CURSO DE EXTENSÃO
ENSINO MÉDIO

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE
Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page:http://www2.joinville.udesc.br/~dma2ra/

Julho de 2008

Contents

Part I

Funções

1 Introdução

Definição: Dados dois conjuntos A e B e uma relação f de A em B, dizemos que f é uma função ou aplicação se, e somente se, para todo elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B tal que o par (x, y) pertença a relação f.

Uma função geralmente é dada por uma expressão que estabelece a correspondência entre os conjuntos A e B.

Qualquer função possui sempre os seguintes três elementos básicos:

a) Um conjunto de "saída" chamado Domínio.

b) Um conjunto de "chegada" chamado Contradomíno.

c) Uma lei ou regra que permite associar os elementos do Domínio com o s elementos do contradomínio

Notação: Se A é o domíno, B o contradomínio, denotamos a função f que associa um elemento do conjunto A a um elemento do conjunto B por:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

Domínio: O Domínio da função é o conjunto dos pontos para os quais faz sentido a aplicação da regra de correspondência entre os conjuntos A e B. Nesse estudo inicial de funções usaremos sempre como domínio um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ e o contradomínio será sempre $B = \mathbb{R}$. Notação: O domínio de uma função f será denotado por $Dom(f)$

Imagem: A imagem de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, é definida como sendo o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}$ tais que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Observe que a imagem de uma função f está contida no contradomínio da função f. Denotamos o conjunto imagem da função f por $\mathrm{Im}(f)$.

Gráfico: O gráfico de uma função é um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos o gráfico de uma função, denotado por $Graf(f)$, o seguinte conjunto: $Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\; / \;\; y = f(x)\}$. O gráfico de uma função f pode ser visualizado geometricamente usando-se o sistema cartesiano ortogonal onde podem ser vistos o conjunto de pontos da forma $(x, f(x))$

Função Crescente e Decrescente: Uma função é chamada de função crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Uma função é chamada de função decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo: Considere a função f cuja regra é dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Neste caso a expressão $\sqrt{x-1}$ só tem sentido para $x \geq 1$, portando o domínio da função, denotado por $D(f)$, é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$. Logo podemos escrever

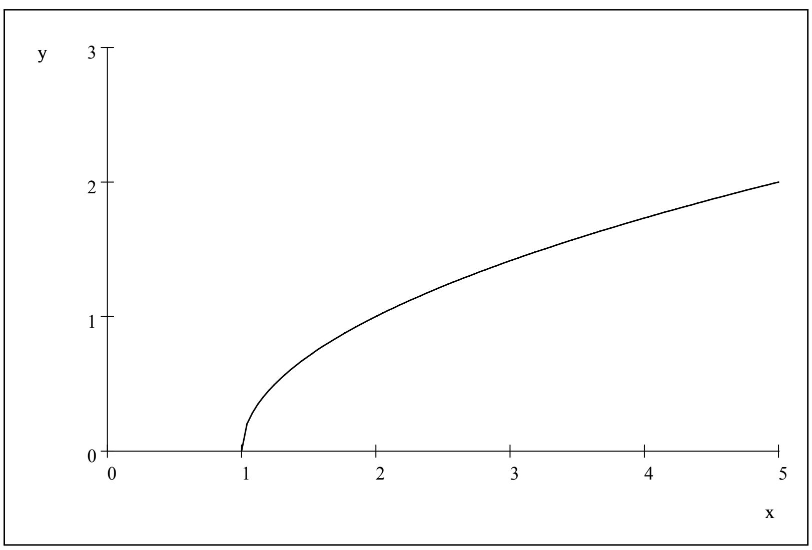
$$\begin{aligned} f \quad : \quad & [1, +\infty) \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Como $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Supondo $x_1, x_2 \in Dom(f)$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Longrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}$ (Note que isto vale porque $x_1 - 1 \geq 0$ e $x_2 - 1 \geq 0$) portanto $f(x_1) < f(x_2)$.

Logo f é uma função crescente.

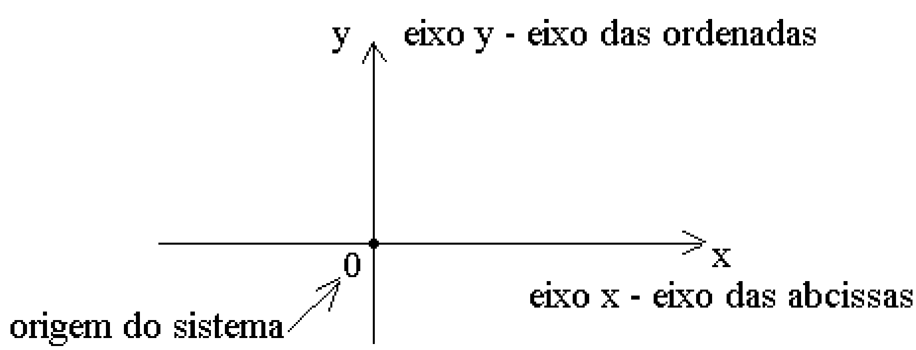
Gráfico de $f(x) = \sqrt{x-1}$



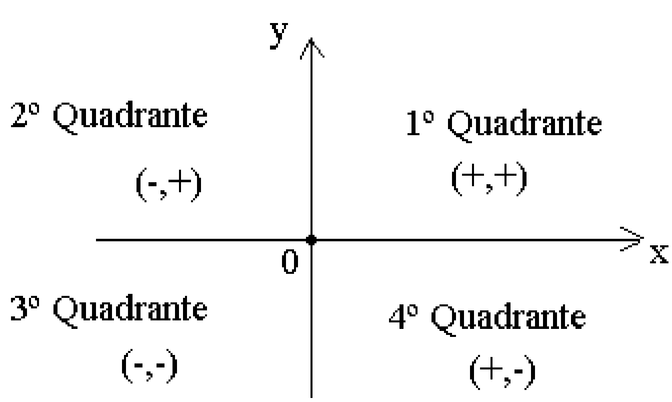
2 Sistema Cartesiano Ortogonal

Na conceituação de *abcissa* de um ponto, baseamo-nos na correspondência biunívoca entre os pontos de um eixo e os números reais. Analogamente, o conceito de *sistema cartesiano* surgiu para estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais

Plano Cartesiano com identificação dos eixos



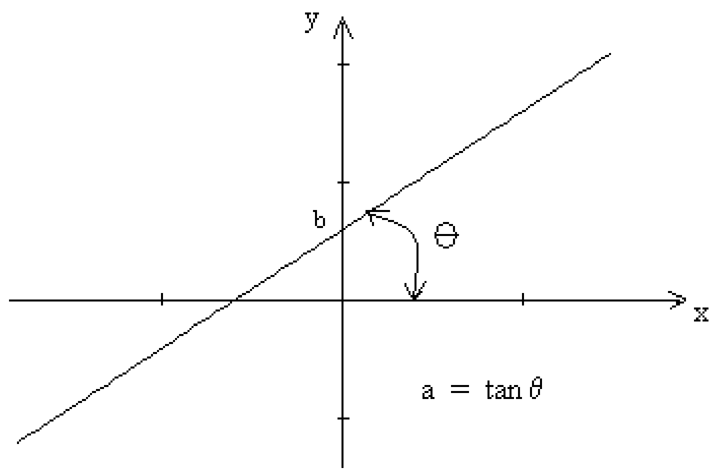
Plano Cartesiano com identificação dos quadrantes



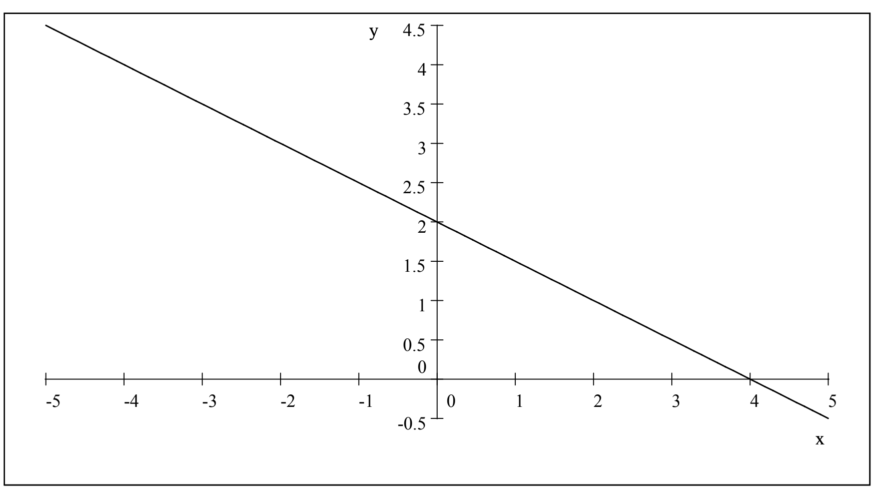
3 Função Afim

Função afim: Sejam a e b números reais, sendo a não nulo. Uma função afim é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax + b$. O gráfico de uma função afim é uma reta. O número a representa o coeficiente angular da reta e o número b representa o coeficiente linear (b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy). Se $a > 0$ a função afim é crecente e se $a < 0$ a função afim é decrescente.

$f(x) = ax + b$

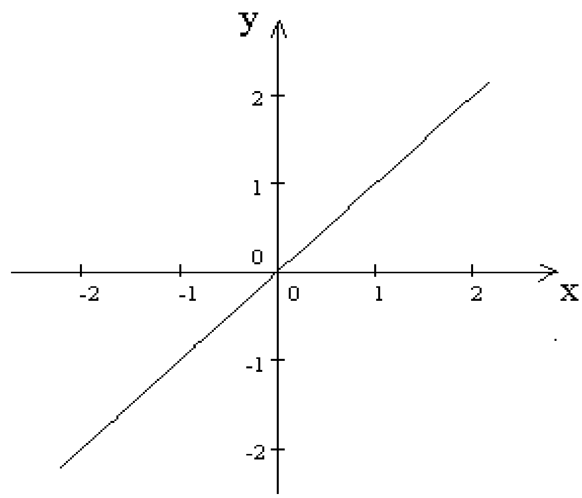


Exemplo : $f(x) = -2x + 3$



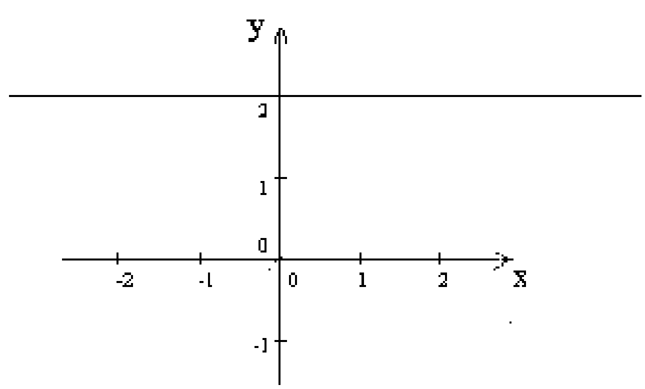
Função linear: Sejam a um número real, sendo a não nulo. Uma função linear é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax$. Este é um caso particular da função afim, neste caso o coeficiente linear é zero, ou seja, o gráfico da função linear sempre passa pela origem

Exemplo: $f(x) = x$

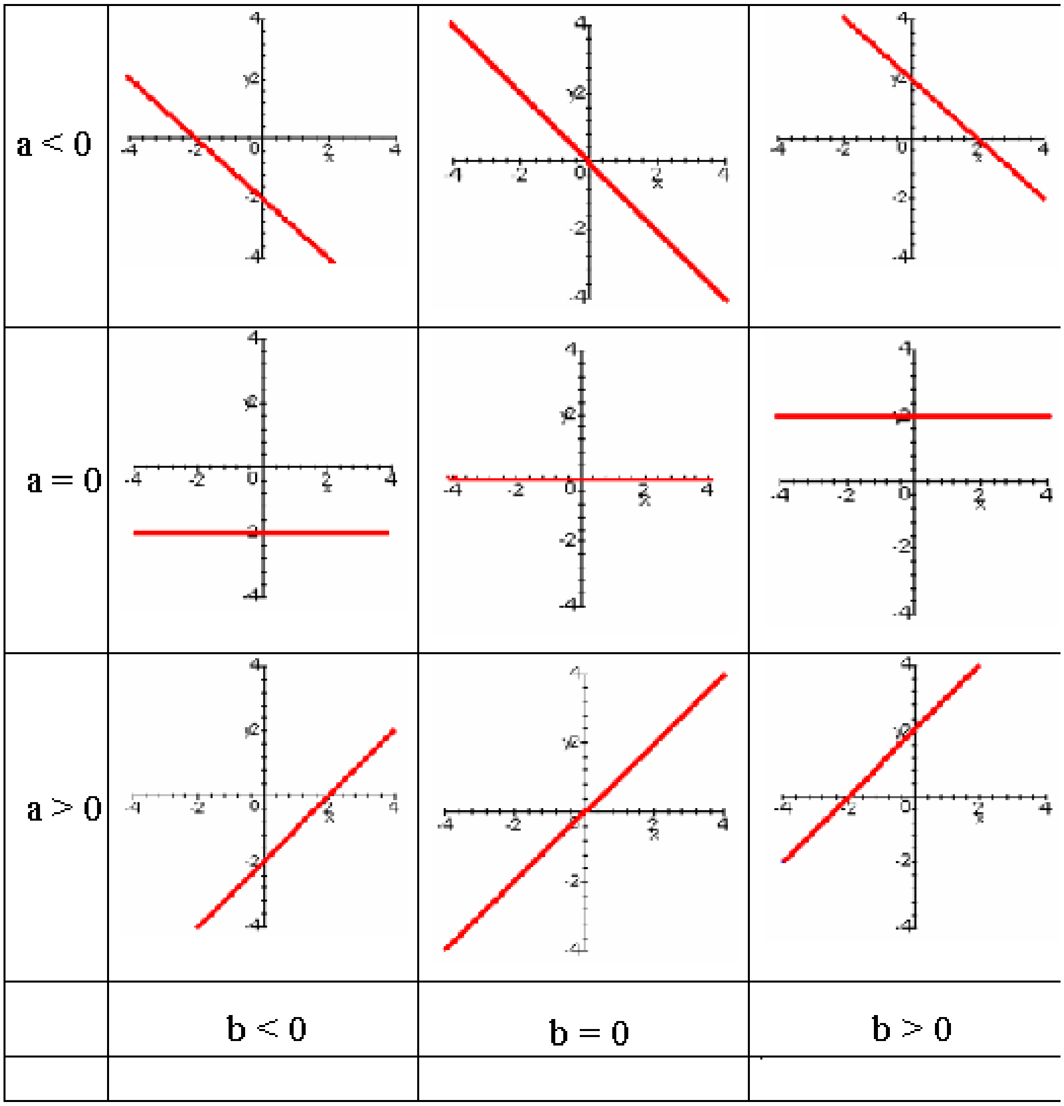


Função constante: Uma função constante é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = b$. Neste caso o coeficiente angular é zero, ou seja, o gráfico da função constante é sempre paralelo ao eixo x e cruza o eixo y no ponto $(0, b)$.

Exemplo: $f(x) = 2$



RESUMO: Função Afim $f(x) = ax + b$, onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear



3.1 Função afim por partes

Com o uso da função afim podemos definir outras funções chamadas funções afim por partes. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função afim por partes se podemos encontrar um número finito de subintervalos $(a_i, b_i), i = 1..., n$ (onde a_i *e/ou* b_i podem ser $\pm\infty$) tal que am cada subintervalo f é uma função afim.

Exemplo: Função de Heavy Side

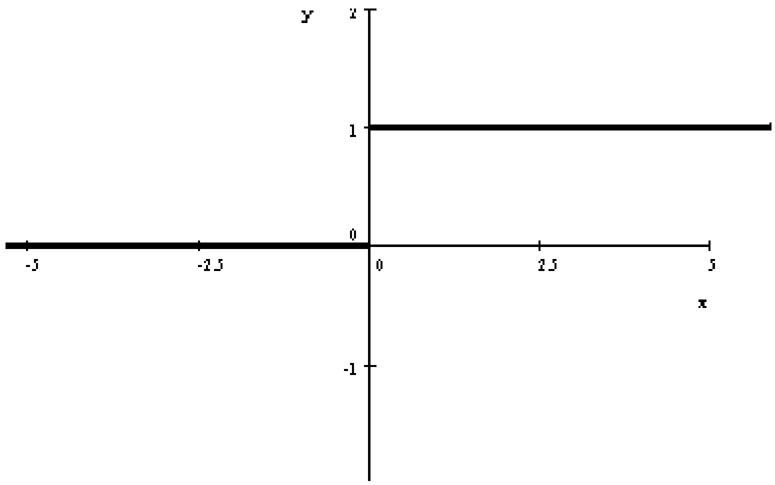


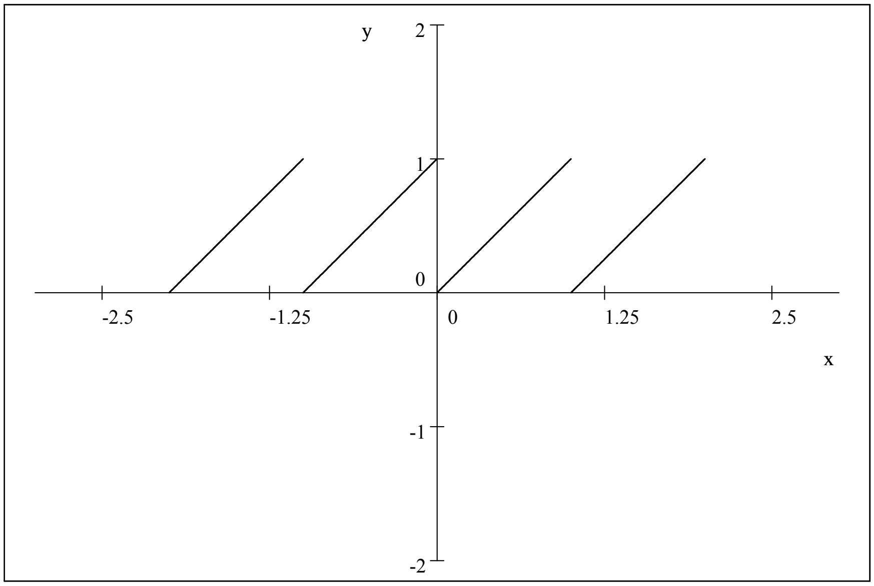
Figure 1:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x < 0 \\ 0, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos interpretar esta função como definindo um dispositivo liga/desliga onde o zero representa o momento em que o dispositivo é ligado, o valor 1 da função representa o dispositivo ligado, e o valor zero da função representa o dispositivo desligado.

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & if & -2 \leq x < -1 \\ x+1 & if & -1 \leq x < 0 \\ x & if & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & if & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



3.2 Inequações com funções afim

Considere a inequação:

$$ax + b \leq 0$$

Solução analítica:

$$\begin{array}{rcl} ax & \leq & -b \\ x & \leq & \dfrac{-b}{a} \text{ (se } a > 0) \\ & & ou \\ x & \geq & \dfrac{-b}{a} \text{ (se } a < 0) \end{array}$$

Solução gráfica

Observe que $y = ax + b$ é uma função afim, a inequção $ax + b \leq 0 \Rightarrow y \leq 0$. Portanto a solução da inequação é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $y \leq 0$.Geometricamente a solução é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais o gráfico da função afim estão abaixo do eixo Ox.

Exemplo: Resolver $5x - 3 \leq 0$

Vamos desenhar o gráfico da função $y = 5x - 3$. Fazendo $5x - 3 = 0$ temos que $x = \frac{3}{5}$ Portanto em $x = \frac{3}{5}$ a reta corta o eixo Ox

No gráfico podemos observar que para $x \leq \frac{3}{5}$ o gráfico da reta está abaixo do eixo Ox

Logo a solução da inequação $5x - 3 \leq 0$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq \frac{3}{5}\right\} = (-\infty, \frac{3}{5}]$.

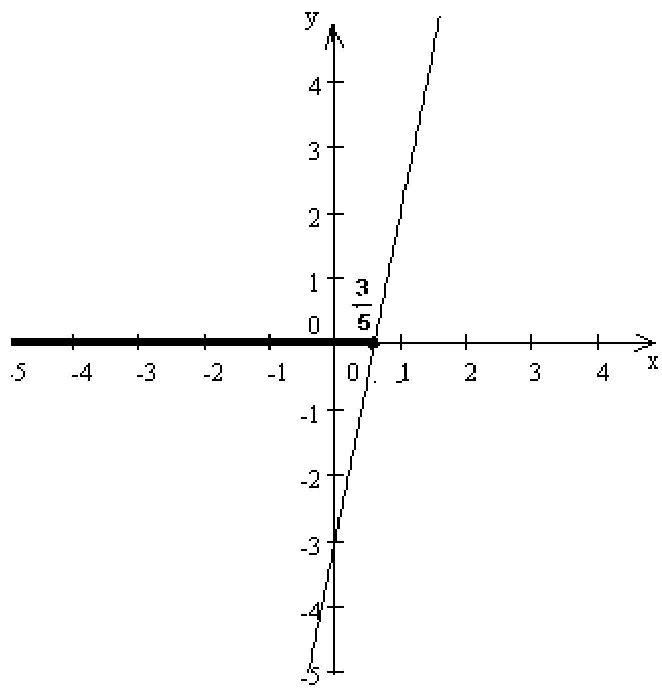


Figure 2:

3.3 Subconjuntos do plano definidos por retas

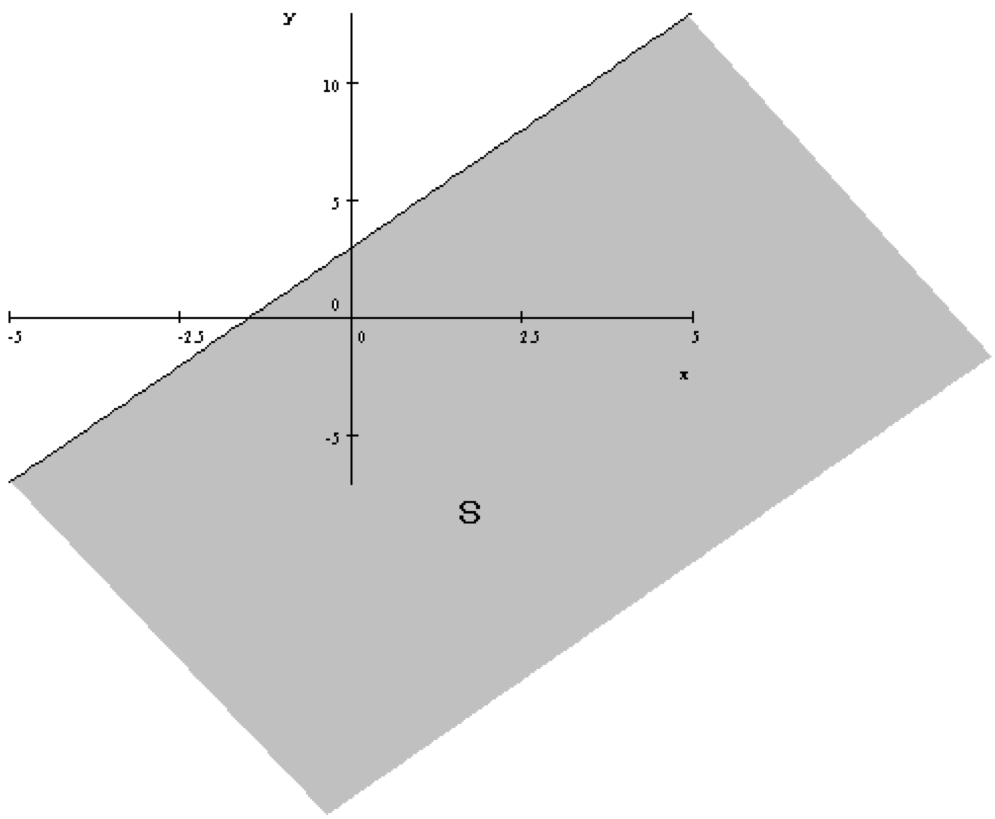
Considere os subconjuntos do plano cartesiano definidos por:

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \diagup ax + by \leq 0\}$. Que região do plano cartesiano o conjunto S representa?

Observe que a inequação $ax + by + c \leq 0$ pode ser escrita como $y \leq -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Chamando $a_1 = -\frac{a}{b}$ e $b_1 = -\frac{c}{b}$ podemos escrever $y_1 = a_1 x + b_1$. Portanto o conjunto S é o conjunto de pontos (x,y) tais que $y \leq y_1$, ou seja o conjunto de pontos (x,y) tais que y está abaixo da reta $y_1 = a_1 x + b_1$ ou $y = y_1$

Exemplo Seja S o conjunto de pontos (x,y) tais que $y \leq 2x + 3$. Geometricamente



Considere a seguinte inequação $3x - y - 2 < 0$ Neste caso $y > 3x - 2$. Neste caso o conjunto dos pontos (x,y) tais que $y > 3x - 2$ é o conjunto de pontos (x,y) tais que y esta acima da reta $y_1 = 3x - 2$. Geometricamente

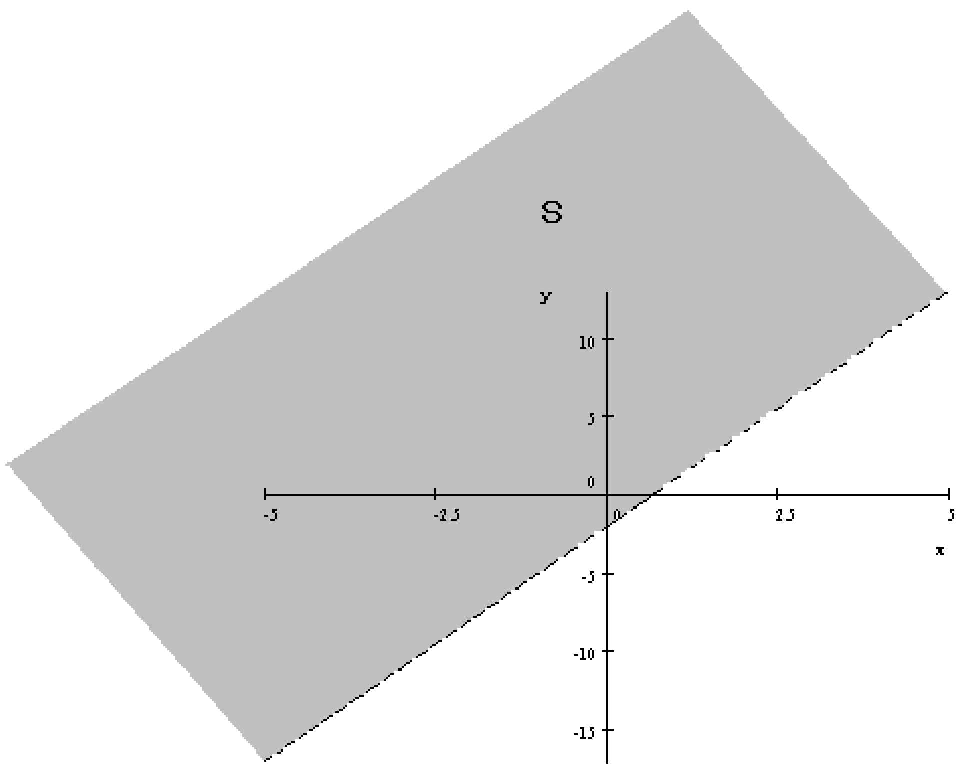


Figure 3:

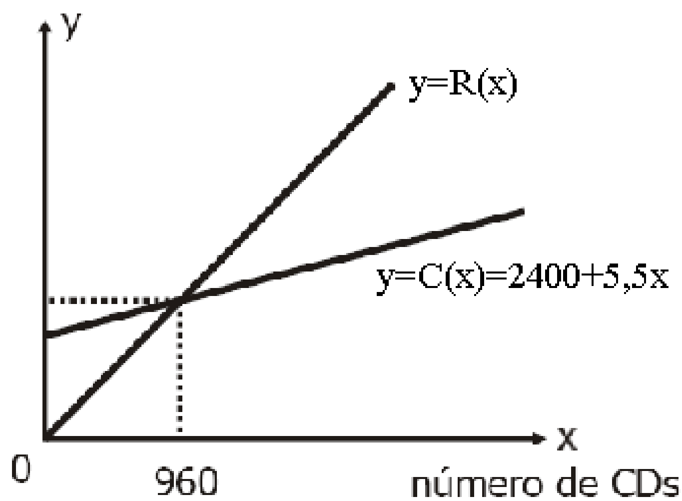


Figure 4:

3.4 Questões interdisciplinares i

1) A figura abaixo mostra os gráficos das funções custo total C(x) e receita total R(x) de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2000 CDs é

Solução

A Lucro $L(x)$ é diferença entre a Receita $R(x)$ e o custo $C(x)$, ou seja,

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Logo devemos determinara a função $R(x)$. Pelo gráfico podemos ver que a função $R(x)$ é um a função liner, isto é $R(x) = ax$.

Pelo gráfico vemos que $R(960) = C(960) = 7680$, portanto $a = \frac{7680}{960} = 8.0$ e a função $R(x) = 8x$. Sabendo quanto é a Receita podemnos calcular o lucro:

$$L(200) = R(2000) - C(2000) = 2600$$

(Vestibular Unesp-2007)

2) Seja x o número de anos decorridos a partir de 1960($x = 0$).A função $y = f(x) = x + 320$ fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em ppm (partes por milhão) em função de x.A média de variação do nível do mar, em cm, em função de x, é dada aproximadamente pela função $g(x) = \frac{1}{5}x$. Seja h a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2.

Solução:

No diagrama seguinte estão representadas as funções f, g e h.

$$\begin{tikzcd} \text{tempo (anos)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \text{média de variação do nível do mar (cm)} \\ \text{concentração de } CO_2 \text{ (ppm)} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Determine a expressão de h em função de y e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm.

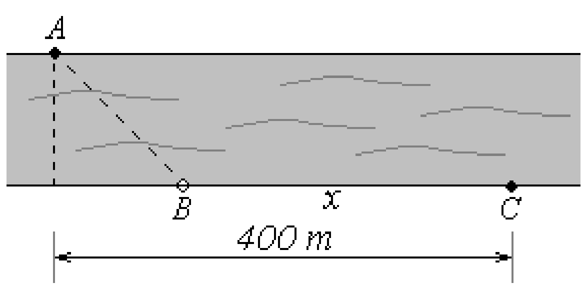
O rio tem uma largura 100m e o ponto C está deslocado de 400m do ponto A, na outra margem. Deseja-se ir do ponto A ao ponto C, fazendo o percurso AB (remando) e depois BC (correndo pela margem).

Solução

Como resolveram: De $y = x + 320$, temos: $x = y - 320$. Como $g(x) = \frac{1}{5}x$ temos $g(y) = \frac{1}{5}(y - 320)$ e portanto $h(y) = \frac{1}{5}(y - 320)$

Como $y = 400$ temos que $h = \frac{1}{5}(400 - 320) = 16$

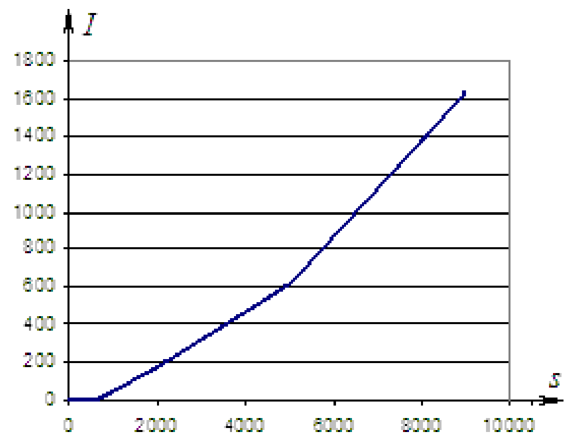
3) Quanto tempo leva a travessia, dependendo da posição do ponto B (em relação a C), sabendo que se pode remar a 40 m/min e correr a 100m/min?



Solução

$$\mathbf{I(s)} = \begin{cases} 0, & se \quad s < 500 \\ 0{,}1(s - 500), & se \quad 500 < s \leq 1500 \\ 100 + 0{,}15(s - 1500), & se \quad 1500 < s \leq 5000 \\ 625 + 0{,}25(s - 5000), & se \quad s > 5000 \end{cases}$$

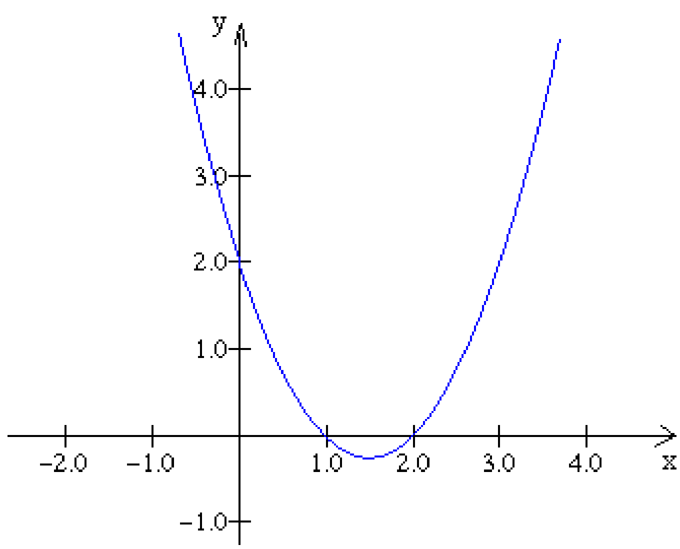
Gráfico



4 Função quadrática

Função quadrática: Sejam a, b e c números reais, sendo a não nulo. Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cada $x \in \mathbb{R}$ associa $f(x) = ax^2+bx+c$. O gráfico de uma função quadrática é chamado de parábola.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 3x + 2$



Concavidade: No gráfico da párabola $f(x) = ax^2 + bx + c$:

i) Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e

ii) Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Zeros: Os valores de x para os quais temos $f(x) = 0$ são chamados os zeros da função quadrática. Os zeros são as abcissas dos pontos onde o gráfico da parábola intercepta o eixo dos x. Para encontrarmos os zeros da função quadrática devemos resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Uma das formas mais comuns de resolver essa equação é usando a famosa fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ é chamado de discriminante.

Se $\Delta > 0$ os zeros são reais e distintos. Se $\Delta < 0$ a equação não possui zeros reais e se $\Delta = 0$ a equação possui zeros reais e iguais.

Como obter a fórmula de Baskara? A FÓRMULA É DE BHASKARA?

O hábito de dar o nome de Bhaskara para a formula de resolução da equação do segundo grau se estabeleceu no brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome Bhaskara para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

* Problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos coeficientes numéricos.

* Bhaskara que nasceu na Índia em 1114 e viveu até cerca de 1185 foi um dos mais importantes matemáticos do século 12. As duas coleções mais conhecidas são Lilavati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes")de seus trabalhos que tratam de aritmética e álgebra respectivamente , e contem numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também como receitas em prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

* Até o fim do século 16 não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação . Isso começou a ser feito a partir de François Viete, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo, embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara, não é correto atribuir a ele a conhecida formula de resolução da equação do 2^ograu.

Um dos métodos de se obter a fórmula de Baskara é completando quadrados:

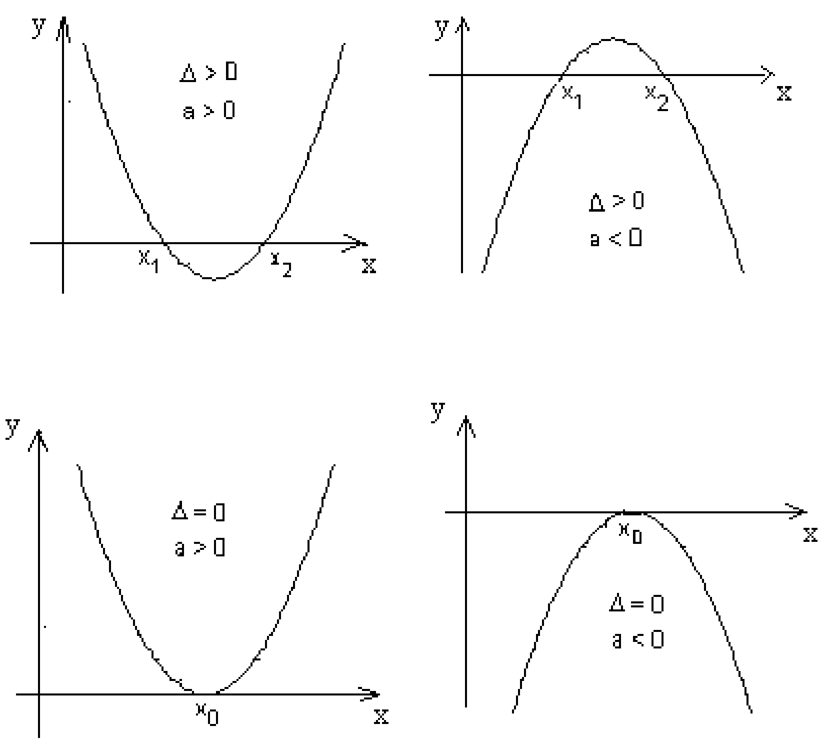
$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0\\
4a^2x^2+4abx &= -4ac\\
4a^2x^2+4abx+b^2 &= -4ac+b^2\\
(2ax+b)^2 &= -4ac+b^2\\
2ax+b &= \pm\sqrt{-4ac+b^2}\\
2ax &= -b\pm\sqrt{-4ac+b^2}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}
\end{aligned}
$$

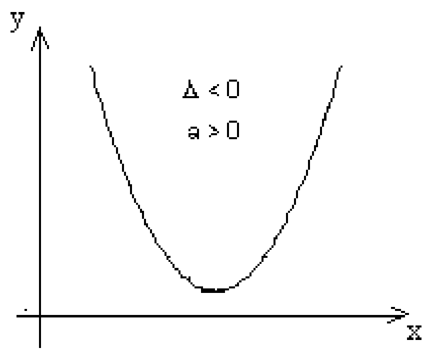
Outro método é supor que u e v sejam as raizes

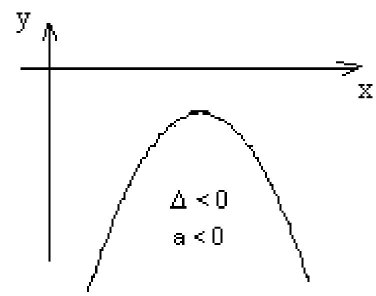
Vértices da parábola: O vértice da parábola ocorre sempre no ponto médio dos zeros da função quadrática. As coordenadas dos vértices da parábola são dados por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gráficos: Dependendo do valor de Δ e do sinal de a temos os seguintes casos:







4.1 Questões interdisciplinares ii

(Vestibilçar UERJ 2002)

Questão 05 (Função segundo grau)

Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$ 2,00.

A partir daí, o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia.

Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta

por dia.

(A) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.

(B) Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor.

Solução

a)

		PERIODO	DA	COLHEITA	
FRUTAS	DIA 1	DIA 2	DIA 3	$\cdots$	DIA N+1
VALOR(R$)	$2,00$	$2-0,02*1$	$2,00-0,02*2$	$\cdots$	$2,00-0,02*N$
QUANTIDADE	80	$80+1$	$80+2$	$\cdots$	$80+N$

$Ganho = (80+n)(2,00-0,02n) = 160+0,4n-0,02n^2$

b) $n = \frac{-0.4}{2(-0.02)} = 10.0 \Rightarrow n+1 = 11$

5 Função Modular

5.0.1 Módulo

Definição: O módulo , ou valor absoluto, de um número real "x" é denotado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos $|9| = 9$, $\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$, $|0| = 0$

Da definição de módulo podemos concluir que o módulo de um número é sempre um número não negativo, ou seja, $|x| \geq 0$.

5.1 Propriedades do módulo

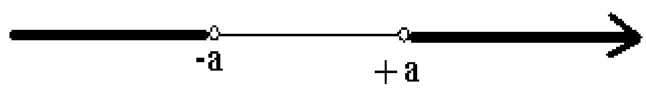
i) $|x| = |-x|$; ii) $|x.y| = |x|\,|y|$; iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ iv) $|x| \geq 0$

v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ vi) $|x| = |y| \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$

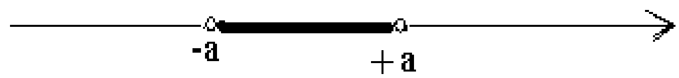
5.2 Inequações modulares

Notemos que se $a > 0$ valem as seguintes conclusões

$|x| > a$ se e somente se $x < a$ ou $x > a$



$|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$



5.3 Função Modular

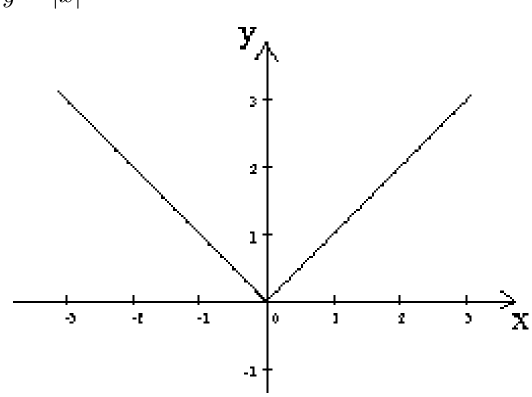
Função Modular: Definimos função modular como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$

Da definição de módulo a função modular pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Observe que a função modular só assume valores positivos, ou seja, $f(x) = |x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

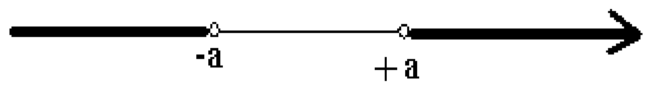
Gráfico: $y = |x|$



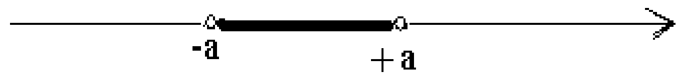
5.4 Inequações modulares

Notemos que se $a > 0$ valem as seguintes conclusões

$|x| > a$ se e somente se $x < a$ ou $x > a$



$|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$



1) Resolva a desigualdade e exprima a solução em termos de intervalos, quando possível:

Básico

a) $|x + 3| < 0,01$

b) $|3x - 7| \geq 5$

c) $|-11 - 7x| > 6$

Intermediário

e) $3 \leq |x - 2| \leq 7$

f) $\frac{2}{|x+3|} < 1$

g) $|x + 4| \leq |2x - 6|$

h) $\left|\frac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \frac{1}{2}$

Avançado

i) $|x - 1| + |x + 2| \geq 4$

j) $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

k) $\frac{1}{|x+1||x-3|} \geq \frac{1}{5}$

Mais avançado

l) $|x - 1| + |x - 5| + |x + 2| \geq 1$

6 Função Exponencial

Definição: Dado um número real $a > 0, a \neq 1$, definimos função exponencial de base a à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$.Se $a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

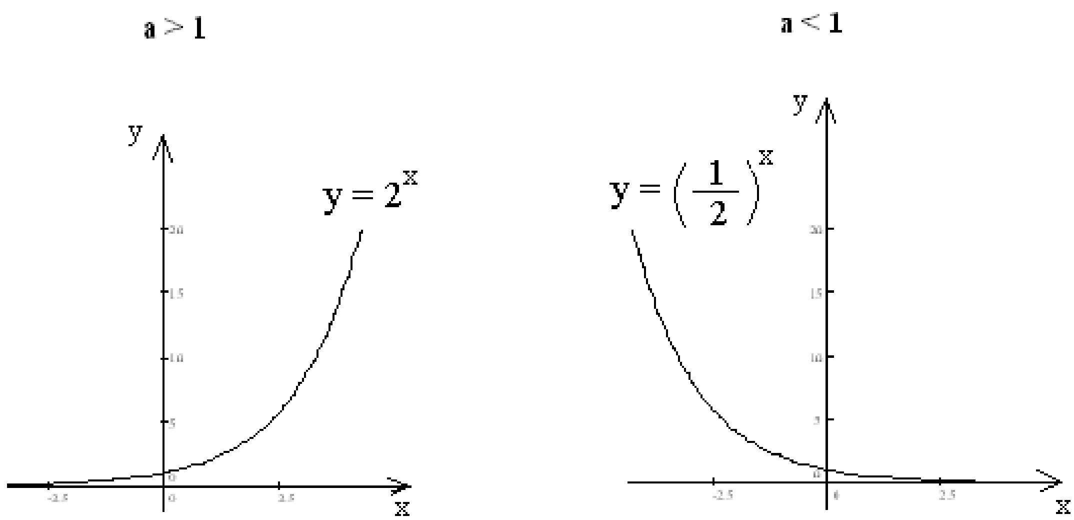
Observe que:

a) O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$

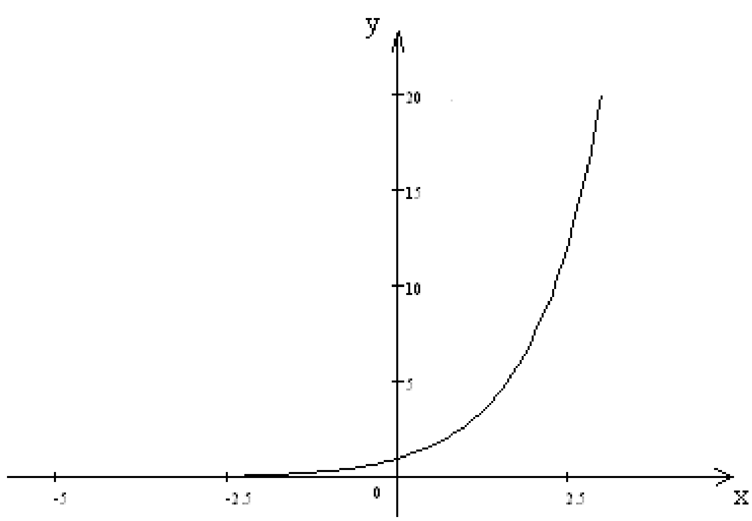
b) A função exponencial só assume valores positivos, isto é, $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

c) O gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto $(0, 1)$.

Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações



Um caso particular da função exponencial, que é muito usado em aplicações práticas, é a função exponencial de base $e = 2.718\,3\ldots$, definida por $f(x) = e^x$. O gráfico de $y = e^x$ tem a seguinte forma:



6.1 Exercícios Função Exponencial

1) Resolver as inequações exponenciais

a) $4^x > \frac{1}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$

c) $3^{x^2} > 3^x$

2) Determinar o domínio da função definida por $y = \sqrt{3^{x+2} - 3^{-x}}$

7 Função Logarítmica

7.1 Logarítmo

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, e um número real positivo b denominamos de logarítmo de b na base a ao expoente que se deve elevar à base a de modo que o resultado obtido seja igual a b. Matematicamente escrevemos

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Propriedades dos logarítmos:

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^m = m$

d) $\log_a b = \log_a c \iff b = c$

e) $a^{\log_a b} = b$

f) $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

g) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

h) $\log_a b^m = m. \log_a b$

i) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

7.2 Função Logarítmica

Definição: Dado um número real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos função logarítmica à função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$.

Se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função crescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é uma função decrescente, ou seja, $x_1 < x_2$ se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$. Isto quer dizer que se $x_1 < x_2$ então $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

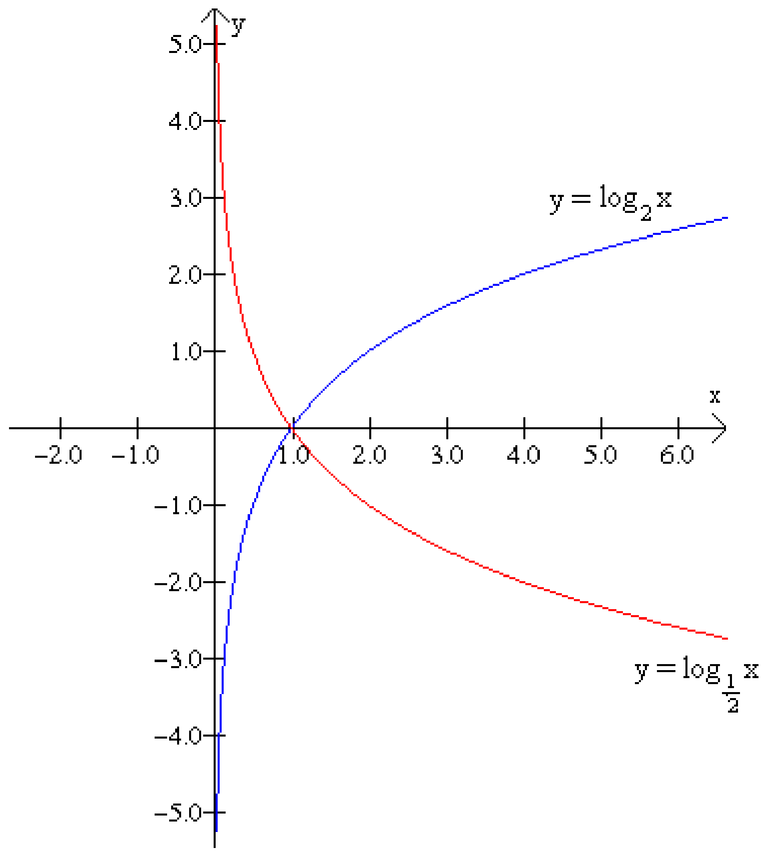
Observe que:

a) O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$

b) A função logarítmica assume todos os valores reais

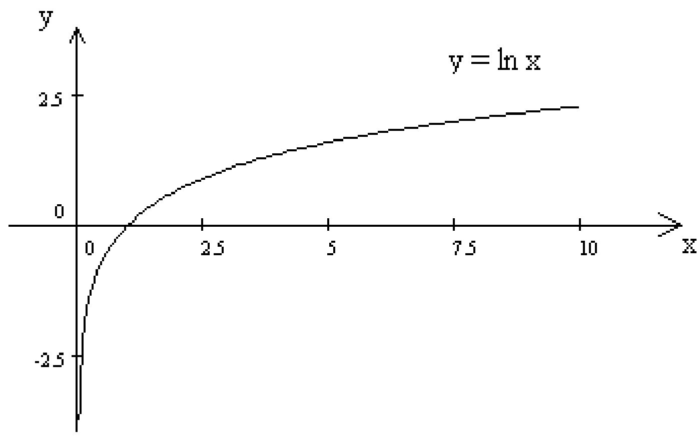
c) O gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto $(1, 0)$.

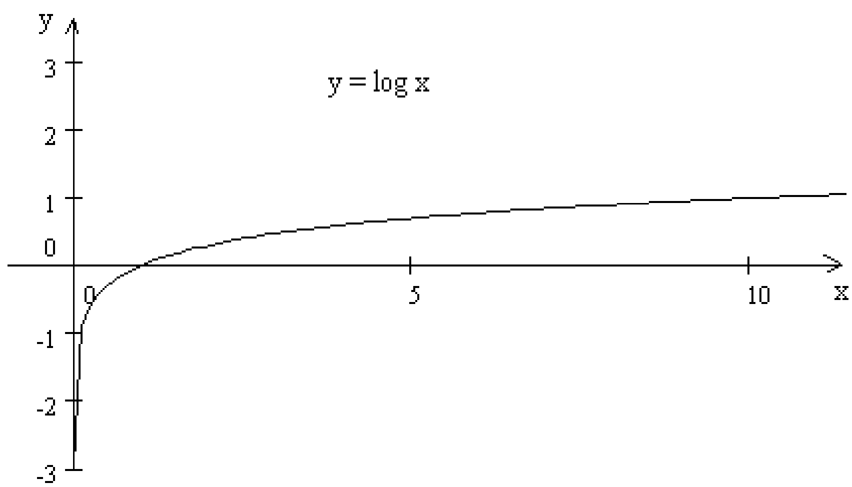
Gráficos: Dependendo do valor de a temos as seguintes situações:



Um caso particular da função logarítmica e que é muito usado em aplicações práticas é a função logarítmica de base $e = 2.718\,3$ definida por $f(x) = \log_e x$.Para $\log_e x$ usamos a notação $\ln x$. Portanto $f(x) = \ln x = \log_e x$.

Quando a base do logarítmo é 10 não precisamos escrever a base, ou seja, para $\log_{10} x$ usamos a notação $\log x$. Portanto $f(x) = \log x = \log_{10} x$.Os gráficos de $y = \ln x$ e $y = \log x$ têm a seguinte forma:





7.3 Pra que serve isso?

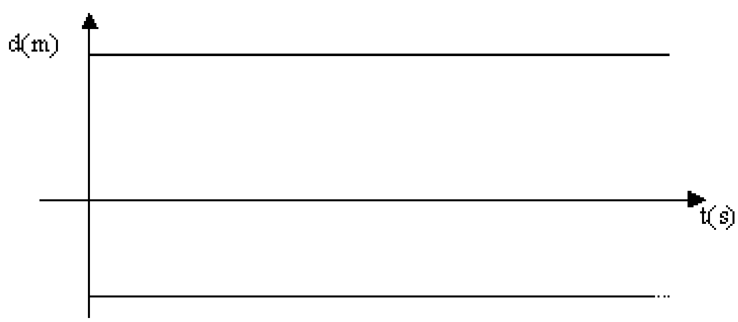
Função Exponencial

Um exemplo bem presente na nossa vida é o caso dos juros. Num primeiro mês você vai ao banco e deposita$R\$100,00$ a um juro de 3% ao mês. Passando-se um mês o seu rendimento será $R\$100,00$ mais $R\$3,00$, logo você terá $R\$103,00$, ou seja, $100 \times (1 + 0,03) = 100 \times 1,03$. No mês seguinte o seu juro será calculado sobre os seus $R\$100,00$ que voce colocou no banco ou sobre os $R\$103,00$que voce obteve com os juros deste mês? É claro que sew for calcular o juro somente em cima do que voce colocou não vale a pena não é? Então o que acontece é que agora o seu capital é $R\$103,00$ e é ele quem vai ser a base para o cálculo de juros deste mês. Logo ao final do 2^o mês seu capital será $103,00 * 3\%$, ou seja,$(100 * 1,03) * 1,03$ ou $100 * 1,03^2$. No final do 10^o os eu saldo (se você não retirar nem colocar mais capital no banco) será $100 * 1,03^{10}$, ou seja, o capital inicial multiplicado pelo juro elevado ao tempo de aplicação

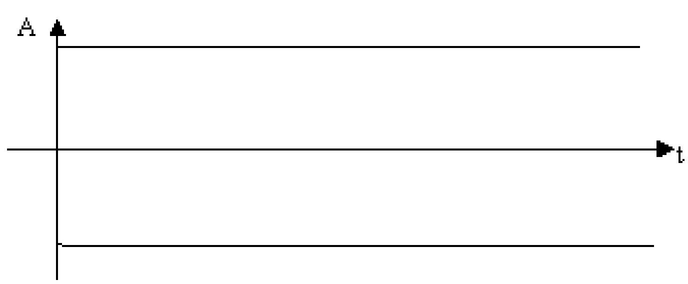
Função Logarítmica

A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se do movimento das placas tectônicas. O atrito de uma placa contra outra forma ondas mecânicas. Estas ondas são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismógrafo mede a amplitude e a freqüência dessas vibrações, utilizando uma equação logarítmica, pode calcular a magnitude do terremoto.

A amplitude está associada a altura (tamanho) da onda e freqüência com a quantidade de ondas num determinado intervalo de tempo. Podemos observar estes dados no gráfico de distância d em metros em função do tempo t em segundos.



Durante o terremoto, o sismógrafo registra a magnitude de um terremoto durante um pequeno intervalo de tempo:



A magnitude do terremoto pode ser calculada pela equação logarítmica:

Ms= log10 (A . f) + 3.30

Magnitude do terremoto Amplitude do movimento da onda freqüência da onda

na escala Richter registrada no sismógrafo (em μm) (em hertz)

à Suponhamos que um terremoto teve como amplitude 1000 micrometros e a freqüência a 0,1Hz. Qual a magnitude deste terremoto?

Ms= log10 (A . f) + 3,30
Ms= log10 (1000 . 0,1) + 3,30
Ms= log10 100 + 3,30
Ms= log10 100 + 3,30

Log10 100 = x 10x = 100 10x = 102 à x= 2
Ms= 2 + 3,30
Ms= 5,3 na escala Richter.

Para ser calculado a intensidade de um terremoto, foi necessário a utilização da função logarítmica. Alexander Graham Bell, inventor do telefone, usou a função logarítmica para calcular o nível sonoro, o qual chamamos de decibel. Porém, calcule o nível sonoro permitido pela BPTran aos sons dos carros, sabendo que a intensidade é de 10-10W/cm2 e o limiar da percepção é igual a 10-16W/cm2.

Solução:
■= 10.log I à ■= 10.log10-10 à ■= 10.log(10-10+16) à
Io 10-16
■= 10.log106 à ■= 10.6.log10 à ■= 60dB.

7.4 Exercicio Função Logarítmica

1) Resolver as inequações logaritmicas

a) $\log_3(x^2 - x + 3) > 2$

b) $0 < \log_2(2x - 1) \leq 1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) > 2$

8 Funções Trigonométricas

8.1 Introdução:

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri(três), gono(ângulos)e metron(medida); significando assim "medida dos triângulos".

Inicialmente considerada como uma extensão da geometria, a trigonometria já era estudada pelos babilônios , que a utilizavam para resolver problemas práticos de Astronomia, de Navegação e de Agrimensura.

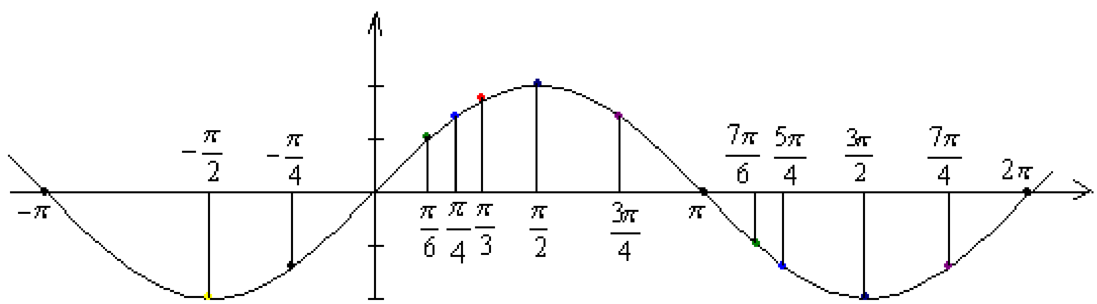
Aliás, foram os astronomos como o grego Hiparco (190 aC – 125 aC), considerado o pai da Astronomia e da Trigonometria, que estabeleceu as primeiras relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

No século VIII com o apoio de trabalhos hindus, matemáticos árabes contribuíram notavelmente para o avanço da trigonometria. Este avanço continuou após a construção da primeira tábua trigonométrica, por um matemático alemão, nascido em Baviera, chamado Purback.

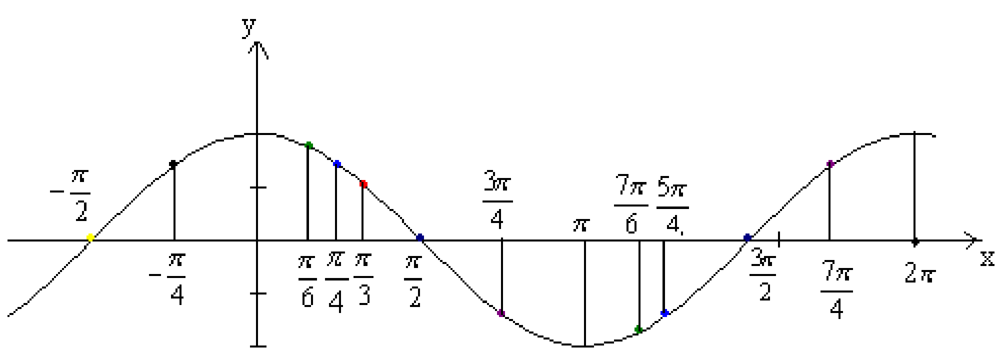
Porém o primeiro trabalho matemático sobre trigonometria foi o "tratado dos triângulos", escrito pelo matemático alemão Johann Müller, também chamado Regiomontanus. Sabe-se que Regiomaontanus foi discipulo de Purback.

Atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos. Sua aplicação se estende na outros campos da matemática, como a Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil, etc.

Função Seno: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sen(x)$, $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-1, 1]$



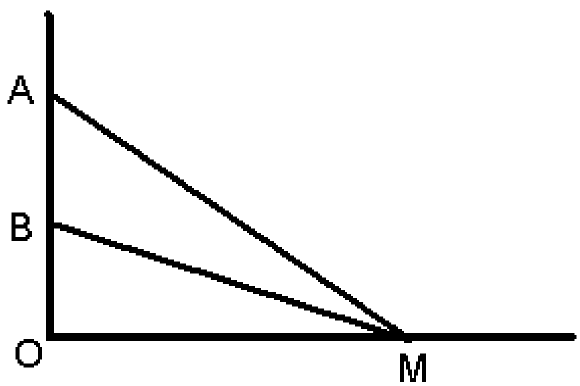
Função Cosseno: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-1, 1]$



Part II
MECANISMOS

8.2 Mecanismo 1

1. O segmento AB é fixo e M é um ponto que se desloca num trilho perpendicular ao segmento AB através de elásticos.



Encontre possíveis relações funcionais entre os objetos móveis e indique os domínios das funções. ·

Em particular, considere como variáveis a distância do ponto M até o segmento vertical AB e a área do triângulo ABM.

Esboce o gráfico dessa função.

8.3 Resolução do Mecanismo 1

Começaremos listando algumas relações funcionais entre os objetos móveis:

· A área do triângulo ABM depende do comprimento do segmento OM. ·

O perímetro do triângulo ABM depende da distância de M à O.

Os ângulos internos do triângulo ABM dependem da distância de M à O.

A área do triângulo AOM depende do ângulo OMA.

O comprimento dos segmentos AM e BM dependem do comprimento do segmento OM.

Nos deteremos agora a resolver o problema da área do triângulo ABM em função da distância do ponto M ao segmento vertical, calculando sua expressão analítica.

Observando o mecanismo, notamos que a medida que o segmento OM cresce, a área do triângulo ABM também cresce. Então já sabemos que essa é uma função crescente. Para facilitar a resolução, consideraremos AB como base do triângulo e OM como altura, assim temos:

f(x) = área do triângulo ABM, com x = OM f(x) = 1/2 . AB . x

$f(x) = (AB/2)x$

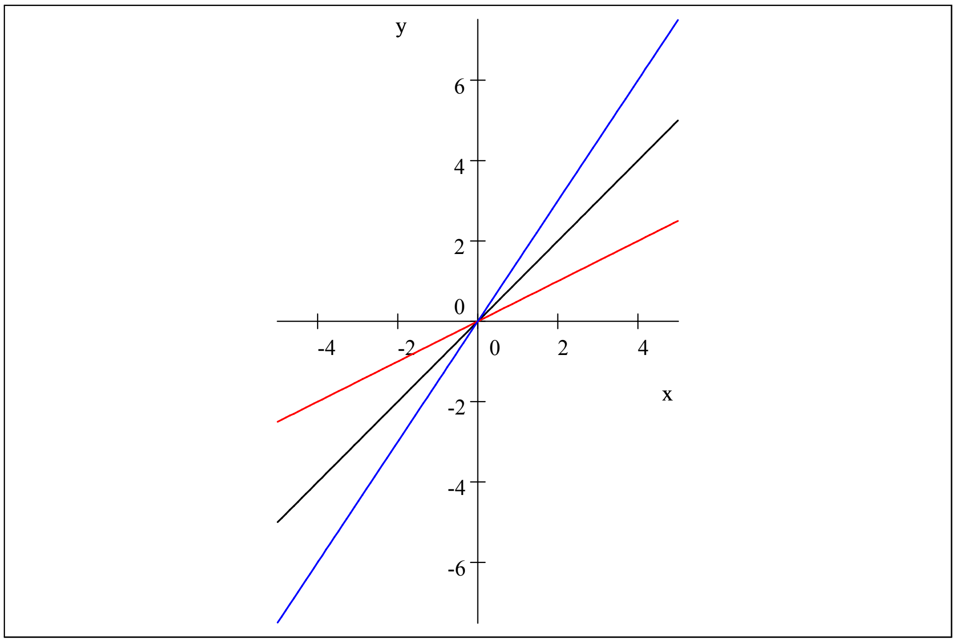
· Observe que se mudarmos o tamanho do segmento AB, variamos o coefiente angular da reta. Isto implica uma mudança na velocidade com que a área aumenta.

Por exemplo para $AB = 1$ temos que $f(x) = \frac{1}{2}x$

Para $AB = 2$ temos que $f(x) = x$

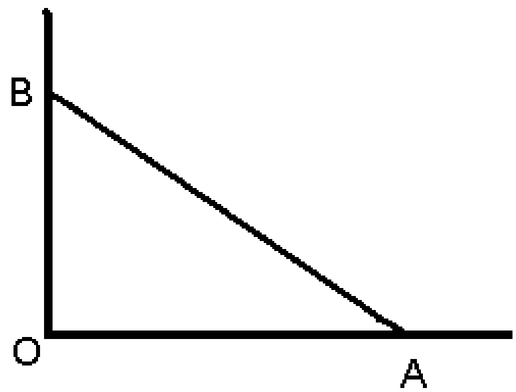
Para $AB = 3$ temos que $f(x) = \frac{3}{2}x$

Veja o gráfico para os valores de AB igual 1,2 e 3



8.4 Mecanismo 2

2. O segmento AB tem tamanho fixo e suas extremidades deslocam-se em dois trilhos perpendiculares.



Encontre possíveis relações entre os objetos móveis e indique os domínios das funções.

Em paticular, considere como variáveis as distâncias de A e B ao vértice do mecanismo.

Esboce o gráfico dessa função.

8.5 Resolução do Mecanismo 2

Começaremos listando algumas relações funcionais entre os objetos móveis:

- A distância de B à origem depende da distância de A à origem.

A área do triângulo ABO depende do comprimento do segmento OA.

O ângulo BAO depende da distância de A à O.

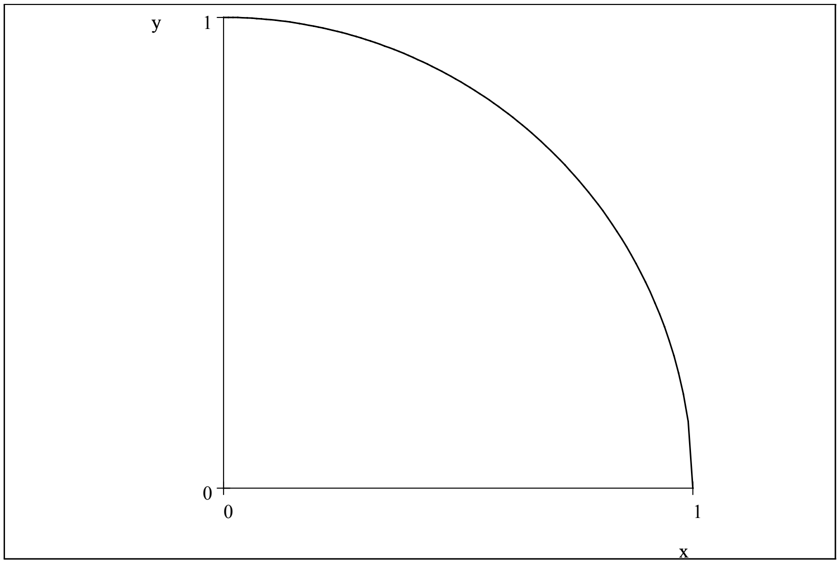
Nos deteremos agora à função que tem como variável independente a distância de A à origem e como variável dependente a distância de B à origem, e calcularemos sua expressão analítica.

Observando o mecanismo, notamos que a medida que a distância de A à origem aumenta, diminui a distância de B à origem, ou seja, a função é decrescente.

Se,x = distância de A até a origem e y = distância de B até a origem. Então, pelo Teorema de Pitágoras:

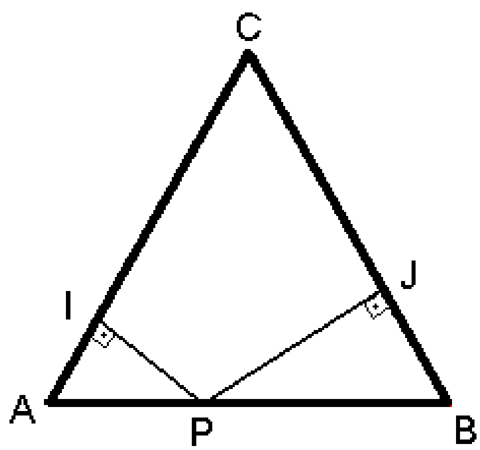
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= AB^2 \\ y &= \sqrt{AB^2 - x^2} \end{aligned}$$

Por exemplo para AB=1
$y = \sqrt{1 - x^2}$



8.6 Mecanismo 3

3. O triângulo ABC tem tamanho fixo. O ponto P se desloca sobre a base AB, e é ligado, por material elástico, perpendicularmente aos pontos I e J, respectivamente sobre os lados AC e BC do triângulo.



Encontre possíveis relações funcionais entre os objetos móveis e indique os domínios das funções.

Em particular, considere como variáveis a distância de P à A e a soma das áreas dos triângulos API e BPJ.

Esboce o gráfico dessa função.

8.7 Resolução do Mecanismo 3

Começaremos listando algumas relações funcionais entre os objetos móveis:

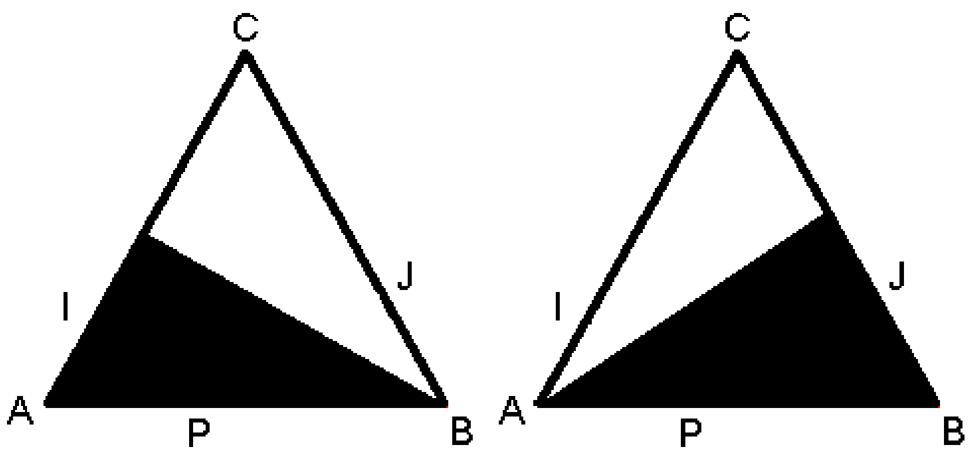
A soma das áreas dos triângulos API e BPJ depende da distância de P à A.

A distância de B à P depende da distância de A à P.

A área do quadrilátero CIPJ depende do comprimento do segmento AP.

O comprimento do segmento AI depende do comprimento do segmento BJ.

Nos deteremos agora ao problema da soma das áreas dos triângulos API e BPJ em função da distância do ponto P ao ponto A, calculando sua expressão analítica. Num primeiro momento, observando o mecanismo, podemos pensar que a soma das áreas permanece constante. Mas se observarmos bem, ela é máxima nas duas situações limites mostradas abaixo, onde o ponto P coincide com os pontos A e B.



- y = soma das áreas dos triângulos API e BPJ
- x = distância de P à A
- a = ângulos CAB e CBA

Utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo, temos:

$$\frac{AI}{x} = \cos a \Rightarrow AI = x \cos a$$
$$\frac{PI}{x} = \text{sen } a \Rightarrow PI = x \text{ sen } a$$

Área de API $= \frac{AI*PI}{2}$
Área de API $=\frac{1}{2}(\sin a \cos a)x^2 = \left(\frac{\sin 2a}{2}\right) x^2$
Da mesma forma, temos que
Área de BPI$=\frac{1}{2}(\sin a \cos a)\left(AB - x^2\right) = \left(\frac{\sin 2a}{2}\right)(AB - x)^2$

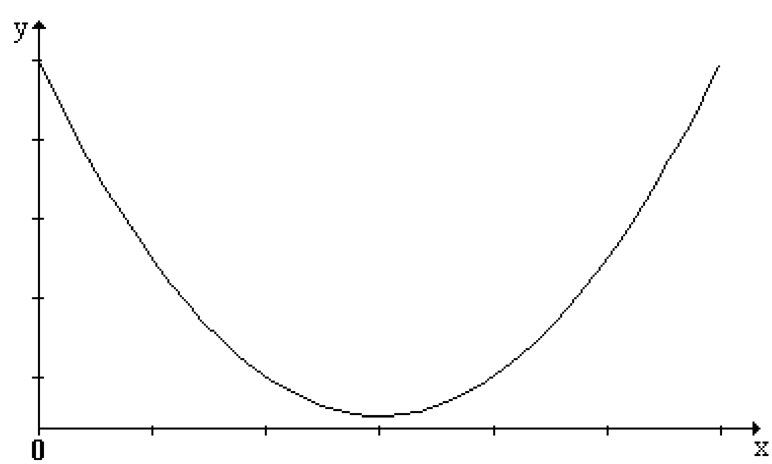
$$y = \left(\frac{\sin 2a}{2}\right)\left[x^2 + (AB - x)^2\right]$$

$$y = \left(\frac{\sin 2a}{2}\right)\left[2x^2 - 2ABx + AB^2\right]$$

Como a e AB são constates do problema, vamos reescrever a equação final de uma forma mais enxuta.

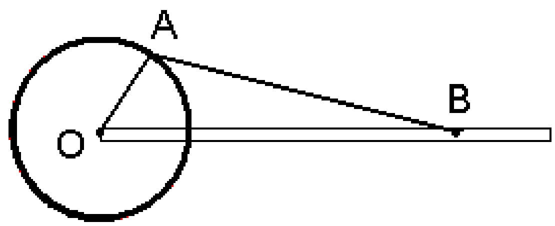
$$y = ax^2 + bx + c$$

Abaixo temos o gráfico que representa a soma das áreas dos dois triângulos.



8.8 Mecanismo 4

O ponto O é fixo, os segmentos OA e AB tem tamanho fixo. O mecanismo é articulado na extremidade A dos segmentos e o ponto B se desloca num trilho.



Encontre possíveis relações funcionais entre os objetos móveise indique os domínios das funções.

Em particular, considere como variáveis medida do ângulo AOB e a distância de B à O.

Esboce o gráfico dessa função.

8.9 Resolução do Mecanismo 4

Começaremos listando algumas relações funcionais entre os objetos móveis:

· A distância do ponto B ao ponto O depende do ângulo AOB.

A área do triângulo AOB depende do comprimento do segmento OB.

Os ângulos OAB e ABO dependem do ângulo AOB.

Nos deteremos agora à relação distância de B à O em função do ângulo AOB, calculando sua expressão analítica. Podemos perceber que enquanto o ângulo AOB cresce, a distância de B à O varia, ou seja, ora aumenta, ora diminui. Vamos ver como fica o desenvolvimento da equação, utilizando a Lei dos cossenos para a resolução.

$$\begin{aligned} y &= \text{medida do segmento OB} \\ a &= \text{ângulo AOB} \end{aligned}$$

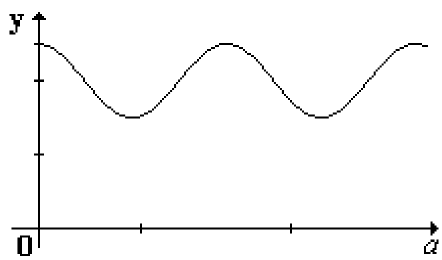
$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 - 2 * AO * OB * \cos a$$

$$(OB)^2 - (2AO\cos a)OB + (AO)^2 + (OB)^2 - (AB)^2 = 0$$

$$(OB) = \frac{2AO\cos a \pm \sqrt{(2AO\cos a)^2 - 4\,(AO)^2 - 4\,(OB)^2}}{2}$$

$$(OB) = AO\cos a \pm \sqrt{(AO\cos a)^2 - (AO)^2 - (OB)^2}$$

Abaixo temos o gráfico que representa a situação estudada.

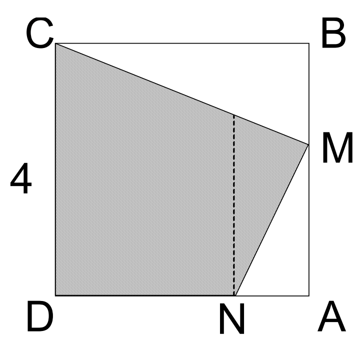


8.10 Mecanismo 5

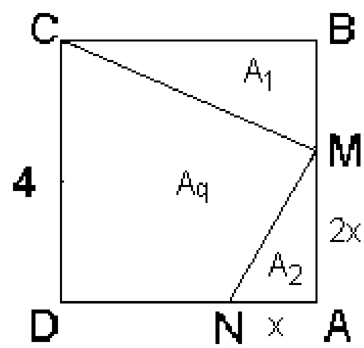
Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado igual a 4. Os pontos M e N, deslocam-se sobre os lados AB e AD de modo que se tenha AM = 2.AN. Se AN = x, determina:

a) a área S do quadrilátero MCDN, em função de x;

b) o valor de x para que a área desse quadrilátero seja máxima;



8.11 Resolução do Mecanismo 4



Note que a Área do quadrilátero A_q é a área do quadrado menos as áreas A_1 e A_2, logo podemos escrever

$$A_q = 16 - A_2 - A_1$$

A área A_2 é a área do triângulo AMN e é fácil ver que

$$A_2 = \frac{2x * x}{2} = x^2$$

A área A_1 é a área do triângulo BCM, considerando BC como sendo a altura do triângulo BCM temos

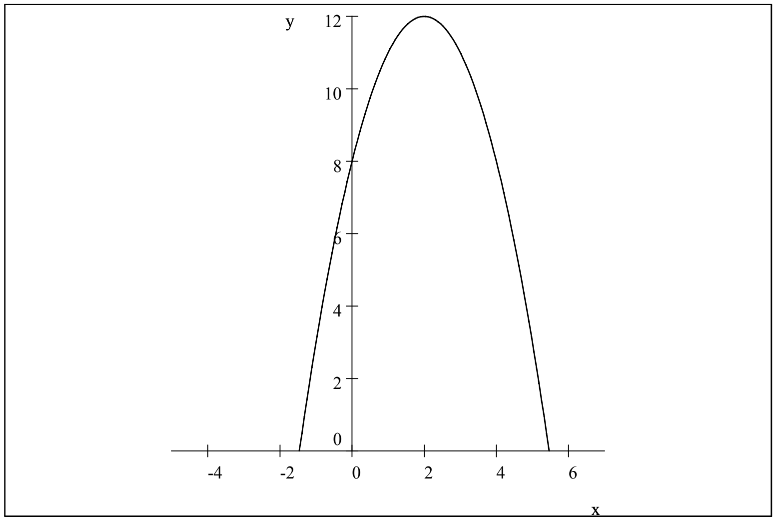
$$A_1 = \frac{(4-2x)\,4}{2} = 8 - 4x$$

$$A_q = 16 - x^2 - (8 - 4x)$$

$$A_q = -x^2 + 4x + 8$$

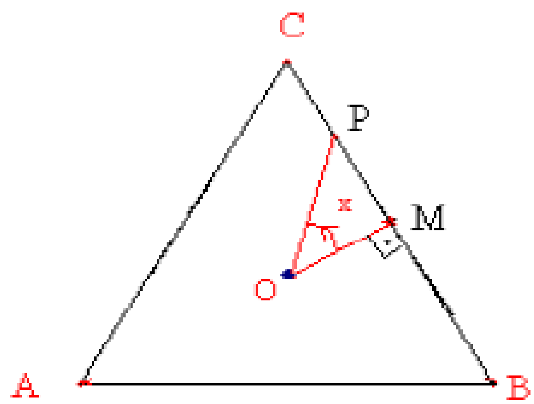
Abaixo temos o gráfico que representa a área do quadrilátero em função do lado AN dos dois triângulos.

$y = -x^2 + 4x + 8$



8.12 Mecanismo 6

Considere o triângulo eqüilátero de vértices C B A , representado pela Figura abaixo, em que AB=4 cm e o ponto O é o ponto de interseção das alturas, isto é, o ortocentro do triângulo. Além disso, seja M o ponto médio do segmento BC . Se x é o ângulo POM para cada ponto P pertencente a qualquer um dos lados do triângulo medido em radianos no sentido anti-horário, e f é a função que a cada ângulo x associa a distância de O até P definida. Neste mecanismo, o ponto P é ligado ao centro O por um elástico , a medida que o ponto P se desloca em cima dos lados do triângulo, o comprimento do elástico varia de acordo com o ângulo formado pelo elástico e pelo segmento OM. Quem são as variáveis envolvidas, qual a expressão da função f.

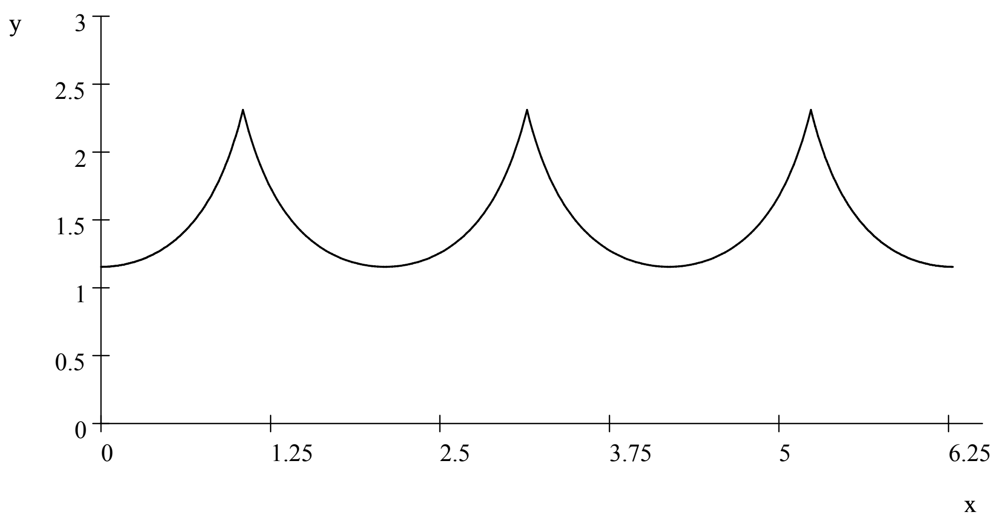


8.13 Resolução do Mecanismo 6

Considere o triângulo eqüilátero de vértices C B A , representado pela Figura acima, em que AB 4 =cm e o ponto O é o ponto de interseção das alturas, isto é, o ortocentro do triângulo. Além disso, seja M o ponto médio do segmento BC . Se x é o ângulo POM para cada ponto P pertencente a qualquer um dos lados do triângulo medido em radianos no sentido anti-horário, e f é a função que a cada ângulo x associa a distância de O até P definida. Neste mecanismo, o ponto P é ligado ao centro O por um elástico , a medida que o ponto P se desloca em cima dos lados do triângulo, o comprimento do elástico varia de acordo com o ângulo formado pelo elástico e pelo segmento OM. Quem são as variáveis envolvidas, qual a expressão da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}}{3\cos x} & \text{if} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} sinx - \frac{3}{2}\cos x} & \text{if} \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2} sinx - \frac{3}{2}\cos x} & \text{if} \quad \pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3\cos x} & \text{if} \quad \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

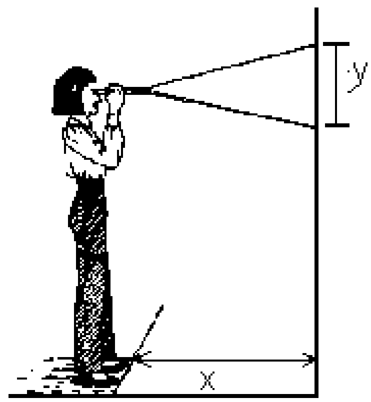
Gráfico da função



9 Experimentos

9.1 Experimento 1 - Olhando através de tubos

Neste experimento, a medida da imagem visualizada é função da distância em que você se encontra da parede. Consideremos a distância que você se encontra da parede como sendo a variável independente e a medida da imagem que você enxerga como a variável dependente



Equipamento

· Cilindros ocos de tamanhos diferentes e mesmo diâmetro, um por grupo (canos, rolos de papel);

· Trenas, duas por grupo. Este material pode ser confeccionado pelo grupo para facilitar a visualização das medidas.

· Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

· trabalhar em grupo de dois ou três;

· utilizar sempre o mesmo tubo nesta atividade;

· fixar uma trena na parede;

· posicionar-se a uma distância x da parede e visualizar a trena fixada (y);

· anotar numa tabela os valores de x e y;

· repetir algumas vezes este procedimento, para valores diferentes de x;

· construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (distância da parede x medida da imagem) a partir dos valores obtidos para x e y.

Organização e Análise dos Resultados

1) Encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda:

a) Se dobrarmos a distância que estamos da parede, dobra o tamanho da imagem visualizada?

2) Deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

Resolução do Experimento 1

Resolução do Experimento 1 - Parte I

Mostraremos primeiro o exemplo de coleta de dados que realizamos.

$x - Distância\ da\ parede$	$y - Medida\ da\ imagem\ visualizada$
$40cm$	$9cm$
$70cm$	$15cm$
$100cm$	$20,5cm$
$130cm$	$25,5cm$
$160cm$	$32cm$
$190cm$	$40cm$
$220cm$	$45cm$
$250cm$	$52cm$
$280cm$	$58,5cm$

Depois da coleta de dados, construímos um gráfico com os pontos obtidos. Percebemos que o esboço do gráfico aproximava-se de uma reta, então obtivemos a relação abaixo, através da equação da reta que passa por dois pontos:

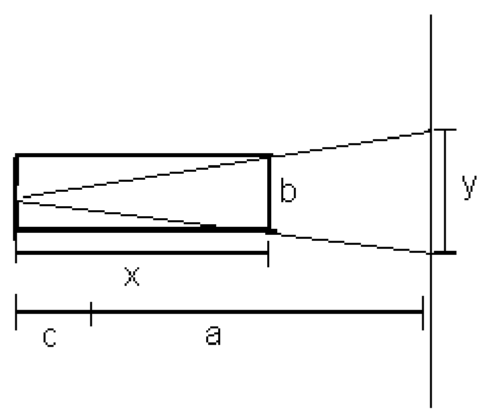
$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{7 - 5}{50 - 30}(x - 30)$$

$$y = \frac{1}{10}x + 2$$

Deduziremos agora a equação a partir da situação geométrica.

Observando a figura abaixo, temos que:



x é a distância que você está da parede, medida a partir da ponta de seus pés

y é a medida da imagem que você enxerga na parede

a é a medida do comprimento do tubo

b é a medida do diâmetro do tubo

c é a medida do que falta do tubo, que se encontra antes da ponta de seus pés

Observando, notamos que há, na figura, dois triângulos semelhantes; um deles de altura "a" e base "b", compreendido dentro do tubo, e outro de altura "x + c" e base "y", que se prolonga até a parede.

Então, se considerarmos a semelhança dos dois triângulos, temos a seguinte proporção:

$$\frac{y}{b} = \frac{x+c}{a}$$
$$y = \frac{b\,(x+c)}{a}$$
$$y = \frac{b}{a}x + \frac{bc}{a}$$

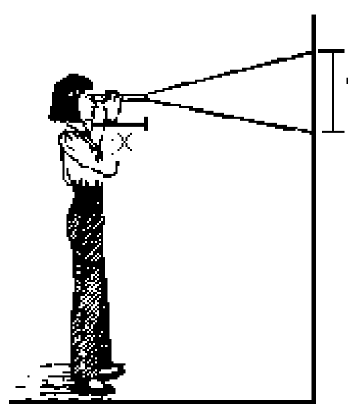
Como sabemos que "a", "b" e "c" são valores constantes, podemos considerar (b/a)= m e (cb)/a = n. Daí, temos que:

$$y = mx + n$$

Como podemos perceber, encontramos uma equação de reta tanto no experimento quanto na dedução geométrica. Calcularemos, a partir da equação final, as medidas do nosso tubo.

9.2 Experimento 2

Neste experimento, a medida da imagem visualizada é função do comprimento do tubo, mantendo fixa sua distância da parede. Consideremos o comprimento do tubo como sendo a variável independente e a medida da imagem que você enxerga como sendo a variável dependente.



Equipamento

· Três cilindros ocos de comprimentos diferentes e mesmo diâmetro por grupo (sugestão: os tubos podem ser confeccionados com cartolina);

· Trenas, uma por grupo. Este material pode ser confeccionado pelo grupo para facilitar a visualização das medidas.

· Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

· trabalhar em grupo de dois ou três;

· medir o comprimento dos três tubos (x);

· fixar uma trena na parede;

· posicionar-se a uma distância fixa da parede e visualizar a trena (y);

· anotar numa tabela os valores de x e y;

· repetir o procedimento para cada tubo;

· construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (tamanho do tubo x medida da imagem) a partir dos valores obtidos para x e y.

Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda:

a) Se dobrarmos o comprimento do tubo, dobramos também a medida da imagem visualizada?

2. Deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

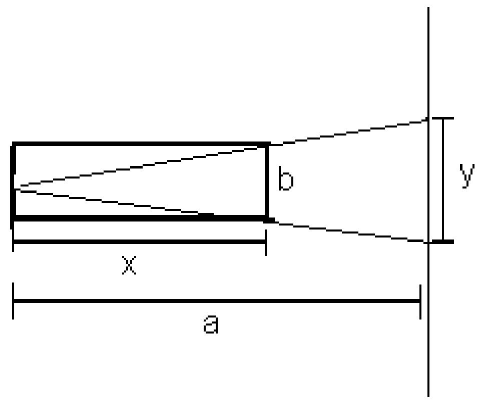
Solução

Mostraremos primeiro o exemplo de coleta de dados que realizamos.

$x - Comprimento\ do\ tubo$	$y - Medida\ da\ imagem\ visualizada$
$5cm$	$97cm$
$10cm$	$52cm$
$15cm$	$36,5cm$
$20cm$	$30cm$
$25cm$	$24cm$
$30cm$	$18cm$
$35cm$	$17,5cm$
$40cm$	$14,5cm$
$45cm$	$12,5cm$
$50cm$	$12cm$

Deduziremos agora a equação a partir da situação geométrica.

Observando a figura abaixo, temos que:



x é a medida do comprimento do tubo
y é a medida da imagem que você enxerga na parede
a é a medida da distância do início do tubo até a parede
b é a medida do diâmetro do tubo

Observando, notamos que há, na figura, dois triângulos semelhantes; um deles de altura "x" e base "b", compreendido dentro do tubo, e outro de altura "a" e base "y", que se prolonga até a parede.

Então, se considerarmos a semelhança dos dois triângulos, temos a seguinte proporção:

$y/b = a/x$

$y = ab/x$

Como sabemos que "a" e "b" são valores constantes, podemos considerar ab = c. Daí, temos que:

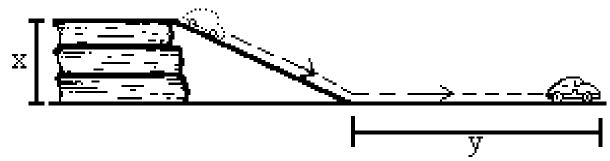
$y = c/x$

Esta é a equação de uma hipérbole, ou seja, uma relação inversamente proporcional. Se o gráfico que você encontrou no seu experimento for uma hipérbole, você pode ter acertado. Para conferir, basta verificar se o valor constante "c" está de acordo com a equação que acabamos de deduzir.

9.3 Experimento 3 - Medindo o alcance

9.3.1 Parte 1

Neste experimento, o alcance do carrinho é função da altura que a rampa se encontra do chão. Vamos considerar como variável independente a altura da rampa e como variável dependente a distância que o carrinho percorre depois da rampa.



Equipamento

- · Um carrinho de brinquedo por grupo;
- · Uma rampa por grupo;
- · Blocos, livros ou outro material para elevar a rampa;
- · Uma régua por grupo;
- · Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Obs: Se o experimento for realizado sobre um carpete ou tapete, utilizar bolinhas de gude no lugar de carrinhos, devido ao atrito.

Procedimento

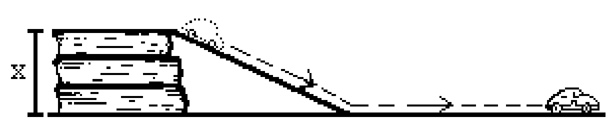
- · trabalhar em grupos de dois ou três;
- · montar a rampa, colocando-a inclinada sobre os livros;
- · medir a altura da rampa(x);
- · soltar o carrinho de cima da rampa;
- · medir o alcance do carrinho, a partir do final da rampa(y);
- · anotar numa tabela os valores de x e y correspondentes;
- · repetir algumas vezes este procedimento, com valores diferentes de x;
- · construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (altura da rampa x alcance do carrinho) a partir dos valores obtidos para x e y.

Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada.

9.3.2 Parte 2

Neste experimento, o tempo que o carrinho leva para descer a rampa é função da altura da rampa. Vamos considerar como variável independente a altura que a rampa se encontra do chão e como variável dependente o tempo que o carrinho leva para descer a rampa.



Equipamento

· Um carrinho de brinquedo por grupo;
· Uma rampa por grupo;
· Blocos, livros ou outro material para elevar a rampa;
· Uma régua por grupo;
· Um cronômetro por grupo;
· Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Obs: Se o experimento for realizado sobre um carpete ou tapete, utilizar bolinhas de gude no lugar de carrinhos, devido ao atrito.

Procedimento

· trabalhar em grupos de dois ou três;
· montar a rampa, colocando-a inclinada sobre os livros;
· medir a altura da rampa(x);
· soltar o carrinho de cima da rampa;
· medir o tempo que o carrinho levou para descer a rampa(y), com o auxílio do cronômetro;
· anotar numa tabela os valores de x e y correspondentes;
· repetir algumas vezes este procedimento, com valores diferentes de x;
· construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (altura da rampa x tempo decorrido) a partir dos valores obtidos para x e y.

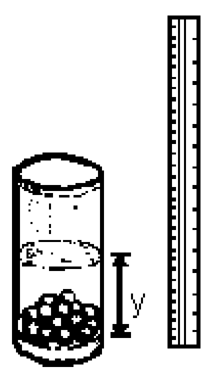
Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada.

10 Experimento 3 - Observando o nível de água em um copo

10.0.3 Parte 1

Neste experimento, o nível da água no copo é função do número de bolinhas de gude que colocamos dentro do copo. Vamos considerar o número de bolinhas como a variável independente e o nível de água como variável dependente.



Equipamento

· Um copo cilíndrico por grupo;
· Várias bolinhas de gude;
· Uma régua por grupo;
· Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

· trabalhar em grupos de dois ou três;
· colocar água no do copo até atingir uma altura de 6cm;
· coloque as bolinhas de gude no copo com água(5 bolinhas de cada vez) e anote numa tabela o nível que está a água;
· construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (número de bolinhas x nível da água) a partir dos valores que você obteve.

Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda:

a) A medida que acrescentamos bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo?

b) Quantas bolinhas de gude deve-se colocar para que a água fique no limite da borda do copo?

c) Que altura teremos se colocarmos somente 1 bolinha no copo? E se colocarmos 9 bolinhas?

d) Como você explica o fato do gráfico ter dado uma reta?

e) Mudando o tamanho das bolinhas e/ou o raio do copo, o que muda na expressão da função?

2. Deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

Começaremos mostrando o experimento que realizamos.

$x - Número de bolinhas$	$y - Nível de água$
5	$6,35cm$
10	$6,7cm$
15	$7,15cm$

Depois da coleta de dados, construímos um gráfico com os pontos obtidos. Percebemos que o esboço do gráfico aproximava-se de uma reta, então obtivemos a relação abaixo, através da equação da reta que passa por dois pontos:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - 6.35) = \frac{6.7 - 6.35}{2 - 1}(x - 1)$$

$$y = 0,35x + 6$$

Deduziremos agora a equação a partir da situação geométrica.

Para resolver este problema, temos que considerar dois volumes importantes: o volume de água inicial do copo, que pode ser obtido, uma vez que temos todas as informações necessárias para calculá-lo; e o volume de cada bolinha de gude, que também podemos obter facilmente se medirmos o seu raio.

volume inicial de água = volume do cilindro (copo) de altura 6cm = 6.Pi.R2
onde "R" é o raio do copo

volume de cada bolinha de gude = volume da esfera = 4.Pi.r3/3
onde "r" é o raio da bolinha de gude

Entretanto, não colocamos apenas 1 bolinha de cada vez no copo, colocamos 5 bolinhas. Então devemos multiplicar o volume de uma bolinha por 5: 20.Pi.r3/3

Como a variável "y" é a altura do nível que água atinge de acordo com o número de bolinhas que colocamos no copo, ela aumenta conforme aumenta o volume total do copo (volume inicial de água + volume de bolinhas colocadas). Então temos o seguinte:

volume total do copo = volume inicial de água + volume das bolinhas colocadas

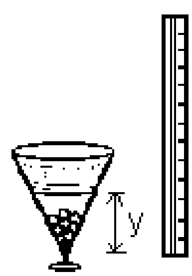
Como "20r3/3R2" é um número constante, podemos substituí-lo por "a", obtendo assim:

y = ax + 6

Esta é a equação de uma reta, ou seja, a função do nosso experimento é linear.

10.0.4 Parte 2

Neste experimento, o nível da água no copo é função do número de bolinhas que colocamos dentro do copo. Vamos considerar o número de bolinhas de gude como a variável independente e o nível de água como variável dependente.



Equipamento

- Um copo de cerveja em formato de cone por grupo;
- Várias bolinhas de gude;
- Uma régua por grupo;
- Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

- trabalhar em grupos de dois ou três;
- colocar água no do copo de cerveja até atingir uma altura de 6cm;

· coloque as bolinhas de gude no copo com água(5 bolinhas de cada vez) e anote numa tabela o nível que está a água;

· construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (número de bolinhas x nível da água) a partir dos valores que você obteve.

Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada. A partir dessa equação, responda:

a) Por que o gráfico desse experimento não deu uma reta?

b) Qual o comportamento desta função quando colocamos cada vez mais bolinhas no copo?

c) Você seria capaz de explicar a diferança entre o comportamento dos dois copos (cilíndrico e cônico)?

2. Deduza uma relação entre x e y a partir da situação geométrica.

Solução

Começaremos mostrando o experimento que realizamos.

$x - Númerodebolinhas$	$y - Níveldeágua$
5	$6,75cm$
10	$7,20cm$
15	$7,50cm$

Deduziremos agora a equação a partir da situação geométrica.

Para resolver este problema, temos que considerar dois volumes importantes: o volume de água inicial do copo, que pode ser obtido, uma vez que temos todas as informações necessárias para calculá-lo; e o volume de cada bolinha de gude, que também podemos obter facilmente se medirmos o seu raio. Vamos considerar o copo como um cone perfeito.

volume inicial de água = volume do cone (copo) de altura 6cm = 2.Pi.R2

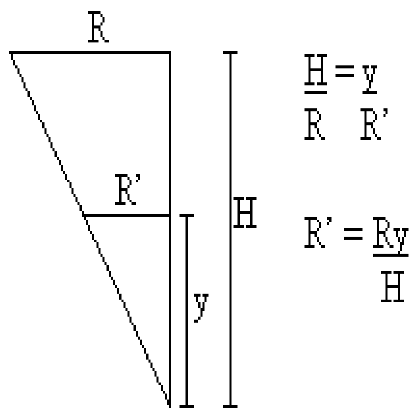
onde "R" é o raio do copo

volume de cada bolinha de gude = volume da esfera = 4.Pi.r3/3

onde "r" é o raio da bolinha de gude

Entretanto, não colocamos apenas 1 bolinha de cada vez no copo, colocamos 5 bolinhas. Então devemos multiplicar o volume de uma bolinha por 5: 20.Pi.r3/3

Precisamos ainda encontrar uma relação que represente o raio do cone em função da altura que a água se encontra em determinado momento, porque temos um copo cônico, e a medida que o nível de água sobe, seu raio aumenta. Resolveremos isso através da semelhança de triângulos da secção do cone:



Como a variável "y" é a altura do nível que água atinge de acordo com o número de bolinhas que colocamos no copo, ela aumenta conforme aumenta o volume total do copo (volume inicial de água + volume de bolinhas colocadas). Então temos o seguinte:

$$\pi.R'^2.y = \frac{20.\pi.r^3.x}{3} + 2.\pi.R_6^2$$

$$\left(\frac{R\,y}{H}\right)^2 y = 20.r^3.x + 6.R_6^2$$

$$\frac{R}{H}\,y^3 = 20.r^3.x + 6.R_6^2$$

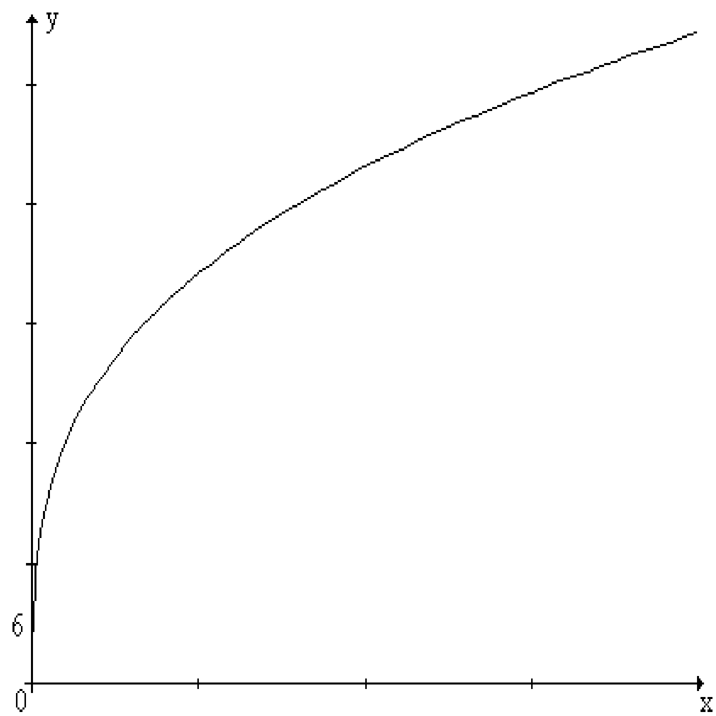
$$y^3 = \frac{20.r^3.H}{R}\,x + \frac{6.R_6^2.H}{R}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{20.r^3.H}{R}\,x + \frac{6.R_6^2.H}{R}}$$

Substituindo os valores constantes por "a" e "b", temos:

$$y = \sqrt[3]{ax+b}$$

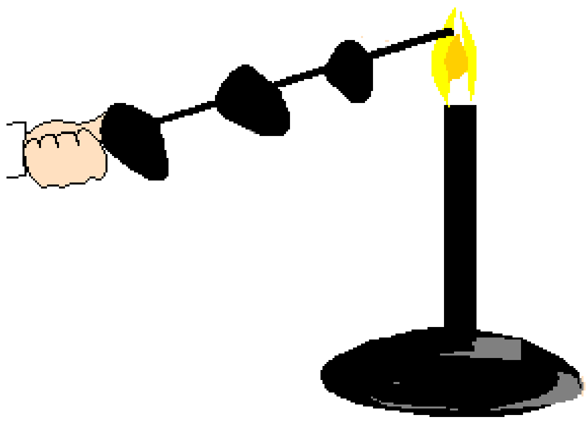
Enfim, como acabamos de deduzir, a equação do nosso experimento é uma raiz cúbica. Seu comportamento é diferente da primeira parte, quando o copo era cilíndrico, pois, neste caso, mesmo que se acrescente sempre o mesmo número de bolinhas, a variação do nível de água é cada vez menor, como mostra o gráfico abaixo.



* Experimento adaptado do livro Algebra Experiments I, de Mary Jean Winter e Ronald J. Carlson

11 Experimento 4 - Medindo a condução do calor

Pingue parafina (de uma vela) em um arame a cada 8 cm e, enquanto a parafina estiver mole, grude um prego em cada gota. Use 7 pregos pequenos, coloque um prega a cada um cm. Depois que a parafina esfriar acenda a vela e segurando o arame com um prendedor de roupa, ou um isolante, aqueça a ponta do arame.



Equipamento

· Um pedaço de arame de 10 cm de comprimento
· 7 Pregos pequenos
· Vela e uma caixa de fósforos
· Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

· trabalhar em grupos de dois ou três;
medir o tempo de queda de cada prego
tabular as medidas, espaço versus tempo de queda de cada prego

Organização e Análise dos Resultados

1. Encontre uma possível equação para a situação trabalhada.

·