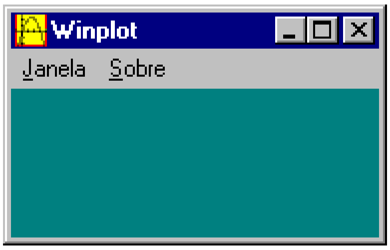
ATIVIDADES USANDO O WINPLOT 2–dim em Portugês (19/09/2003)

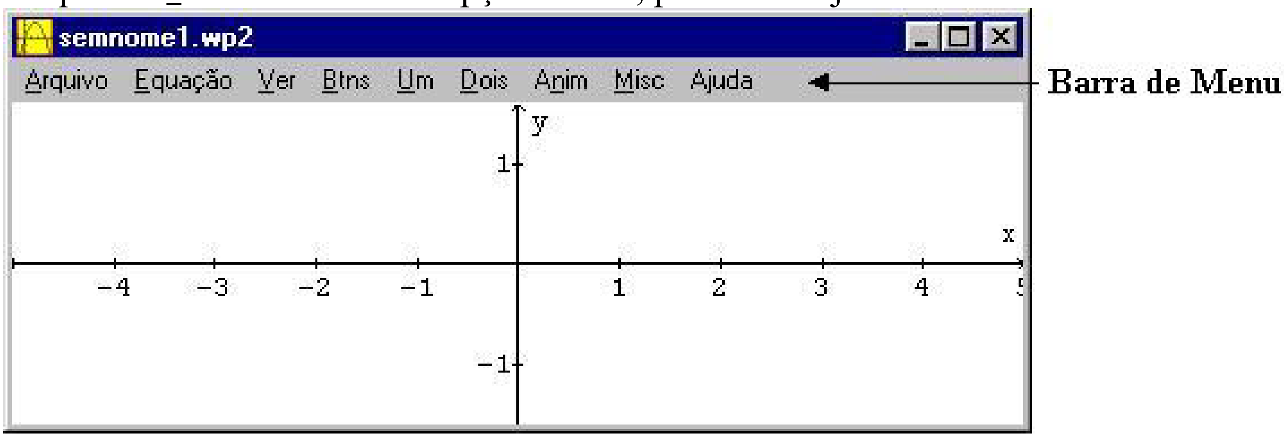
Mauri C. Nascimento – Dep. Matemática – Unesp/Bauru
mauri@fc.unesp.br

O programa winplot é de uso livre e pode ser encontrado no endereço
http://math.exeter.edu/rparris

O programa inicia abrindo a janela:



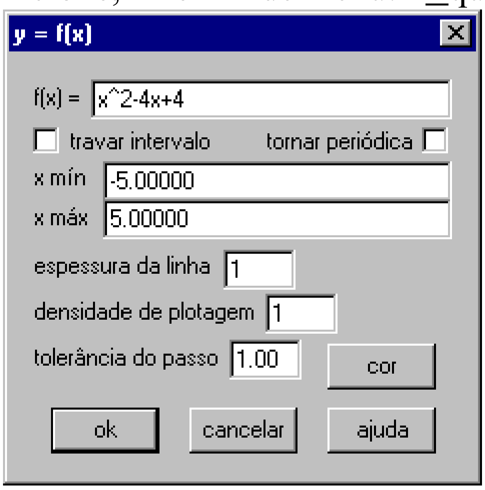
Clique em Janela e escolha a opção 2–dim, para abrir a janela abaixo:



Para colocar um ponto na tela acione Equação, Ponto, (x,y)... e entre com as coordenadas do ponto. A opção “tamanho do ponto” define o “tamanho” do ponto e as opções “sólido ... círculo” definem a forma de mostrar o ponto: “cheio” ou “oco”. A opção “âncoras” coloca segmentos unindo o ponto às suas projeções nos eixos cartesianos.

ENTRANDO COM UMA EQUAÇÃO NA FORMA y=f(x)

Acione, na barra de menu: Equação, 1 Explícita..., para abrir a janela abaixo:

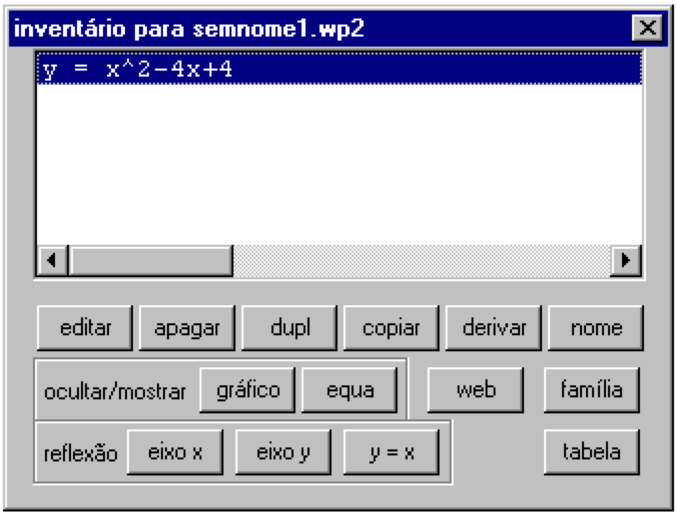


Coloque a equação que aparece na janela ao lado. Acione “ajuda” para conhecer as opções que aparecem na janela.

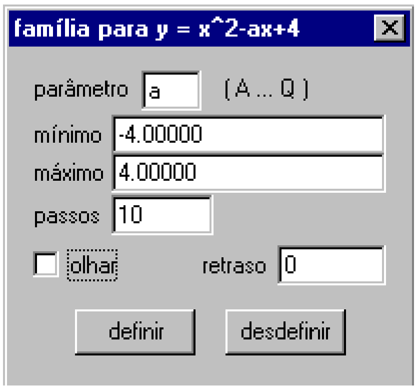
Coloque na tela os pontos (1,1) e (2,2). Qual deles está sobre o gráfico da parábola? Se a primeira coordenada do ponto for 3, qual deverá ser a segunda coordena para que o ponto esteja sobre o gráfico da parábola? Qual a condição para que um ponto esteja sobre o gráfico da parábola dada?

No winplot é possível colocar vários gráficos na mesma tela. Entre com as funções y=–3x+4 e y=sin(x) (para cada função é preciso repetir os passos Equação, 1 Explícita...

A janela a seguir (inventário), permite modificar o gráfico da equação selecionada:



editar: para fazer alterações na equação e/ou no gráfico (mudar a cor, etc...)
apagar: apaga a equação selecionada
dupl: duplica (podendo modificar) a equação selecionada
copiar: coloca a equação selecionada na área de transferência do windows
derivada: faz o gráfico da derivada
ocultar/mostrar: esconde ou mostra o gráfico (gráfico) ou a equação na tela (equa)
nome: coloca, na janela, um nome para a função
reflexão: para fazer a reflexão do gráfico em relação aos eixos x e y, ou à reta y=x
tabela: mostra tabela de pontos da equação
família: mostra a família de curvas quando se usa um parâmetro (letras de a a w). Por exemplo, entrando com a equação y=cx^2, selecionando esta equação na janela "inventário" e acionando o botão "família" aparecerá a seguinte janela:



Em "parâmetro" coloque a letra c (que aparece na equação)
Em "mínimo" e "máximo" coloque a variação que deseja para o parâmetro a (por exemplo, -5 e 5)
Em "passos" coloque o número de curvas da família (por exemplo, 10).
Acione o botão "definir" para visualizar a família de curvas. Para excluir a família de curvas, entre novamente nessa janela (selecionando a mesma curva, no caso, y=cx^2) e acione o botão desdefinir.

Quando a janela "inventário" não está visível, acione Equação e inventário na barra de menu que ela aparecerá.

COMO ESCREVER AS FUNÇÕES
Acione Equação e Biblioteca para verificar a sintaxe.

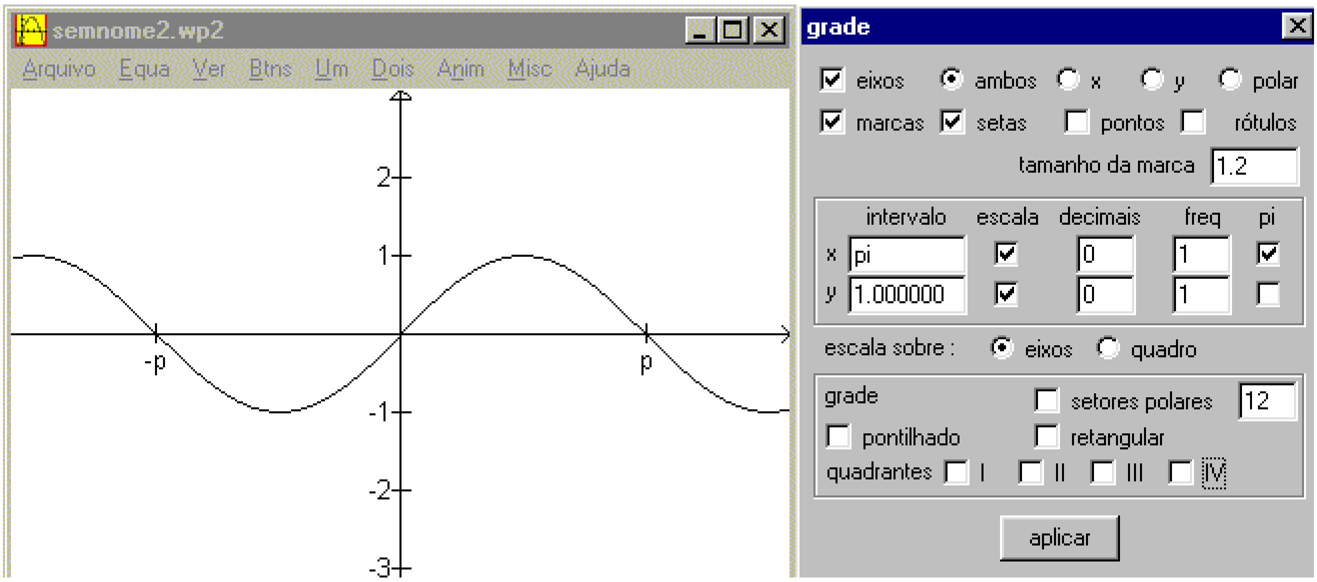
Por exemplo: sqr(x) significa raiz quadrada de x; root(n,x) = raiz n–ésima de x; sin(x) significa seno de x; exp(x) significa e^x.

Exercício: Faça os gráficos das funções tangente, valor absoluto de x, raiz cúbica de x, x elevado à quinta potência, sinal de x, exponencial , logaritmo natural, logaritmo na base 10, logaritmo na base 2, $y = \sqrt{x^2}$, etc., procurando sempre (em Equação, Biblioteca) a maneira correta de escrever estas funções.

CONFIGURANDO A TELA

Para visualizar, esconder ou configurar a aparência dos eixos acione Ver e Eixos

Acione, na barra de menu, Ver, Grade... para abrir a janela abaixo



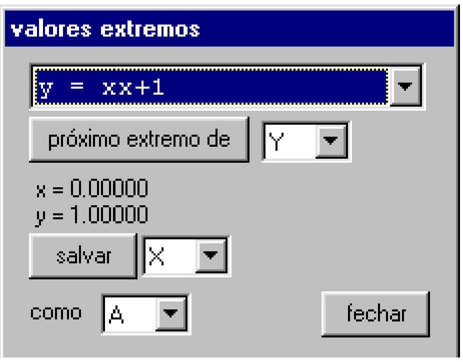
<u>eixos:</u> mostrar eixos cartesianos ou polar <u>marcas</u>: marcas nos eixos <u>setas</u>: seta nos eixos <u>pontos:</u> pontos do reticulado cartesiano <u>rótulos</u>: letras x e y nos eixos <u>tamanho da marca:</u> comprimento das marcas nos eixos <u>intervalo:</u> intervalo para as marcas nos eixos <u>escala</u>: para enumerar as marcas dos eixos <u>decimais:</u> número de casas decimais após a vírgula para a numeração dos eixos	<u>freq:</u> freqüência com que a numeração aparece nos eixos <u>pi:</u> para colocar a numeração em múltiplos de pi <u>grade</u>: grade polar ou retangular <u>escala sobre:</u> coloca a escala sobre o eixo ou nas laterais <u>grade:</u> para mostrar a grade retangular (nos quadrantes) ou polar <u>aplicar:</u> para aplicar alterações realizadas nesta janela

Exercício. Para a função y=3sin(x)cos(x), configure a tela para que a escala do eixo x seja formada por múltiplos de pi/4, a numeração neste eixo seja feitas em intervalos de pi. A escala no eixo y seja de 0,5 em 0,5, a numeração seja de 1,5 em 1,5, com uma casa decimais após a vírgula. Coloque os pontos do reticulado cartesiano de tamanho 1.

INTERSEÇÕES E EXTREMOS

Faça os gráficos das equações $y=x^2-1$ e $y=x^3-4x$.

Acione (na barra de menu) Um e Extremos... para vizualizar a janela a seguir



próximo extremo de: mostra outro extremo da função
x = e y = : mostram as coordenadas do extremo
Salvar X como A, faz com que o parâmetro A tome o valor atual de x (no caso, A toma o valor –4.7123...)
(Entre com a equação y=ax para verificar que a assumiu o valor de x

Para alterar o número de casas decimais após a vírgula, acione, na barra de menu, Misc e Decimais...

Do mesmo modo:
Acione Um e Zeros para encontrar as raízes da equação
Acione Dois e Interseções para encontrar os pontos de interseção de duas curvas

Exercícios.
1) Encontre as raízes e os extremos da curva dada por $y = x^4 – 5x^2 + 4$.
2) Encontre a interseção da curva $y = x^4 – 5x^2 + 4$ com a reta $y=x$.

BOTÕES DO MOUSE: "ZOOM" E TEXTO NA TELA
Acione Btns na barra de menu para selecionar:
Arrastar box LB recentr Zoom RB: Acione o botão direito do mouse para ampliar o local. Selecione um retângulo com o botão esquerdo acionado para ampliar essa área.
Texto: Acione o botão direito para digitar um texto para a tela
Acione o botão esquerdo para mover um texto na tela
coords XY LB recentr RB: O botão esquerdo do mouse exibe as coordenadas do ponto sob o ponteiro. O botão direito coloca o ponto sob o ponteiro do mouse no centro da tela.
Colar: O botão direito coloca o texto da área de transferência na tela.

Exercício. Encontre os pontos de interseção dos gráficos das funções seno e cosseno utilizando os botões do mouse. Configurar a tela para que a escala do eixo x seja formada por múltiplos de pi/2 e a numeração seja em intervalos de pi, e a escala do eixo y seja de 1 em 1.

******
FUNÇÃO IMPLÍCITA
Para a equação da circunferência $x^2+y^2=4$ podemos utilizar dois procedimentos:
1) y=sqr(4–x^2) e y=–sqr(4–x^2) para desenhar os arcos superior e inferior da circunferência.
2) No menu Equação, escolher a opção Implicita... e entrar com a equação x^2+y^2=4. Nesta opção de gráfico não é possível realizar alguns procedimentos como, por exemplo, encontrar extremos e interseções. Além disso, o traçado do gráfico fica mais lento.

Exercícios.

1)Traçar o gráfico da hipérbole $4x^2-y^2=2$. Traçar as assíntotas ($y=2x$ e $y=-2x$). Acione Ver, Ver, deixando o centro na origem ($x=0$ e $y=0$) e a extensão do eixo x igual a 50 (espessura=50). Os gráficos da hipérbole e das assíntotas vão parecer sobrepostos em alguma região. Verifique se os gráficos estão realmente sobrepostos (aplicando zoons nos locais).

2) Verifique experimentalmente que para qualquer equação com duas variáveis, de grau menor ou igual a 2, seu gráfico só pode representar:

i) $\varnothing$ ii) um ponto iii) uma reta iv) duas retas v) uma circunferência
vi) uma elipse vii) uma hipérbole viii) uma parábola

3) Encontre um exemplo de cada figura acima.

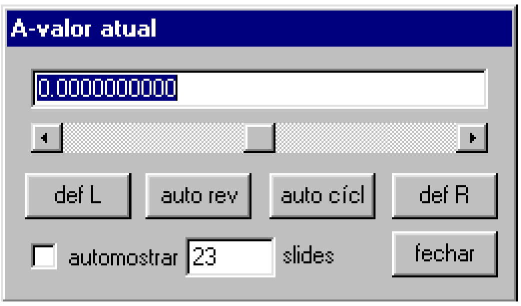
4) Pode uma equação de grau 2 (isto é, não ocorre a=b=c=0 na equação abaixo) representar uma reta? Encontre um exemplo ou prove que não.

Observação: uma equação de grau menor ou igual a 2 tem a seguinte representação:
$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ onde a, b, c, d, e, f são números reais que não são simultaneamente nulos.

ANIMAÇÃO

Numa equação, podemos utilizar letras (de A a W), chamadas parâmetros, em lugar de números e fazer variar tais parâmetros.

Por exemplo: entrando com a equação y = $\boxed{ax+b}$, podemos variar os parâmetros a e b, da seguinte forma: No menu Anim escolha a opção A para variar o parâmetro a.



Na barra de rolagem é feita a variação manual do parâmetro através do mouse

def I e def D definem o intervalo de variação do parâmetro a: escreva o limite inferior do intervalo e clique no botão "set L"; escreva o limite superior e clique no botão "set L"

auto rev e auto cícl fazem a variação automática no intervalo definido, indo e voltando ou indo até o final do intervalo e começando novamente do início. Para parar a animação acione a tecla Q (no teclado).

Exercício.

Faça o parâmetro a variar no intervalo [–5,5]; faça a animação na barra de rolagem, depois use "auto rev" (para parar a animação acione a tecla Q do teclado) e depois o "auto cícl" Depois acione o "família" na janela "inventário". Faça também a variação do parâmetro b no intervalo [–6,3]

Salve o seu trabalho em arquivo (Arquivo, Salvar como (dê um nome ao seu trabalho) e acione o botão "Salvar").

Exercícios.

1) Ponto percorrendo o gráfico. Entre com uma equação, por exemplo $y=x^2-3$. Entre com o ponto de coordenadas $x=a$; $y=a^2-3$. Faça a variação do parâmetro a. Escolha a variação de a para que o ponto não saia da tela.

2) Faça um ponto percorrer o gráfico da função $y=\sin(x)$.

TRANSLAÇÃO

Transladar um gráfico significa mudar sua posição no plano cartesiano, fazendo um deslocamento na horizontal e/ou na vertical. Para isso basta trocar, na equação em que se está trabalhando, x por (x+a) e/ou y por (y+b), onde a e b são números reais. Podemos tomar também "a" e "b" como parâmetros e fazer suas variações, como na atividade a seguir:

Para cada equação abaixo, verifique o que ocorre quando se varia o parâmetro a: o que muda e o que não muda no gráfico. Procure colocar um gráfico de cada vez na tela, para evitar que o computador fique muito lento e para observar melhor cada caso.

1) y=2(x+a)^2+3(x+a)+1 trocando x por x+a
2) y=2x^2+3x+1–a trocando y por y+a
3) y=sin(x+a) trocando x por x+a
4) y=sin(x)–a trocando y por y+a
5) (x+a)^2+(y+2a)^2=4 trocando x por x+a, trocando y para y+2a
6) Estas propriedades podem ser observadas para quaisquer outras funções (ex. $y=2^{(x+a)}$, $y=2^x+a$, y=ln(x+a), etc...)

Na atividade acima observamos que, trocando x por (x+a) ou y por (y+b), resulta numa translação do gráfico. Trocando x por ax ou y por ay observamos uma expansão ou contração do gráfico na horizontal ou vertical.

1) y = asin(x) para $0 \le a \le 5$ trocando y por $\frac{1}{a}y$
2) y = sin(ax) para $0 \le a \le 5$ trocando x por ax
3) $(ax)^2+y^2=4$ para $0 \le a \le 4$ trocando x por ax
4) $x^2+(ay)^2=4$ para $0 \le a \le 4$ trocando y por ay
5) y = ax + 2 para $0 \le a \le 5$ trocando x por ax
6) $y = ax^2$ para $0 \le a \le 2$ trocando x por ax
7) $y = (ax)^2$ para $0 \le a \le 2$ trocando y por $\frac{1}{a}y$
8) Estas propriedades podem ser observadas para quaisquer outras funções (ex. $y=2^{ax}$, $y=a2^x$, y=ln(ax), etc...)

ROTAÇÃO

A rotação de um ângulo θ em torno da origem de um gráfico no plano, se faz através da mudança de variável: x→xcos(θ)–ysin(θ) e y→ycos(θ)+xsin(θ)

Exemplo. Seja a reta de equação y=x+1. Para obter a rotação de um ângulo de π/2, basta fazer as substituições acima para obter a equação y=–1+x. Para fazer a rotação de um ângulo a genérico, fazendo as substituições, obtemos a equação y = (x(cos(a)–sin(a))+1)/(cos(a)+sin(a)). Fazendo a variação do parâmetro a, para 0<a<2*pi, obtemos a rotação da reta em torno da origem.

Faça a rotação da circunferência de centro no ponto (1,–2) e raio 1 em torno da origem.

PARAMETRIZAÇÃO

Parametrizar uma curva, significa expressar as variáveis x e y como funções de um parâmetro t.

Para expressar uma equação na forma parametrizada, no winplot , acione na barra de menu, Equação e a opção Paramétrica... . Na janela que se abre, coloque as equações para x e y em função de t. Preencha nas caixas “t min” e “t max”, a variação do parâmetro t. Exemplo. Seja $y=2x+1$. Fazendo $x=t$, obtemos $y=2t+1$. Note que só aparece a parte do gráfico no intervalo definido para t (experimente t variando de -1 a 1). Existem outras parametrizações para uma mesma curva. No caso da reta $y=2x+1$, fazendo $x=t^3$, obtemos $y=2t^3+1$. Fazendo $x=t^2$, obtemos $y=2t^2+1$. Neste caso, não temos uma boa parametrização, pois teremos sempre $x\geq 0$ e $y\geq 1$.

Exemplo. A circunferência de centro na origem e raio 1 tem equação $x^2+y^2=1$. Lembrando que $sen^2(t)+cos^2(t)=1$, fazendo $x=cos(t)$ e $y=sen(t)$, temos que $x^2+y^2=cos^2(t)+sen^2(t)=1$. Entre então com essas equações paramétricas para fazer o gráfico. Conseguiu o traçado da circunferência? Qual deve ser a variação do parâmetro t para se dar uma (única) volta completa no gráfico? Faça uma animação para que o ponto (cos(a),sen(a)) deslize sobre o gráfico da circunferência, dando uma única volta, iniciando com a=0.

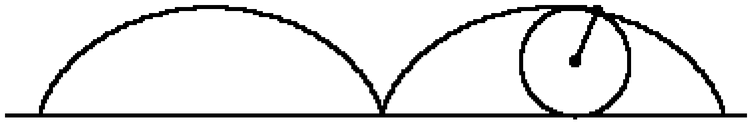
As equações paramétricas da reta que passa por dois pontos A e B podem ser obtidas da equação $(x,y)=tA+(1-t)B$. Note que, para t=0, obtém–se o ponto A e, para t=1, o ponto B. Para se obter o segmento com extremidades em A e B, basta fazer t variar no intervalo [0,1]. Usando este método, construa o segmento com extremidades nos pontos A=(1,2) e B=(−2,1)

Exercícios.

1) Faça a parametrização da circunferência de centro na origem e raio 3.
2) Faça a parametrização da circunferência de centro no ponto (1,–2), e raio 2.
3) Faça a parametrização das elipses (usando seno e cosseno) a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$ e

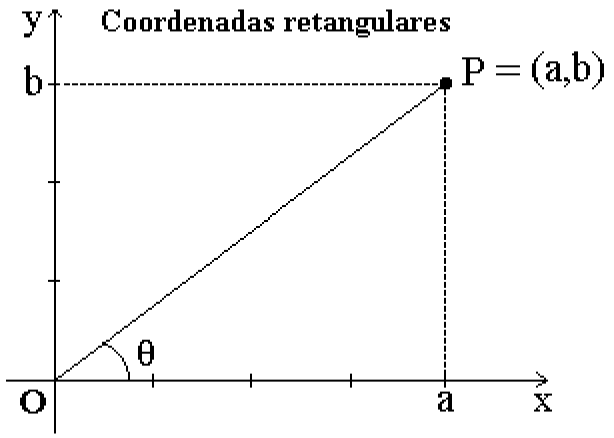
   b) $25x^2+9y^2=225$.
4) Dada a hipérbole de equação $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$, verifique graficamente e matematicamente, que $x=2cossec(t)$ e $y=\sqrt{6}\,cotg(t)$ é uma parametrização para ela.
5) Encontre uma parametrização para a hipérbole $y^2-x^2=9$.

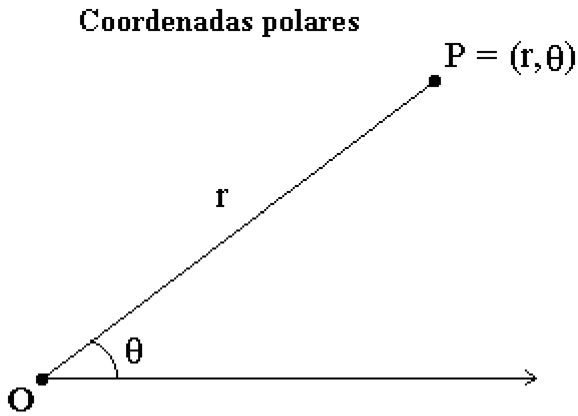
Imagine uma circunferência rolando sobre uma reta. Qual será a curva descrita por um ponto sobre a circunferência? A curva é chamada ciclóide e é dada na figura abaixo. Será interessante fazer a animação no winplot.



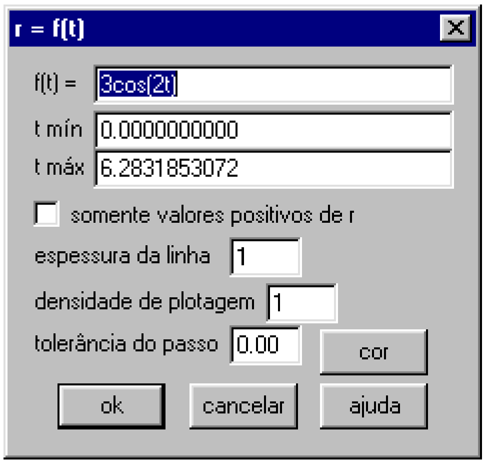
Ciclóide . . . . x = t-sin(t) ; y = 1-cos(t), $t \in [-2\pi, 2\pi]$
Circunferência . . . . 0 = (x-a)^2+(y-1)^2-1
Centro da circunferência . . . (a,1)
Ponto na circunferência . . . . (a-sin(a),1-cos(a))
Raio da circunferência . . . . x = a-sin(a)+tsin(a) ; y = 1-cos(a)+tcos(a), $t \in [0,1]$
Reta hotizontal . . . . y = 0
Faça o parâmetro a variar de -2π a 2π

COORDENADAS POLARES





Para entrar com gráficos em coordenadas polares acione Equação e Polar... .Na equação, t designa o ângulo que, em geral, é denotado por θ.



Aqui também, t mín e t máx indicam a variação do ângulo t.

A opção somente valores positivos de r mostra somente a parte do gráfico onde r não é negativo.

Exemplo. Para fazer a animação de um ponto sobre a curva $r=3\cos(2\theta)$, precisamos exprimir o ponto em coordenadas cartesianas (em Equação, Ponto...). Como $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\text{sen}(\theta)$, então entramos com x=3cos(2a)cos(a) e y=3cos(2a)sin(a). Fazendo a variação do parâmetro a no intervalo de 0 a 2*pi, podemos observar como o gráfico é traçado ao variar o ângulo, começando em zero e finalizando em 2π.

Atividades.

1) a) Entre com as equações r=3cos(2t), r=3cos(4t) e r=3cos(6t). Qual a relação entre os números que aparecem multiplicando t e os gráficos. Teste sua resposta para outros valores destes números.

b) No gráfico, o número 3 multiplicando o cosseno tem algum significado? Troque o 3 por alguns outros números e tente chegar a uma conclusão.

2) Faça como na atividade (1) para as equações r=4cos(t), r=4cos(3t) e r=4cos(5t).

3) Gráficos clássicos em coordenadas polares

a) r=3 b) r=t c) r=2cos(t) d) r=–3cos(t) e) r=2+2cos(t) f) r=2–2cos(t) g) r=2+4cos(t)

4) Na atividade anterior troque cosseno por seno.

5) Observe, graficamente, que as equações cartesiana 2x+3y=4 e polar r=4/(2cos(t)+3sin(t)) representam a mesma reta.

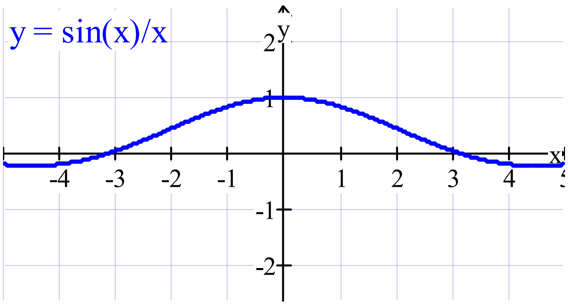
6) Em vista da atividade anterior, qual seria a equação polar da reta y=2x–5?

7) Tente generalizar as duas atividades anteriores para uma reta de equação y=ax+c. Verifique graficamente se sua teoria funciona.

APLICAÇÕES AO CÁLCULO DIFERENCIAL

1) Verificando <u>limites</u> através de gráficos.

Traçando o gráfico da função $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$, observamos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$:



Exercícios. Verifique se existem os seguintes limites:

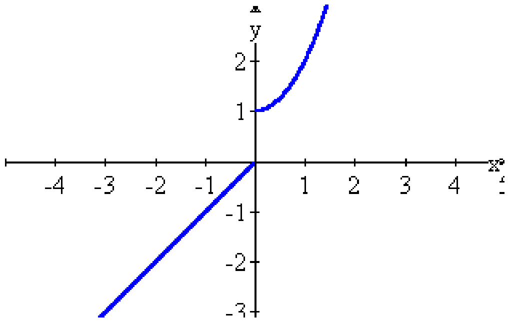
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-\mathbf{1}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ e) $\lim\limits_{x\to \pi/2} tg(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}[x \cdot \text{cossec}(x)]$ g) $\lim\limits_{x\to 0}[x \cdot \text{sen}(1/x)]$

2) Verificando a <u>continuidade</u> de funções

Exemplo. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

No menu <u>Equação</u>, acione a opção y=f(x) e entre com a equação y = join(x|0,x^2+1). Assim, visualizamos o gráfico abaixo e observamos que a função não é contínua em x=0, mas é contínua para todo x≠0



Exercícios. Verificar graficamente em que pontos as funções abaixo são contínuas:

a) $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{se\ x \le 1} \\ \boldsymbol{-x^2 + 4x - 2} & \boldsymbol{se\ x > 1} \end{cases}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ c) f(x) = |x|

d) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \le 1 \\ -x^2+2x+1 & se\ x > 1 \end{cases}$

3) Verificando a <u>derivada</u> de funções.

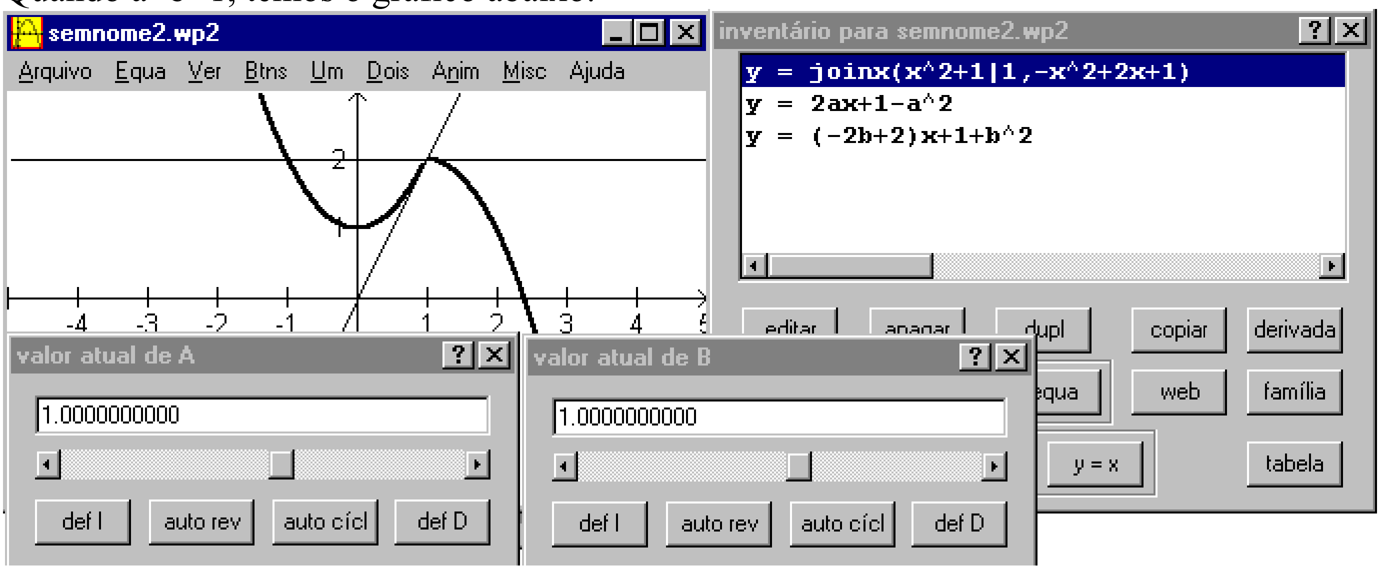
Exercício. Para a função f(x)=x^2

a) Trace a reta tangente em x=2.
b) Trace a reta tangente em x=a. Faça a variação de a no intervalo [–2,2]

Exercício. Repita o exemplo anterior para a função seno.

Exemplo. Verificar, graficamente, se a função $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \le 1 \\ -x^2+2x+1 & se\ x > 1 \end{cases}$ é diferenciável.

Faça a animação da reta tangente para o ramo do gráfico para x<1 usando o parâmetro a. Faça a animação da reta tangente para o ramo do gráfico x>1 usando o parâmetro b. Quando a=b=1, temos o gráfico abaixo.



Como as retas tangentes no ponto x=1 não coincidem, então a função não é diferenciável em x=1.

Exercícios. Encontre os pontos onde as funções abaixo não são diferenciáveis, traçando retas tangente.

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & se\ x\le 0 \\ x^2+2 & se\ x>0 \end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$ c) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x\le 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & se\ x\le 1 \\ 2x-1 & se\ x>1 \end{cases}$ e) $f(x) = |x-2|$ f) $f(x) = |x^2-2x|$

4) Fórmula da Taylor: Ajuste de curvas através de polinômios.

Seja f é uma função contínua, com derivadas de ordem n contínuas em um intervalo. Se c é um ponto interno desse intervalo, então o polinômio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

É chamado o polinômio de Taylor de grau n de f(x), no ponto c.

Exemplo. Seja f(x)=cos(x). Vamos determinar os polinômios de Taylor de graus 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de f(x) e verificar, em cada caso, a aproximação do gráfico de f(x) por esses polinômios.

$P_0(x) = P_1(x) = 1$; $P_2(x)= P_3(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$; $P_4(x)= P_5(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$;

$P_6(x) =1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}$.

Faça os gráficos (de f(x) e P_0. Troque P_0 por P_2 e depois, P_2 por P_4, e P_4 por P_6) e verifique o que ocorre sempre que tomamos um polinômio de Taylor de grau maior. Faça várias ampliações numa vizinhança do ponto (1,cos(1)) para verificar que as curvas não coincidem neste ponto.

Exercícios. Faça como no exemplo anterior para:

1) f(x)=sen 2x, c = $\pi/4$
2) f(x)=x^5–2x^4+3x^3–x^2+2x–3, c=0 (depois faça também para c=1)
3) $f(x)=e^x$, c = 0
4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, c = –2