

UMA NOVA PROPOSTA PARA GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

DANIELLA ASSEMANY DA GUIA

CAP- UFRJ danyprof@bol.com.br

1.1. RESUMO

Esta comunicação científica tem como objetivo tratar e apresentar a Geometria Analítica dentro de uma roupagem exclusivamente vetorial, inserindo e relacionando seus tópicos com outros abordados na 1ª e 3ª séries do Ensino Médio, reformulando seu currículo.

Ao investigarmos os indícios colaboradores para a falta de preparo dos alunos que ingressam na Universidade, encontramos fortes indicações para introduzir o cálculo vetorial desde a 1ª série do Ensino Médio. Com base nos PCNs, propomos um novo plano de curso e apresentamos atividades para aplicações práticas desta geometria incentivando o uso do software Cabri Géomtrè II na utilização desse novo princípio.

Palavras-chave: Vetores, geometria analítica, Cabri Géomètre II

1.2. INTRODUÇÃO

“O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.” (PCNs, 1999 – p. 225)

Esta comunicação é dirigida principalmente aos professores do Ensino Médio e tem como objetivo tratar a Geometria Analítica utilizando o cálculo vetorial, propondo a introdução de vetores e equação de retas no \mathbb{R}^2 já na primeira série do Ensino Médio.

Para isso, iniciaremos revisando o plano de curso do Ensino Médio, reorganizando-o de acordo com a nossa proposta. A introdução do capítulo de vetores no \mathbb{R}^2 na 1ª série do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo da função do 1º grau e, principalmente, reduzir contas e ampliar conceitos que recorriam ao Teorema de Pitágoras e às semelhanças e fórmulas de distâncias, os quais se aplicam apenas aos raciocínios para coordenadas positivas. Acreditamos que desta forma estaremos promovendo uma proposta preocupada com a produção de significados para a Matemática. A organização dos capítulos estruturados e baseados nos vetores pretende conduzir o aluno às interpretações geométricas de fatos algébricos.

Procuraremos expor ao professor de Matemática algumas razões e conseqüências para o trabalho com a geometria vetorial, mostrando, como ilustração e complementação dessa parte teórica, atividades de aplicações práticas desta geometria e incentivando o uso do software Cabri Géomètre II neste tipo de atividade, pois, dentre todos os motivos que a informática na educação expõe, concordamos que a visualização e a descoberta dos conceitos auxiliam em muito sua compreensão.

A nossa proposta foi desenvolvida no Ensino Médio, entretanto variáveis como experiências do aluno, proposta do curso e objetivos da disciplina podem requerer adaptações.

2.1. PROPOSTA CURRICULAR PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

CONTEÚDO	OBJETIVOS
✓ Par ordenado – relações	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Conceituar e representar pares ordenados. ➤ Representar o ponto do plano cartesiano, dadas as suas coordenadas. ➤ Identificar e aplicar a propriedade fundamental de pares ordenados. ➤ Estabelecer a igualdade entre pares ordenados. ➤ Representar graficamente o produto cartesiano de dois conjuntos. ➤ Reconhecer a relação binária.

✓ Vetores no \mathbb{R}^2	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Conceituar a partir da noção intuitiva. ➤ Representar graficamente e algebricamente os vetores no plano. ➤ Reconhecer o módulo, a direção e o sentido como características constituintes dos vetores. ➤ Operar graficamente e algebricamente, utilizando a adição, a subtração e o produto por um escalar. ➤ Reconhecer os vetores posição, unitário, nulo, opostos e colineares.
✓ Funções	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Distinguir relação de função. ➤ Identificar e reconhecer a notação de função. ➤ Conceituar domínio, contradomínio, imagem de um elemento e conjunto imagem. ➤ Identificar as características e reconhecer os diversos tipos de função.
✓ Funções elementares - inequações.	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Representar no plano cartesiano as funções do 1º grau. ➤ Analisar o sinal e determinar a solução das várias inequações do 1º grau em \mathbb{R}. ➤ Relacionar funções do 1º grau nos diferentes campos da atividade humana.
✓ Equações da Reta no \mathbb{R}^2	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Relacionar as equações da reta à função do 1º grau. ➤ Estabelecer e distinguir as equações vetorial, paramétrica, simétrica e reduzida da reta. ➤ Representar algebricamente os tipos de equações da reta. ➤ Classificar as posições relativas de duas retas no plano.
✓ Sistemas de equações e inequações do 1º grau no \mathbb{R}^2	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Comparar o gráfico das equações com o sistema algébrico, relacionando as soluções encontradas nos dois ambientes. ➤ Classificar um sistema de equações do 1º grau a partir dos vetores diretores das retas.
✓ Função quadrática - inequações do 2º grau	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Reconhecer uma função do 2º grau e determinar as suas características. ➤ Construir o gráfico de uma função quadrática. ➤ Analisar o sinal e determinar a solução de várias inequações do 2º grau. ➤ Relacionar as funções do 2º grau nos diferentes campos da atividade humana.

<p>✓ Função modular – função composta – função inversa</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Conceituar módulo e construir gráficos de função modular. ➤ Resolver equações e inequações modulares em \mathbb{R}. ➤ Conceituar e diferenciar função composta de função inversa.
<p>✓ Função exponencial</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Efetuar potenciação e aplicar propriedades das potências. ➤ Construir o gráfico de funções exponenciais. ➤ Resolver os vários tipos de equações e inequações exponenciais.
<p>✓ Logaritmos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Definir e aplicar logaritmo. ➤ Reconhecer e aplicar propriedades operatórias dos logaritmos. ➤ Identificar as condições de existência dos logaritmos, aplicando a definição e as propriedades operatórias.
<p>✓ Função logarítmica.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Construir o gráfico da função logarítmica. ➤ Resolver equações e inequações logarítmicas.
<p>✓ Relações trigonométricas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Reconhecer e identificar os elementos de um triângulo retângulo. ➤ Determinar as razões trigonométricas nos triângulos retângulos. ➤ Calcular e aplicar seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.
<p>✓ Funções trigonométricas</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Associar a cada número real um ponto de uma circunferência através das graduações em graus ou radianos. ➤ Trabalhar com funções, estudando gráficos, simetrias, domínio e imagem. ➤ Conceituar período das funções trigonométricas.
<p>✓ Relação trigonométrica fundamental – identidades – redução ao 1º quadrante</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Trabalhar com expressões algébricas para deduzir fórmulas e verificar identidades. ➤ Calcular o valor das funções trigonométricas de quaisquer arcos, relacionando-os aos arcos do 1º quadrante através de reduções.
<p>✓ Soma, diferença e multiplicação de arcos – transformação em produto</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Resolver expressões trigonométricas, utilizando as fórmulas de soma, diferença, produto e arco metade. ➤ Determinar os valores das funções trigonométricas, utilizando as fórmulas de soma, diferença, produto e arco metade.
<p>✓ Equações e inequações trigonométricas</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Determinar os conjuntos-soluções de equações e inequações trigonométricas.

2.2. PROPOSTA CURRICULAR PARA O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

A ênfase vetorial priorizada neste trabalho não influi no currículo da 2ª série do Ensino Médio preconizado por grande parte das escolas. Desta forma, os conteúdos propostos são: Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares (\mathbb{R}^3), Análise Combinatória, Números Binomiais e binômio de Newton, Probabilidades, Seqüência – progressão aritmética e progressão geométrica, Geometria espacial: de posição e métrica.

2.3. PROPOSTA CURRICULAR PARA O 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Para esta série, a escolha do cálculo vetorial difere dos currículos comuns apenas no trato com a Geometria Analítica do \mathbb{R}^3 :

CONTEÚDO	OBJETIVOS
<p>✓ Geometria analítica I : \mathbb{R}^3 - vetores e retas</p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Representar algébrica e graficamente pontos e vetores no espaço. ➤ Operar graficamente e algebricamente, utilizando a adição, a subtração e o produto por um escalar. ➤ Operar com a condição de alinhamento de três pontos. ➤ Resolver os produtos: escalar, vetorial e misto, identificando o espaço vetorial (\mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) necessário e suficiente para comportar tais operações. ➤ Determinar a distância entre dois pontos a partir do usando o cálculo vetorial. ➤ Estabelecer, distinguir e representar algebricamente as equações vetorial, paramétrica, simétrica e reduzida da reta no \mathbb{R}^3. ➤ Determinar vetorialmente a distância entre ponto e reta. ➤ Obter o ângulo formado por duas retas. ➤ Calcular vetorialmente a área de polígonos e volumes de sólidos.

Posteriormente, os conteúdos são similares aos utilizados frequentemente: Geometria Analítica II: circunferências, Geometria analítica III: Cônicas, Números complexos, Polinômios, Equações polinomiais.

3. ATIVIDADES PROPOSTAS

Apresentaremos idéias de exercícios e abordagens para essa nova forma de abordagem dos conteúdos, utilizando o software Cabri Géomètre II.

3.1.

- 1) Construa um vetor \vec{w} de direção vertical no sentido para baixo e deixe no canto superior esquerdo da sua tela.
- 2) Construa os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ não colineares e deixe na parte superior da sua tela.
- 3) Escreva para cada um deles módulo, direção e sentido, usando o ícone *Comentários*.
- 4) Translade \vec{u} e \vec{v} segundo o vetor \vec{w} . Todas as construções serão feitas a partir das translações de \vec{u} e \vec{v} .
- 5) Aponte o ponteiro às extremidades de \vec{u} e \vec{v} , verificando o que acontece com os vetores obtidos pela translação.
- 6) Some \vec{u} com \vec{v} usando o ícone SOMA e peça esse resultado com origem em A.
- 7) Aponte o ponteiro à extremidade do seu vetor \vec{u} inicial e mexa livremente com esse ponto. Faça o mesmo com \vec{v} . O que você percebe?
- 8) Por translação, faça as origens das translações de \vec{u} e \vec{v} coincidirem. Esconda o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ e monte um paralelogramo com \vec{u} e \vec{v} .
- 9) Agora, peça ao software para mostrar $\vec{u} + \vec{v}$. O que você percebe? Como você explica?
- 10) Aponte o ponteiro às extremidades dos vetores \vec{u} e \vec{v} , movendo-as novamente. Que relação você pode ter a partir dessa soma?
- 11) Escreva o módulo, a direção e o sentido de $\vec{u} + \vec{v}$, usando o ícone *Comentários*.
- 12) Agora, construa ao lado de \vec{w} , um vetor de mesmo sentido que ele, mas módulo maior. Chame-o de \vec{t} .
- 13) Repita os procedimentos 4, 6, 7, 8, 9, 10, e 11, mas somando \vec{v} com \vec{u} e usando o vetor \vec{t} para a primeira translação, e não mais o \vec{w} .
- 14) Modifique a cor de $\vec{v} + \vec{u}$. Escreva o módulo, a direção e o sentido de $\vec{v} + \vec{u}$.
- 15) O que você pode conjecturar sobre a comutatividade na adição de vetores? Use o software para mostrar a sua conjectura.
- 16) Você poderia estabelecer alguma relação acerca dos módulos de \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} + \vec{v}$? E dos sentidos? E das direções?

3.2.

- 1) Repita a atividade 1, sendo \vec{u} e \vec{v} colineares de mesmo sentido.
- 2) Repita a atividade 1, sendo \vec{u} e \vec{v} colineares de sentidos contrários.
- 3) Discuta com seus colegas que conclusões você tirou. Registre-as.

OBJETIVOS:

- Observar e concluir a lógica operatória da soma de vetores.
- Verificar a propriedade comutativa na adição de vetores.
- Verificar as relações entre módulos, direções e sentidos dados dois vetores e sua soma.

Atividade 1: Vetor soma ($\vec{u} + \vec{v}$) é a diagonal do paralelogramo e $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Atividade 2.1: Vetor soma ($\vec{u} + \vec{v}$) tem a mesma direção e sentido de \vec{u} e \vec{v} e $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Atividade 2.2: Vetor soma ($\vec{u} + \vec{v}$) tem a mesma direção e sentido do vetor de maior módulo e $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$

Ainda serão apresentadas e/ou expostas outras atividades cujos objetivos serão: mostrar que as propriedades válidas para adição de números reais também são válidas para adição de vetores; verificar que o ponto médio de um vetor é a média aritmética da origem e extremidade do mesmo; mostrar que a figura formada pelos pontos médios do paralelogramo é um paralelogramo; mostrar que a interseção e o ponto médio das diagonais de um paralelogramo são coincidentes; mostrar as propriedades de produto por um escalar; observar as posições relativas entre duas retas no \mathbb{R}^2 e relacioná-las às suas equações, destacando o significado geométrico de um sistema de equações.

4. CONCLUSÕES

A nossa proposta curricular ainda está em fase experimental, entretanto é de extrema importância que seja ouvida e observada pela comunidade docente para que possa ser aprimorada e garantir um espaço significativo no currículo atual da Matemática, pois, ao buscar benefícios para o processo ensino-aprendizagem, correlacionamos os assuntos equivalentes da Geometria Analítica no Ensino Médio.

As atividades propostas dão margens a muitas observações, proporcionando discussões entre professor e alunos. Isso auxilia os alunos a tirarem suas próprias conclusões

no que diz respeito ao conteúdo matemático de cada atividade, ajudando a desenvolver neles um espírito lógico e crítico, além da visão que a geometria dinâmica oferece, fazendo um elo de fatos reais com a Matemática, o que, para o aluno, é um fator de desconforto quando tal processo não se dá.

Quanto à disposição e ao objetivo das atividades, temos absoluta certeza de que não abrangemos todas as situações referentes aos vetores, entretanto, as propostas proporcionam a criação de outras atividades que complementam estas iniciais.

“A Matemática ensina-se ouvindo e aprende-se falando.” (Roberto Baldino)

5. BIBLIOGRAFIA

- STEINBRUCH, A. & WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 1987.
- VALLADARES, R. J.C. **Geometria Analítica do Plano e do Espaço**. 1 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1990.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília, 1999.