazer a apresentação de tal conteúdo a estas séries, levando-se em consideração o modo de ensino. Haja vista que não há a necessidade da apresentação de tais teoremas, nem um aprofundamento maior no conteúdo, mas sim, fazer com que o aluno saiba da existência do mesmo, e que lide com conceitos básicos, que poderão, futuramente, auxiliar na aprendizagem e no estudo aprofundado da Topologia.

Não basta apenas apresentar um conceito e aplicar exercícios onde a base seja o conceito previamente ensinado. É necessário fazer com que o aluno interaja com o que está sendo ensinado, seja através de uma atividade que desperte o interesse do aluno pelo conteúdo, seja através de uma atividade prática. A atividade apresentada pode conter aspectos históricos, como o apresentado na definição de Topologia.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PINTO, J. A. P. **Notas sobre História da Topologia.** Cidade do Porto: Universidade do Porto, 2004.

SAMPAIO, J. C. V. **Topologia das Superfícies: uma introdução intuitiva.** São Paulo: UFSCar, 2004.

________________ **Introdução à topologia das superfícies.** São Paulo: UFSCar, 2000.