

## QUAL GEOMETRIA ENSINAR?

José Carlos Pinto Leivas<sup>1</sup>

### Resumo

O minicurso busca discutir qual geometria continua a ser ensinada, tanto na escola básica, quanto nos cursos de formação de professores. A partir do que seja um sistema axiomático para a geometria, analisa-se, através da história, o que caracteriza um sistema consistente através de modelos e constroem-se alguns modelos de geometria de forma elementar e compreensível a um estudante da escola básica. Utilizando construções com régua e compasso, discute-se o conceito de ângulo, compara-se este conceito em cada modelo e enuncia-se alguns teoremas comuns e outros específicos. Discute-se que geometria a escola básica pode utilizar, bem como sua contribuição para a formação do aluno como cidadão a enfrentar novos desafios.

Palavras-chave: Modelos de geometria, construções geométricas, ângulos.

A geometria e a lógica têm forte ligação no que diz respeito à axiomatização, sendo talvez o exemplo mais característico de axiomatização que tem sido utilizado por professores e estudantes de matemática, senão o único, como se isto não ocorresse com outros ramos da matemática como, por exemplo, a axiomatização de Peano para a construção do conjunto dos números naturais, em geral não explorada e nem sequer nomeada. A geometria, quando utilizada na escola básica, é essencialmente euclidiana ou hilbertiana. No entanto, a evolução histórica e as mudanças de concepções, na maioria das vezes, não são discutidas nem com os professores em formação.

A história aponta que Euclides definiu ponto e reta da seguinte forma:

- Ponto é o que não tem partes.
- Reta é um comprimento sem medida.

---

<sup>1</sup> Universidade Luterana do Brasil – Campus Canoas – SBEM – leivasjc@yahoo.com.br; leivasjc@terra.com.br

A partir disso, faz sua axiomatização inicial através de cinco axiomas ou postulados. Em função de que somente com cinco axiomas é impossível construir a geometria, Euclides empregou outros axiomas e postulados em suas demonstrações. É a partir de Hilbert [1862-1943] que se elabora o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana. Em geral, nos cursos de geometria isto não é mencionado e nem discutido, pois a partir dali aparecem o ponto, a reta e o plano como termos não definidos e as seguintes relações não definidas:

incidência; pertencer a; pertencer entre; congruência; paralelismo; e continuidade;

e cinco conjuntos de axiomas:

incidência; ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

A Geometria de Lobachevski [1793-1856] foi apresentada em 1835 através de novos princípios de geometria, onde consta, não uma equivalência com a axiomática de Euclides, mas uma contradição quanto ao quinto postulado. Segundo EFÍMOV [1984], para Lobachevski:

Existe uma reta  $a$  e um ponto  $A$  que não lhe pertence, tais que por  $A$  passam não menos de duas retas que não cortam  $a$  e estão em um mesmo plano com ela.

Este axioma, junto aos demais da Geometria Euclidiana, constituem a **Geometria de Lobachevski**.

Um sistema matemático é uma linguagem apropriada para analisar certos tipos de problemas de forma abstrata. É consistente quando não apresenta contradições. Segundo BARBOSA [1970], um sistema matemático possui as seguintes características:

linguagem subjacente; conjunto de palavras não definidas; conjunto de axiomas ou postulados; conjunto de teoremas; sistema lógico dedutivo.

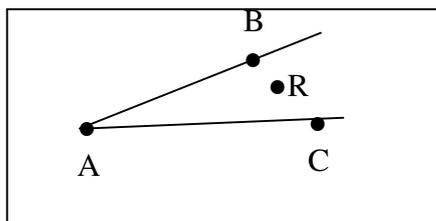
O mesmo autor ainda diz que “qualquer interpretação coerente com os axiomas constitui um **modelo** do sistema”.

Neste trabalho aborda-se modelos de geometria lobachevskiana e de geometria riemanniana. A partir destes (desses) modelos discute-se e compara-se o conceito de ângulo. Segundo

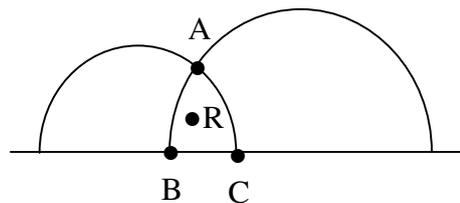
REZENDE [2000], para Euclides “ângulo é a inclinação recíproca de duas retas que num mesmo plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento”, uma vez que admitia ângulo raso definido como retilíneo e cujos lados estão na mesma linha reta. Sabe-se que desde os filósofos gregos havia discussão quanto às considerações sobre ângulo, sendo categorizado por Aristóteles como:

quantidade; qualidade e relação.

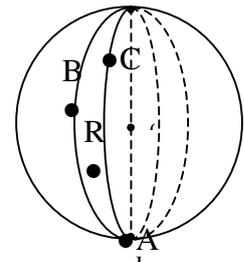
No entanto, Proclus diz ser uma combinação das três categorias, pois necessita da quantidade envolvida na magnitude; qualidade que é dada pela forma e relação que existe entre as retas e os planos que o limitam. Atualmente, a definição mais utilizada de ângulo é a de ser um conjunto de pontos. A partir deste conceito, estabelece-se neste trabalho comparação entre ângulos nos diversos modelos para discutir o teorema do ângulo externo, que será de grande utilidade para elencar alguns teoremas comuns e outros não comuns aos modelos.



Geometria Euclidiana



Geometria Lobachevskiana



Geometria Riemanniana

## Metodologia

Utiliza-se uma metodologia construtivista para ilustrar a axiomatização de geometrias euclidiana, lobachevskiana e riemanniana, por meio de construções com régua e compasso.

## Referências bibliográficas

BARBOSA, Ruy Madsen. **Elementos de Lógica aplicada ao ensino secundário**. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1970.

EFÍMOV, N.V. **Geometria Superior**. Traducion al español. Editorial Mir, 1984

REZENDE, Eliane Q.F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.