SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES ESPECIAIS

Lucilene Baccon[1]
Fabricia Marques Ferreira[2]
Claus Haetinger[3]

RESUMO

Este relato de experiência baseia-se num trabalho desenvolvido na disciplina Matemática VI do curso de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, e que posteriormente aplicamos em algumas turmas do Ensino Médio de uma Escola Pública do Município de Arvorezinha-RS. Apresentamos uma técnica interessante e de fácil compreensão para resolver equações polinomiais, com resultados satisfatórios, tanto pelo envolvimento e pela aprendizagem dos estudantes quanto, sobretudo, pela motivação e interesse dos mesmos por conceitos algébricos.

PALAVRAS-CHAVE: Experiência Didática; Polinômios; Equações Recíprocas.

INTRODUÇÃO

Considerando que, em geral, a abordagem de conceitos algébricos em sala de aula é considerada monótona pelo fato do professor utilizar uma metodologia muito complexa na visão do aluno, este simplesmente reproduz o que lhe é proposto, desmotivando-se.

Realizamos pesquisas bibliográficas e estudos para encontrar técnicas interessantes e de fácil compreensão envolvendo esses conceitos, mais especificamente para resolução de equações polinomiais, a fim de tornar as aulas mais prazerosas e desafiadoras, desenvolvendo uma aprendizagem mais significativa para os alunos.

Uma das técnicas encontradas denomina-se "Soluções de Equações Especiais". Esta técnica ilustra algumas maneiras pelas quais as Equações Recíprocas (ER, por brevidade) podem estimular a curiosidade de todos aqueles que se interessam por resolução de equações

---

1 Acadêmica do curso de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, Centro III, bolsista de Iniciação Científica da FAPERGS, e-mail: baccon@msbnet.com.br
2 Acadêmica do curso de Ciências Exatas do Centro Universitário UNIVATES, Centro III, bolsista de Iniciação Científica da FAPERGS, e-mail: fabriciaferreira@univates.br
3 Doutor em Matemática (Álgebra), Professor Titular da UNIVATES, Centro III, e-mail: chaet@univates.br, URL: http://ensino.univates.br/~chaet

polinomiais, desde o Ensino Médio até o Ensino Superior, onde se constituem num exemplo ilustrativo no estudo da Álgebra. Baseamo-nos em (GARBI, 1997, cap XX).

Inicialmente, desenvolvemos esta técnica em uma atividade proposta num projeto de iniciação científica do qual as duas co-autoras são integrantes com bolsa FAPERGS, orientadas pelo Prof. Dr. Claus Haetinger, em pesquisa integrante do Grupo de Pesquisa "Álgebra: teoria, ensino, usos e aplicações", certificado no CNPq. Num segundo momento, esta proposta foi apresentada a alunos de graduação na disciplina de Matemática VI do curso de Ciências Exatas da UNIVATES, no semestre B/2005. Posteriormente, aplicamo-la em algumas turmas de uma Escola de Ensino Médio no Município de Arvorezinha-RS.

METODOLOGIA

A técnica desenvolvida baseia-se num estudo de equações polinomiais, onde qualquer equação do 1º, 2º, 3º e 4º graus, pode ser resolvida algebricamente, ou seja, pode ter suas raízes expressas por meio de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação aplicadas a seus coeficientes.

Como regra geral, as equações acima do 4º grau não podem ser resolvidas algebricamente.

Dada uma equação genérica de grau acima do 4º, somente conhecimentos de álgebra Superior, especificamente de Teoria dos Grupos, permitem saber se ela é ou não resolúvel algebricamente. (Em casos particulares pode-se sabê-lo sem recorrer à Teoria dos Grupos).

Métodos aproximados (algébricos e não algébricos), conhecidos como métodos numéricos, existem para aplicação nos casos em que os algébricos exatos não são utilizáveis. Os de Newton são dois deles. Entretanto, existe uma infinidade de casos particulares em que isso é possível, independentemente do grau da equação. Este trabalho baseia-se num estudo particular de equações resolúveis algebricamente, ditas "Equações Recíprocas", segundo (GARBI, 1997, cap XX).

Uma equação é dita recíproca quando for igual a sua transformada recíproca, e isto, em outras palavras, significa que se x é uma de suas raízes 1/x também o será.

Exemplo: $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 1 = 0$, cuja transformada recíproca é

$$(1/y)^4 - 3(1/y)^3 + 7(1/y)^2 - 3(1/y) + 1 = 0$$

ou, $y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0$, que é a mesma equação da qual se partiu.

À primeira vista parece, então, que nas equações recíprocas os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos devem ser iguais, mas isto é apenas parte da verdade.

Seja a equação genérica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$

Sua transformada recíproca será $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Para que ambas sejam equivalentes, é necessário e suficiente que:

$a_0/a_n = a_1/a_{n-1} = a_2/a_{n-2} = ... = a_i/a_{n-i} = a_{n-2}/a_2 = a_{n-1}/a_1 = a_n/a_0 = k$

Ora, se

$a_0/a_n = a_n/a_0 = k$, $a_0^2 = a_n^2$, $a_0 = \pm a_n$ e $a_o / {}_na = \pm 1 = k$

Assim, também são recíprocas equações como $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$

Esta distinção permite, portanto, classificar as equações recíprocas em duas espécies:

K = 1 1ª espécie

Exemplos $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 3 = 0$ (grau par)

$7x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 7 = 0$ (grau ímpar)

k = -1 2ª espécie

Exemplos $6x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 9x^2 + 5x - 6 = 0$ (grau par)

$13x^7 - 16x^6 + 19x^5 - 29x^4 + 29x^3 - 19x^2 + 16x - 13 = 0$ (grau ímpar)

CONCLUSÕES E AÇÕES FUTURAS

Pelo desenvolvimento desta proposta, pudemos concluir que para resolver qualquer equação recíproca, passa-se por dois estágios:

1 – Divisões sucessivas por (x + 1) e (x – 1), pelo Algoritmo de Briot - Ruffini, até que sejam, separadas todas as raízes ±1.

2 – Resolução de uma recíproca de 1ª espécie e grau par.

Esta técnica permite resolver equações deste tipo até o 8º grau, num exemplo em que as impossibilidades demonstradas por Abel e Galois valem para os casos gerais, mas admitem exceções.

Pudemos afirmar, também, que houve evolução conceitual e aprendizagem significativa por parte dos alunos, evidenciadas a partir da análise do enriquecimento dos mesmos, referente aos conceitos algébricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GARBI, G.G.; *O Romance das Equações Algébricas: A História da Álgebra.* São Paulo: Makron Books, (1997).

HEFEZ, A.; *Curso de Álgebra,* volume 1; Rio de Janeiro: Instituto da Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1993).