Winmat (em português)

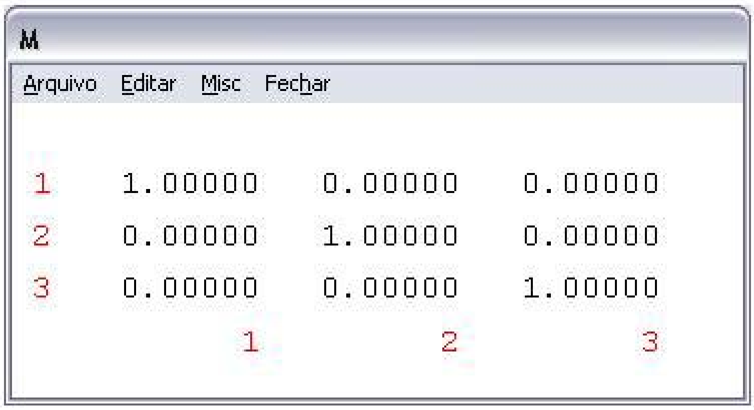
08/07/2004

Material elaborado por Mauri C. Nascimento – Dep. Matemática/UNESP/Bauru

Este programa é de uso livre e pode ser obtido no endereço **http://math.exeter.edu/rparris**

Ao iniciar o programa winmat, abre-se a janela:

Para entrar com uma matriz, acione Matriz e Nova (ou Ctrl+N), na barra de menu do Winmat. Ao fazer isso, abre-se uma janela onde se escolhe a dimensão e o tipo de matriz (nula, aleatória, diagonal, linhas de probabilidade ou colunas de probabilidade). Acionando o botão “criar”, a matriz aparecerá. Se você quiser uma matriz particular, escolha qualquer tipo e troque os elementos a_{ij} da matriz usando o botão esquerdo (para trocar somente um elemento) ou direito (para trocar todos os elementos) do mouse e acione a tecla “Enter” no teclado para realizar as trocas.



Na parte superior da janela “nova matriz” aparece escrito “nova matriz [real]”. Isto significa que a matriz a ser criada é uma matriz com elementos reais. É possível entrar com matrizes com elementos inteiros ou complexos. Para isso acione, na barra de menu do Winmat, “Matriz, Modo”.

Comandos da barra de menu do Winmat:

Matriz

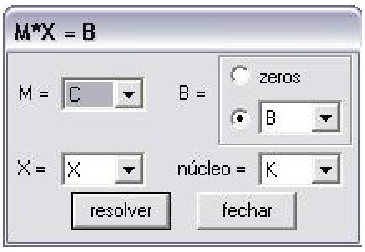
Nova: para entrar com uma matriz
Abrir: para abrir uma matriz salva anteriormente
Colar: veja ajuda
Modo: para escolher o tipo de elementos da matriz (reais, inteiros, complexos)
Rotação 2D: matriz de rotação do plano
Rotação 3D: matriz de rotação do espaço
Refletir | Projetar: matriz para projeção e reflexão
Fundo Branco: para que a cor de fundo da matriz seja branca
Ajuda: Ajuda para este item de menu

Calc

Uma matriz: informações sobre a matriz (posto, traço, determinante, polinômio característico com suas raízes)

Calcular: operações com matrizes: por exemplo, AB–2C+B^2,1/A ou A^(-1) para a inversa de A, A’ para a transposta de A, A|B para justapor as matrizes A e B (veja ajuda).

Resolver: para resolver um sistema de equações lineares na forma matricial MX = B, onde B é uma matriz coluna. Fornece também uma base para o espaço das soluções do sistema homogêneo (núcleo=).



Prog Linear: para maximizar ou minimizar funções lineares definidas em regiões convexas, descritas por desigualdades lineares

Forma Escalonada: abre uma caixa de diálogo que permite você levar uma matriz "passo a passo" à forma escalonada por linhas

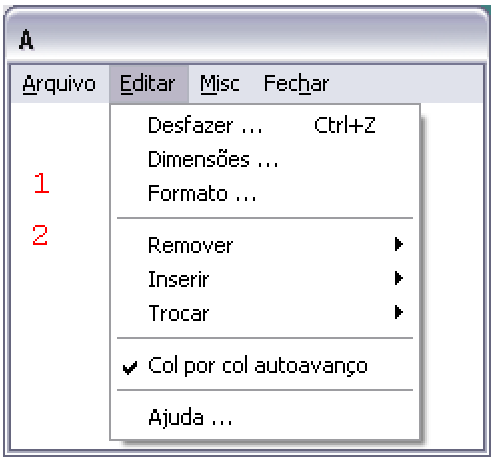
Oper Linha/Coluna: para realizar operações elementares sobre linhas e colunas

Ver: Acionando “Fechar” na janela de uma matriz, ela desaparece da tela. Para voltar a ver a matriz acione “Ver” e em seguida, a letra que designa a matriz

<u>Comandos da barra de menu da matriz:</u>

Arquivo: Para salvar a matriz, como matriz (salvar ou salvar como), como texto (texto externo) ou .tex (TeXto matriz)

Editar



Desfazer: desfaz as últimas operações
Dimensões: para mudar as dimensões da matriz
Formato: para definir o formato, sendo que “espessura do campo” define o espaço destinado a cada elemento (a_{ij}) e “num decimais” define o número de casas decimais depois da vírgula
Remover: linhas ou colunas
Inserir: linhas ou colunas
Trocar: linhas ou colunas
Col por col autoavanço: para entrar com os elementos por colunas (clicando com o botão direito do mouse). Caso contrário, a entrada dos elementos será realizada por linhas.

Misc

Fonte: escolher o tipo de fonte
Hífen do menos: para aumentar o “sinal de menos”
Cor do bordo: para alterar a "cor dos índices do bordo"
Notas: para digitar notas suplementares sobre uma dada matriz. De início é mostrada apenas a descrição de sua criação.
Fechar: Para a janela da matriz desaparecer da tela.

Exercícios

1) Para A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

a) encontre o determinante de A
b) encontre o determinante de A^t, onde A^t é a transposta da matriz A, e compare com o determinante de A. O que você observou? Existe alguma propriedade a respeito do que foi observado?
c) encontre a matriz inversa de A e verifique que $AA^{-1}=I$ (matriz identidade)
d) encontre $A+A^t$. A soma $A+A^t$ resulta sempre numa matriz simétrica? Porque?
e) encontre $3A^{-1}+2A^3$
f) encontre C 5×5 tal que $AC=A^t$
g) verifique que $CA\neq A^t$. Porque não ocorreu igualdade?
h) encontre D 5×5 tal que $DA=A^t$

2) Para A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 56 \\ -6 & -34 & 133 \\ 32 & 42 & 2 \end{bmatrix}$ e C=$\begin{bmatrix} 9 & -1 & 62 \\ 5 & -23 & 144 \\ 40 & 50 & 10 \end{bmatrix}$

a) encontre uma matriz X 3×3 tal que $AX-B=C^2$
b) verifique que $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$. Porque vale a igualdade?
c) verifique que $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$. Porque não vale a igualdade?
d) compare det(AB) com det(A)det(B).
e) compare $\det(A^{-1})$ com det(A)
f) existe alguma propriedade que diz respeito aos ítens c) e d) acima?

3) Verifique as propriedades de determinantes construindo exemplos
a) Se A é matriz quadrada com uma linha (ou coluna) de zeros então det(A)=0.
b) Se A é uma matriz com duas linhas (ou colunas) iguais então det(A)=0.
c) Se A é uma matriz triangular (A tem somente zeros acima ou abaixo da diagonal principal) então det(A) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
d) Permutando-se duas linhas (ou colunas) de uma matriz, seu determinante muda de sinal.
e) Se B é uma matriz quadrada obtida de A pela multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por um número k, então det(B)=kdet(A).
f) Somando-se uma linha (ou coluna) um múltiplo de outra linha (ou coluna) de uma matriz A, seu determinante não se altera.
g) A é invertível se, e somente se, det(A)≠0.

Operações elementares sobre linhas.
São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz:
a) permuta de linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$
b) multiplicação de uma linha por um número: troca de L_i por kL_i
c) troca da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha: troca de L_i por L_i+kL_j
Uma matriz elementar é uma matriz obtida de uma matriz identidade I, a partir de uma única operação elementar sobre linhas de I.

Por exemplo, E= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida da matriz identidade, permutando-se a 1ª linha com a 2ª Sejam A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e seja B a matriz obtida de A, permutando-se também a 1ª linha com a 2ª, isto é, B= $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Verifique que B=EA. Faça C=AE. Que relação existe entre A e C?

Sejam A uma matriz n×n e seja I_n a matriz identidade n×n. Denotando por e uma operação elementar sobre linhas, verifique, a partir de exemplos, a propriedade $e(A)=e(I_n)A$. Assim, uma operação elementar sobre as linhas de A eqüivale ao produto de uma matriz elementar (obtida pela mesma operação sobre as linhas de I_n) por A.

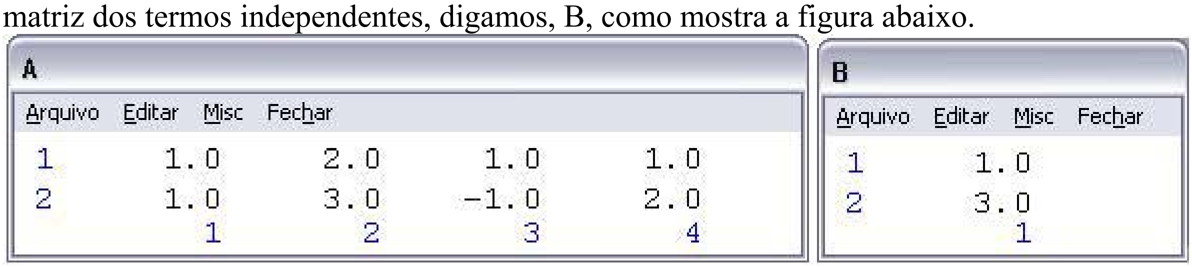
Por exemplo, se e denota a operação de multiplicação da 2ª. linha por –5, tomando A= $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, então $e(I_2)$= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, e(A)= $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -15 & 20 \end{bmatrix}$. Verifique que o produto de $e(I_2)$ por A resulta em e(A). O que acontece com o produto de A por $e(I_2)$?

Resolvendo um sistema de equações lineares

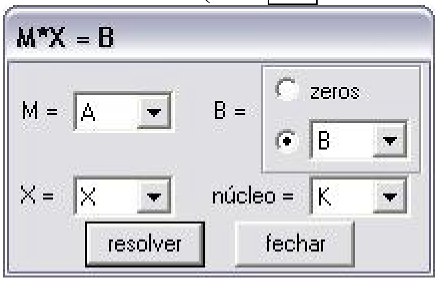
O sistema $\begin{cases} x + 2y + z + w = 1 \\ x + 3y - z + 2w = 3 \end{cases}$ tem a forma matricial abaixo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos coeficientes}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\text{Matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos termos independentes}}$$

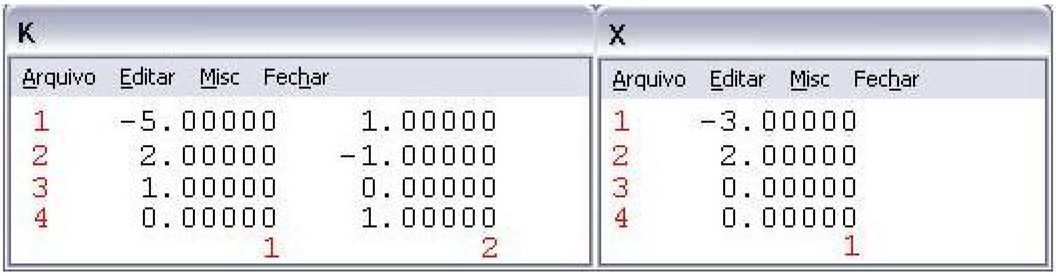
Para resolver o sistema precisamos entrar com a matriz dos coeficientes, digamos A, e com a matriz dos termos independentes, digamos, B, como mostra a figura abaixo.



Para encontrar as soluções, acione "Calc" e "Resolver", na barra de menu do winmat. Note que, na figura acima, foram designadas as letras A, para a matriz dos coeficientes e B para a matriz dos termos independentes. Assim, na janela que se abre, coloque as letras A na caixa M = $\boxed{\text{A}\;\;}$ e B na caixa B= $\boxed{\text{B}\;\;}$, nomeie as matrizes de saída (X = $\boxed{\text{X}\;\;}$ e núcleo = $\boxed{\text{K}\;\;}$) como na figura a seguir



Acionando o botão "resolver", aparecerão duas novas matrizes: uma matriz K, fornece os "geradores" que, juntamente com a matriz solução X, vão compor a forma geral das soluções do sistema.



Solução geral do sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, as soluções do sistema são obtidas atribuindo-se valores para λ_1 e λ_2. Por exemplo, para λ_1=1 e λ_2=–3, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, ou seja x = 1, y = 7, z = 1 e w = –3 é uma solução para o sistema.

Exercício. Encontre a solução geral de cada sistema

1) $\begin{cases} x - y + 2z + w - t = 2 \\ x + 3z - 2w - 2t = 0 \\ 3x - 2y + 7z + 3w - 4t = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - z = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 5 \end{cases}$

Autovalores e autovetores

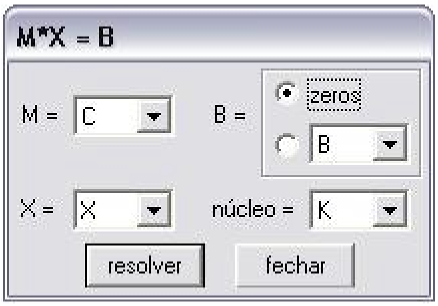
Inicie com a matriz quadrada A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Acionando “Calc”, “Uma matriz” e “A” na barra de menu do Winmat, abre-se uma janela com as informações:

posto: 3
traço: -2.000
determinante: -4.000
polinômio característico
----
grau coeficiente
 3:    1.000
 2:    2.000
 1:   -7.000
 0:    4.000
raízes
1.000 (multiplicidade 2)
-4.000 (multiplicidade 1)

que significa que o polinômio característico de A é dado por $p(x)=x^3+2x^2-7x+4$ e que suas raízes são iguais a 1 e –4, que são justamente os autovalores de A.

Para encontrar os autovetores associados a um autovalor λ, é necessário encontrar as soluções do sistema $(A-\lambda I)X=0$, onde I é a matriz identidade (no caso, 3x3).

Para $\lambda=1$. Precisamos da matriz identidade 3x3. Para isso, acione “Matriz”, “Nova” e escolha a opção “valor diagonal” com valor 1, para obter a matriz identidade 3x3 designada, digamos por B. Acione “Calc” e “Calcular”, na barra de menu do winmat defina a matriz C=A–B (isto é, $C=A-\lambda I$, pois $\lambda=1$ e I=B). Acione “Calc” e “Resolver” fazendo M=C e B=”zeros”, como mostra a figura abaixo.



Acionando o botão “resolver”, o resutado será uma matriz K com duas colunas V=$\begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$ e , W=$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$, que são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 1, ou seja, AV=1V=V e AW=1W=W (verifique).

Para $\lambda=-4$, proceda como no caso anterior, considerando B a matriz identidade 3x3. Acionando “Calc” e “Resolver” na barra de menu do Winmat, faça C=A+4B (isto é, $C=A-\lambda I$, pois $\lambda=-4$ e I=B). Acionando “resolver”, fazendo M=C e B=”zeros”, obtém-se o vetor U=$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, que é um autovetor associado ao autovalor –4, ou seja, AU=–4U (verifique).