Questão 01

Terno pitagórico é a denominação para os três números inteiros que representam as medidas, com a mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo.

Um terno pitagórico pode ser gerado da seguinte forma:

- escolhem-se dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
- calcula-se a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujos numerador e denominador representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
- calcula-se a hipotenusa.

A) Utilizando o procedimento descrito, calcule as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números pares 4 e 6.

B) Considere **x** um número inteiro maior do que 1, e que (**x** $-$ 1) e (**x** + 1) representam dois pares ou dois ímpares consecutivos.

Demonstre que esses dois números geram um terno pitagórico.

Questão 02

O poliedro acima, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo.

Admita que esse dado seja perfeitamente equilibrado e que, ao ser lançado, cada face tenha a mesma probabilidade de ser sorteada.

Calcule:

A) a probabilidade de obter um número primo ou múltiplo de 5, ao lançar esse dado uma única vez;

B) o número de vértices do poliedro.

Questão 03

Um campeonato de futebol será disputado por 20 times, dos quais quatro são do Rio de Janeiro, nas condições abaixo:

I - cada time jogará uma única vez com cada um dos outros;

II - todos farão apenas um jogo por semana;

III - os jogos serão sorteados aleatoriamente.

Calcule:

A) o menor número de semanas que devem ser usadas para realizar todos os jogos do campeonato;

B) a probabilidade de o primeiro jogo sorteado ser composto por duas equipes cariocas.

Questão 04

O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga.

A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por ϕ.

A) Sabendo que ϕ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de ϕ.

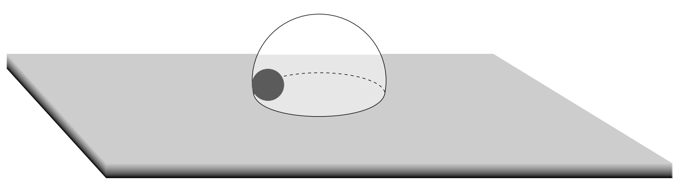
B) Observe as implicações abaixo.

$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi^3 = \phi^2 + \phi \quad \Rightarrow \quad \phi^3 = 2\phi + 1 \\ \phi^4 = \phi^3 + \phi^2 \Rightarrow \quad \phi^4 = 3\phi + 2 \end{cases}$$

Determine todas as raízes complexas da equação $x^4 = 3x + 2$.

Questão 05

Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

A) a maior área, em cm^2, pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;

B) o volume, em cm^3, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

Questão 06

Em uma cidade, a população que vive nos subúrbios é dez vezes a que vive nas favelas. A primeira, porém, cresce 2% ao ano, enquanto a segunda cresce 15% ao ano.

Admita que essas taxas de crescimento permaneçam constantes nos próximos anos.

A) Se a população que vive nas favelas e nos subúrbios hoje é igual a 12,1 milhões de habitantes, calcule o número de habitantes das favelas daqui a um ano.

B) Essas duas populações serão iguais após um determinado tempo **t** , medido em anos.

Se $\mathbf{t = \dfrac{1}{\log x}}$, determine o valor de **x.**

Questão 07

			n	
	65			
				130
		75		
0				

A figura acima apresenta 25 retângulos. Observe que quatro desses retângulos contêm números e um deles, a letra **n**.

Podem ser escritos, em todos os outros retângulos, números inteiros positivos, de modo que, em cada linha e em cada coluna, sejam formadas progressões aritméticas de cinco termos.

Calcule:

A) a soma dos elementos da quarta linha da figura;

B) o número que deve ser escrito no lugar de **n**.

Questão 08

João desenhou um mapa do quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem O na base de uma mangueira, e os eixos OX e OY com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto **(x, y)**, nesse sistema, é a representação de um número complexo $z = x + iy$, $x \in IR$, $y \in IR$ e $i^2 = -1$.

Para indicar a posição **(x_1, y_1)** e a distância **d** do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa:

$$\boxed{x_1 + iy_1 = (1+i)^9}$$

Calcule:

A) as coordenadas **(x_1, y_1)**;

B) o valor de **d**.

Questão 09

Alguns cálculos matemáticos ficam mais simples quando usamos identidades, tais como:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

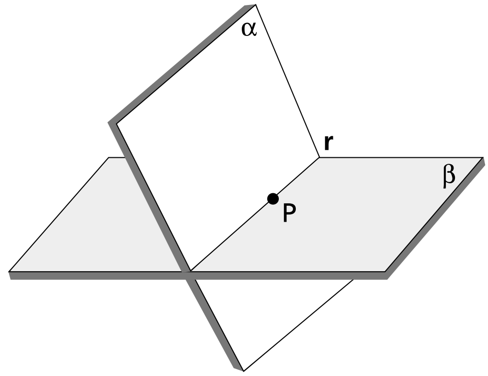
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Considerando essas identidades, calcule os valores numéricos racionais mais simples das expressões:

A) $(57,62)^2 - (42,38)^2$;

B) $\cos^6 15° + \operatorname{sen}^6 15°$.

Questão 10



Os planos secantes α e β acima podem representar em IR^3 as equações $\begin{cases} \mathbf{2x - y - 4z = -1} \\ \mathbf{x + y + z = 4} \end{cases}$

A interseção desses planos é uma reta **r** que passa por um ponto P (x, y, z).

Determine:

A) as coordenadas de P, considerando z = 0;

B) um vetor unitário paralelo à reta **r**.