Capítulo 1

Números Reais, Intervalos e Funções

Objetivos

- Identificar os conjuntos numéricos;
- Conhecer e aplicar as propriedades relativas à adição e multiplicação de números reais;
- Utilizar as propriedades relacionadas com as desigualdades estritas e não estritas;
- Operar com equações e inequações com e sem valor absoluto;
- Determinar o campo de definição de uma função;
- Operar com funções;
- Obter funções compostas;
- Identificar funções pares, ímpares e periódicas;
- Determinar a inversa de uma função;
- Esboçar gráficos de funções usando translação;
- Reconhecer os tipos de funções: polinomiais; racionais; irracionais; potenciais; exponenciais; logarítmicas; trigonométricas; hiperbólicas; e hiperbólicas inversas;

1.1 Números

Os primeiros números conhecidos foram os *Números Contáveis*, ou seja, o conjunto dos *Números Naturais*, representado por $\mathbb{N}$, isto é:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

As operações com os números naturais foram responsáveis pela criação dos números negativos, assim:

$$x + a = b \Rightarrow x = b - a,$$

onde a e b são números naturais.

Estes números, juntamente com os números naturais formam o conjunto dos *Números Inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$, isto é:

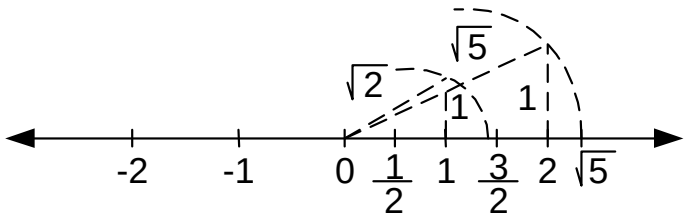
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

A resolução de equações do tipo

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a},$$

com a e b números inteiros onde a não é nulo, pode levar ao surgimento de números não inteiros. Desta forma, os números da forma $\frac{b}{a}$ com a e b números inteiros e $a \neq 0$ formam um conjunto de números, denominado *Números Racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. E os números (frações) decimais infinitos não periódicos são denominados *Números Irracionais*, representados por $\Im$. São exemplos de números irracionais: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Observando a reta numerada, vemos que a todos os pontos foram atribuídos números. Temos, então que, a reunião dos números racionais com os números irracionais se denomina conjunto dos *Números Reais*, representado por $\mathbb{R}$.



Como o cálculo envolve números reais, vejamos algumas definições e propriedades fundamentais destes números, embora não tenhamos interesse em mostrar como estas propriedades são tiradas dos axiomas e teoremas.

Definição 1:

Soma: $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\,(a + b) \in \mathbb{R}$

Produto: $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\,(a.b) \in \mathbb{R}$,

satisfazendo as propriedades:

1. **Comutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a + b = b + a \\ a.b = b.a \end{cases}$;

2. **Associativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a.\,(b.c) = a.\,(b.c) \end{cases}$;

3. **Existência de elemento neutro:** $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} \;/\; a + 0 = 0 + a = a \\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R} \;/\; a.1 = 1.a = a \end{cases}$;

4. **Elemento oposto:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} \;/\; a + (-a) = (-a) + a = 0$;

5. **Elemento inverso:** $\forall a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $\exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} \;/\; a.\,(a^{-1}) = (a^{-1})\,.a = 1$;

6. **Distributiva**: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a.\,(b + c) = a.b + a.c$.

Definição 2: *Subtração:* $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\,(a - b) \in \mathbb{R}$.

Definição 3: *Divisão:* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, $\exists\, \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

1.2 Desigualdades

Axioma de Ordem: No conjunto dos números reais, existe um subconjunto, $\mathbb{R}_+$, dito reais positivos, tais que:

1. se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações é verdadeira: $a = 0$, a é positivo ou $-a$ é positivo;

2. a soma e o produto de reais positivos é um número real positivo;

Definição 4: O número real a é *negativo* se, e somente se, $-a$ é positivo.

Definição 5: *Desigualdade Estrita*
Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos por:

i. $a < b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo;
ii. $a > b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo.

Definição 6: *Desigualdade Não Estrita*
Os símbolos $\leq$ (menor ou igual) e $\geq$ (maior ou igual) são definidos por:

i. $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a = b$;
ii. $a \geq b$ se, e somente se, $a > b$ ou $a = b$.

As desigualdades definidas acima, satisfazem as propriedades:

1. $a > 0$ se, e somentes se, a é positivo;

2. $a < 0$ se, e somentes se, a é negativo;

3. $a > 0$ se, e somentes se, $-a$ é negativo;

4. $a < 0$ se, e somentes se, $-a$ é positivo;
5. *Transitiva:* Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
6. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c < b + c$;
7. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
8. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_+$, então $a.c < b.c$;
9. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_-$, então $a.c > b.c$;
10. Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $a.c < b.d$;
11. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$;
12. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c > b + c$;
13. Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$;
14. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $a.c > b.c$;
15. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_-^*$, então $a.c < b.c$;
16. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $a.c > b.d$;
17. Se $a < b$, com ambos positivos ou negativos, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

1.3 Intervalos

Definição 7: *Intervalos* são conjuntos infinitos de números reais. Geometricamente, correspondem a segmentos de reta sobre um eixo coordenado. Por exemplo, se $a < b$, então o *intervalo aberto* de a a b, denotado por (a, b), é o segmento de reta que se estende de a até b, excluindo-se os extremos; e o *intervalo fechado* de a até b, denotado por $[a, b]$, é o segmento de reta que se estende de a até b, incluindo-se os extremos. Estes intervalos podem ser expressos na notação de conjuntos como

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\};$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}.$$

.

Um intervalo pode incluir um extremo, mas não outro. Estes intervalos são chamados *semi-abertos* (ou, algumas vezes, *semi-fechados*). Além disso, é possível um intervalo estender-se indefinidamente em uma ou em outra direção, escrevemos $+\infty$ no lugar do extremo direito, e para indicar que o intervalo se estende indefinidamente na direção negativa, escrevemos $-\infty$, no lugar do extremo esquerdo. Os intervalos que se estendem entre dois números reais são chamados de *intervalos finitos*, enquanto que os que se estendem indefinidamente em uma ou em ambas as direções são chamados de *intervalos infinitos.*

Notação de Intervalo	Notação de Conjuntos	Classificação
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$	Finito; aberto
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$	Finito; fechado
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$	Finito; semi-aberto
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$	Finito; semi-aberto
$(-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\}$	Infinito; fechado
$(-\infty,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$	Infinito; aberto
$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$	Infinito; fechado
$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$	Infinito; aberto
$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$	Infinito; aberto e fechado

Exemplo 2: Determinar os valores de x que satisfazem a desigualdades:

1. $x^2 - 3x \leq 10$;

   Solução:

   Subtraindo-se 10 em ambos os lados, obtém-se a inequação:

   $$x^2 - 3x - 10 \leq 0. \qquad (1)$$

   As raízes da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$ são -2 e 5.

   Estas raízes dividem o eixo coordenado em três intervalos abertos: $(-\infty,-2)\,,(-2,5)$ e $(5,+\infty)\,.$

   Analisando os sinais de $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ em cada intervalo, temos que:

Intervalo	Ponto de teste	Sinal $(x+2)(x-5)$ no ponto de teste
$(-\infty,-2)$	-3	$(-)(-) = +$
$(-2,5)$	0	$(+)(-) = -$
$(5,+\infty)$	6	$(+)(+) = +$

   Portanto, a solução da desigualdade (1) é $S = [-2,5]\,.$

2. $2x - 5 < \frac{1}{x-1} \qquad (*)$

   Solução:

   Condição de existência de solução: $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1.$

   Observe que $x - 1$ pode ser positivo ou negativo. Assim, temos 2 casos a serem analisados:

1° ***Caso:*** Para $x - 1 < 0$, ou seja, $x < 1$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x - 1\,,$ temos que:

$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \ \Rightarrow \ (2x-5)(x-1) > 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 7x + 4 > 0. \qquad (**)$

Resolvendo a equação $2x^2 - 7x + 4 = 0$ conclui-se $\frac{7+\sqrt{17}}{4} = 2.\,780\,8$ e $\frac{7-\sqrt{17}}{4} = 0.719\,22$ são suas raízes

Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$ e $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, obtém-se que a solução da desigualdade $(**)$ é $I_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right).$

Dessa forma, neste intervalo, a solução é $S_1 = I_1 \cap (-\infty, 1) \Rightarrow S_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$.

2° ***Caso:*** Para $x - 1 > 0$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x - 1$, temos que:
$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \Rightarrow (2x-5)(x-1) < 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 < 0.$
A solução dessa desigualdade é $I_2 = \left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Logo, neste intervalo a solução é $S_2 = I_2 \cap (1, +\infty) \Rightarrow S_2 = \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

1.4 Valor Absoluto

Definição 8: O *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x é definido e representado por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Vemos que o valor absoluto de um número real é sempre não negativo. Geometricamente, o valor absoluto de um número real x é sua distância do ponto de origem, independentemente de sua direção.

Exemplo 1: $|7-4| = |3| = 3$ *e* $|4-7| = |-3| = 3$.
Vemos que $|7-4| = |4-7|$ é a distância entre 4 e 7 sem a preocupação com qual dos números é maior.

1.4.1 Propriedades do Valor Absoluto

Sejam x e y dois números reais.

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| \geq x$;
3. $|-x| = |x|$;

   A demonstração da cada uma das propriedades acima, decorre diretamente da definição.

4. $|x|^2 = x^2$e $|x| = \sqrt{x^2}$;
   Demonstração:

   (a) *Se* $x \geq 0$, *então da definição vem que,* $|-x| = |x|$ *que verifica a proposição;*

   (b) *Se* $x < 0$, *então da definição vem que,* $|-x| = |x|$ *e* $(-x)^2 = x^2$, *de onde* $|x|^2 = x^2 e$, *por conseguinte,* $|x| = \sqrt{x^2}$.

5. $|xy| = |x| \, . \, |y|$;
   Demonstração:

   Pela propriedade 4, temos que: $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x| \, . \, |y| \, .$

6. **Desigualdade triangular:** $|x + y| \leq |x| + |y|$;
   Demonstração:
   Pela propriedade 4, temos que:
   $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\,|xy| + y^2$
   $\Rightarrow |x + y|^2 \leq |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$
   $\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$.

7. $|x| - |y| \leq |x - y| \, ;$
   Demonstração:
   Fazendo $x = x + y - y$ *e da propriedade* 6, *segue que:*

$$|x| = |x + y - y| \leq |x - y| + |y| \, .$$

   Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x| - |y| \leq |x - y| \, .$$

8. $|x| - |y| \leq |x + y| \, ;$
   Demonstração:
   Fazendo $x = x + y - y$ *e da propriedade f vem que*

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \, .$$

   Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x| - |y| \leq |x + y| \, .$$

9. $|x-y| \leq |x| + |y|$;

   Demonstração:

   Observe que:

$$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| \leq |x| + |y|\,.$$

10. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$.

    Demonstração:

    Note que:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x.\frac{1}{y}\right| = |x|\,.\left|\frac{1}{y}\right| = |x|\,.\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

11. Seja a um número real positivo, então:

    (a) $|x| < a$ se, e somente se, $-a < x < a$;

    (b) $|x| \leq a$ se, e somente se, $-a \leq x \leq a$

    (c) $|x| > a$ se, e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

    (d) $|x| \geq a$ se, e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

    Demonstração: Somente do caso (a)

    Inicalmente, provaremos que $|x| < a$ se $-a < x < a$:

    i. Se $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, uma vez que $x < a$ teremos $|x| < a$;
    ii. Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, uma vez que , mas $x < a$ teremos $-x < a$, mas $|-x| = x$, então $|x| < a$.

    Portanto $|x| < a$ se $-a < x < a$.

    Agora, mostraremos que $|x| < a$ somente se $-a < x < a$:

    i. Se $x \geq 0$, como $|x| = a$, teremos $x < a$, como $a > 0$ e $-a < 0$, então $-a < 0 < x < a$ de onde vem que $-a < x < a$.

    ii.Se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, como $|x| < a$ teremos que $-x < a$ e com $-x > 0$, então $-a < 0 < -x < a$ ou $-a < -x < a$, de onde vem que $-a < x < a$.

    Portanto, $|x| < a$ se, e somente se, $-a < x < a$.

    Observação 1: A demonstração dos casos (b), (c) e (d) é análoga.

    Exemplo 2: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$|x-5| < |x+1|\,.$$

    Solução 1:
    Elevando ao quadrado ambos os lados e usando a propriedade 4, temos que:

$|x-5|^2 < |x+1|^2 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 < (x+1)^2$
$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$
$\Rightarrow \quad 12x > 24$, ou seja , $x > 2$.

Solução 2:
Pela definição de módulo, temos que:
$|x-5| = \begin{cases} x-5, \text{ se } x \geq 5 \\ -x+5, \text{ se } x < 5 \end{cases}$ e $|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$.

1° *Caso:* Se $x< -1$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \ \Rightarrow \quad -x+5 < -x-1 \quad \Rightarrow \quad 5 < 1$.*Absurdo!!!*
Logo, não há solução para $x< -1$, isto é, $S_0 = \{\}$.

2° *Caso:* Se $-1 \leq x < 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \ \Rightarrow \quad -x+5 < x+1 \quad \Rightarrow \ -2x < -4 \quad \Rightarrow \quad x < 2.$
Logo, a solução neste intervalo é $S_1 = (2, 5)$.

3° *Caso:* Se $x \geq 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \ \Rightarrow \quad x-5 < x+1 \ \Rightarrow \ 5 < 1.$
Como a desigualdade é satisfeita para qualquer $x \geq 5$, temos que a solução é todo $x \in (5, +\infty)$, ou seja, $S_2 = (5, +\infty)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 = (2, +\infty)$.

Exemplo 3: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade
$$|2x-1| < \tfrac{1}{x-2}. \qquad (*)$$
Solução:
Condição de existência de solução: $x \neq 2$
Pela definição de módulo, temos que:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, \text{ se } x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), \text{ se } x < \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Observe que $x-2$ pode ser positivo ou negativo. Assim, temos 3 casos a serem analisados:

1° ***Caso:*** Se $x < \frac{1}{2}$, temos que:

Para $x < \frac{1}{2}$, temos que $x - 2 < 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x-2$, temos que:
$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \ \Rightarrow \ -(2x-1)(x-2) > 1 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 5x - 3 > 0.$
Resolvendo a inequação $-2x^2 + 5x - 3 > 0$. $(**)$
Observe que $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ são raízes da equação $-2x^2 + 5x - 3 = 0$. Dessa forma, analisando os intervalos $(-\infty, 1)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, conclui-se que a solução da inequação $(**)$ é $I_1 = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.
Logo, neste intervalo não há solução, pois $I_1 \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) = \{\}$.

2° ***Caso:*** Se $\frac{1}{2} \leq x < 2$, temos que:

Para $\frac{1}{2} \leq x < 2$, temos que $x - 2 < 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x-2$, temos que:

$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \;\Rightarrow\; (2x-1)(x-2) > 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 5x + 1 > 0.$

Resolvendo a inequação $2x^2 - 5x + 1 > 0$. $(\star\star)$

Observe que $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ e $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ são raízes da equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Dessa forma, analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$ e $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, conclui-se que a solução da inequação $(**)$ é $I_2 = \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Logo, neste intervalo a solução é $S_2 = I_2 \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right) \;\Rightarrow\; S_2 = \{\}$.

3° ***Caso:*** Se $x > 2$, temos que:

Para $x > 2$, temos que $x - 2 > 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x-2$, temos que:

$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \;\Rightarrow\; (2x-1)(x-2) < 1 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 5x + 1 < 0.$

A solução da inequação $2x^2 - 5x + 1 < 0$ é $I_3 = \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Logo, neste intervalo é $S_3 = I_3 \cap (2, +\infty) \;\Rightarrow\; S_3 = \left(2, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \;\Rightarrow\; S_3 = \left(2, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Exemplo 4: Determin e todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{|x^2 - 1|} < 4x.$$

Solução:

Condição de existência de solução: $x^2 - 1 \;\Rightarrow\; x \neq \pm 1$.

Pela definição de módulo, temos que:

$$\left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x^2 - 1 > 0 \\ -(x^2 - 1), \text{ se } x^2 - 1 < 0 \end{cases}.$$

Resolvendo a inequação $x^2 - 1 > 0$, obtém-se que:

$$\left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -(x^2 - 1), \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Observe que: $\frac{x^4-5x^2+4}{|x^2-1|} = \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{|x^2-1|} < 4x.$ $(\#)$

Temos dois casos a serem analisados.

1° ***Caso:*** Se $x^2 - 1 > 0$:

Aplicando a definição de módulo em $(*)$, temos que:

$$x^2 - 4x - 4 < 0.$$

A solução dessa inequação é $I_1 = \left(2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

Logo, a solução é $S_1 = I_1 \cap [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)] \;\Rightarrow\; S_1 = \left(1, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

2° ***Caso:*** Se $x^2 - 1 < 0$:

Aplicando a definição de módulo em $(*)$, temos que:

$$x^2 + 4x - 4 > 0.$$

A solução dessa inequação é $I_2 = \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$.
Logo, a solução é $S_2 = I_2 \cap (-1, 1) \quad \Rightarrow \quad S_2 = \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

Exemplo 5: Resolva a equação $|x-3|^2 - 4\,|x-3| = 12$.
Solução:
Definindo $u = |x-3|$, temos que a equação acima pode ser escrita como

$$u^2 - 4u - 12 = 0 \qquad (1)$$

As raízes da equação (1) são -2 e 6.

$\star$ Para $u = -2$, segue que: $|x-3| = -2$. *Absurdo!!!!*
Por propriedade de módulo $|x| \geq 0$.

$\star$ Para $u = 6$, segue que: $|x-3| = 6 \qquad (2)$
Pela definição de módulo, temos que
$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \geq 3 \\ -(x-3), & \text{se } x < 3 \end{cases}$.

1º Caso: Se $x \geq 3$, temos que:
$x - 3 = 6 \Longrightarrow x = 9$
Como $9 \in [3, +\infty)$, segue que uma solução é $S_1 = \{9\}$.

2º Caso: Se $x < 3$, temos que:
$-x + 3 = 6 \Longrightarrow x = -3$
Como $-3 \in (-\infty, 3]$, segue que uma solução é $S_2 = \{-3\}$.
Portanto, a solução é $S = \{-3, 9\}$.

1.5 Função

Definição 9: Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma *função* $f : A \to B$ é uma lei (ou regra) de correspondência entre dois conjuntos não vazios, tal que a cada elemento de A se associa um único elemento de B. O conjunto A é chamado de *domínio de* f e é denotado por Df, B é chamado de *contradomínio* ou *campo de valores de* f. Denotamos por,

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Exemplo 6:

1. A área do quadrado (A) é função do comprimento do lado (l), ou seja, $A = l^2$..

2. A distância que alguém percorre (d) depende do tempo gasto (t). Representamos por $d = d(t)$.

Definição 10: Seja $f : A \to B$.

1. Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de *valor* da função f no ponto x ou de *imagem* de x por f.

2. O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado de *conjunto imagem de* f e é denotado por $\text{Im}\, f$.

1.5.1 Formas de Expressão das Funções

1. **Forma Tabular:** a correspondência entre os elementos é dada por meio de uma tabela.
Por exemplo, se $f(x_o) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $\cdots$, $f(x_n) = y_n$.

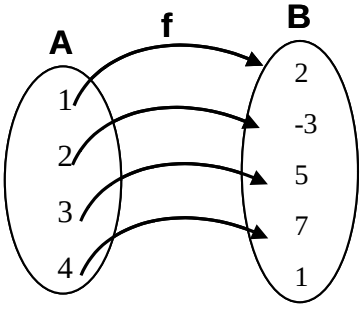
x	x_o	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Exemplo 7:

(a) Tábuas de logaritmos;
(b) Tabelas trigonométricas.

2. **Forma Gráfica:** A função pode ser escrita de duas formas:

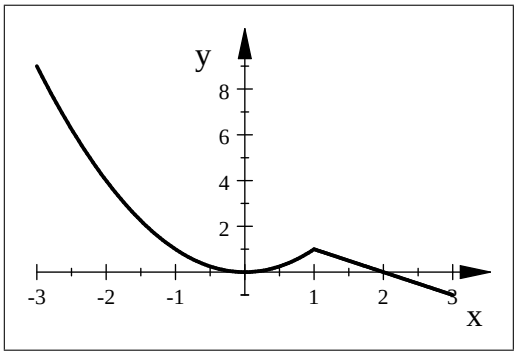
(a) **Diagrama de Ven-Euler:** As flechas indicam que a correspondência é do conjunto A para o conjunto B.



Observe que:

Domínio de f: $Df = A$;
Contradomínio de f: B;
Imgem de f : $\text{Im}\, f = \{2, -3, 5, 7\}$.

(b) **Diagrama Cartesiano:** As retas x e y são perpendiculares; x é chamado *eixo das abcissas* e y o *eixo das ordenadas.*



3. **Forma Analítica:** A função é escrita, segundo uma lei, denotada por $y = f(x)$. Exemplos:

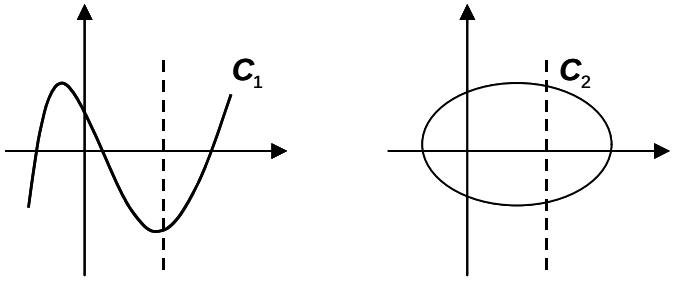
   (a) $f(x) = x^2$;
   Domínio: $Df = \mathbb{R}$;
   Imagem: $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$.

   (b) $g(t) = \frac{t}{t^2-4}$;
   Domínio: $Df = \{t \in \mathbb{R} : t \neq \pm 2\} \;\Rightarrow\; Df = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$;
   Imagem: $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$.

   (c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   Domínio: $Df = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} \;\Rightarrow\; Df = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
   $\Rightarrow\; Df = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
   Imagem: $\text{Im}\, f = [0, +\infty)$.

Na forma analítica, a segunda variável, x, a qual se pode atribuir valores arbitrários dentro dos limites impostos pela natureza do problema, é dita *variável independente* ou *argumento da função*, e a primeira variável y cujo valor é determinado quando se dá valores à variável independente é dita *variável dependente* ou simplesmente *função.*

Observação: Uma maneira rápida de saber se a curva C dada representa ou não uma função é através do *teste da reta vertical.* Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim, C só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva C no máximo em um ponto. Na figura abaixo, C_1 respresenta o gráfico de uma função, enquanto a curva C_2 não representa.



1.5.2 Operações com Funções

Definição 11: Dadas as funções f e g. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são definidas por:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$;
2. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio das funções $f \pm g$ e $f.g$ é a interseção dos domínios de f e g. O domínio de $\frac{f}{g}$ é a interseção dos domínios f e g, excluindo-se os pontos de x onde $g(x) = 0$.

Exemplo 8: Sejam $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Determine as funções $f \pm g$, $f.g$ e $\frac{f}{g}$ e seus domínios.

Solução: Pela definição acima, temos que:
$(f \pm g)(x) = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
$(f.g)(x) = (2x - 1)\sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.
Como $Df = \mathbb{R}$ e $Dg = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, então o domínio de $f \pm g$ e $f.g$ é $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Observação: Deve-se tomar cuidado, pois nem sempre a interseção dos domínios das novas funções é o domínio das funções resultantes. Por exemplo, se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ o domínio da função $h(x) = (f.g)(x) = x$ é $Dh = Df \cap Dg = [0, +\infty)$ e não $\mathbb{R}$ (que aparentemente seria o domínio da função $h(x)$).

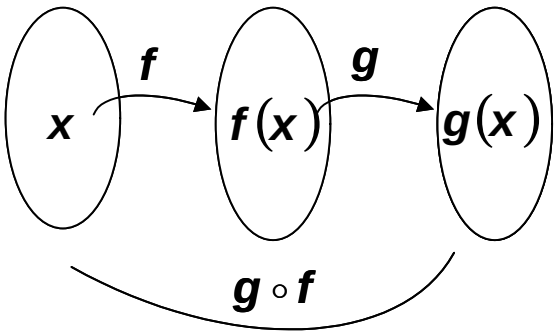
Definição 12: Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$ é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x do domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Simbolicamente,

$$D(g \circ f) = \{x \in Df : f(x) \in Dg\}.$$

O diagrama pode ser visualizado abaixo.



Exemplo 9: Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre a função $f_1(x) = (g \circ f)(x)$ e $f_2(x) = (f \circ g)(x)$.

Solução: Pela definição de função composta, temos que:

$f_1(x) = (g \circ f)(x) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$;

$f_2(x) = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = x + 3$.

Note que, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo 10: Sejam $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \sin(x^2 + 1)$. Encontre $f_1(x) = (f \circ g)(x)$ e $f_2(x) = (g \circ f \circ h)(x)$.

Solução: Pela definição de função composta, temos que:

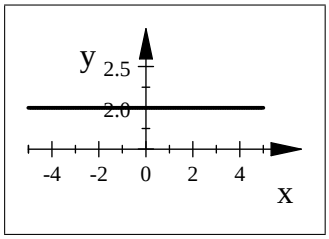
$f_1(x) = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x} = \frac{\ln x}{2}$.

$f_2(x) = (g \circ f \circ h)(x) = g(f(\sin(x^2 + 1))) = g(\ln(\sin(x^2 + 1))) = \sqrt{\ln(\sin(x^2 + 1))}$.

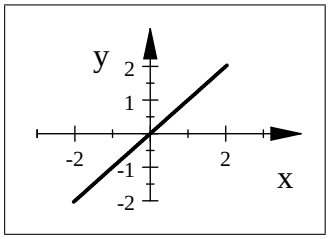
Determine o domínio dessas funções compostas!

1.5.3 Funções Especiais

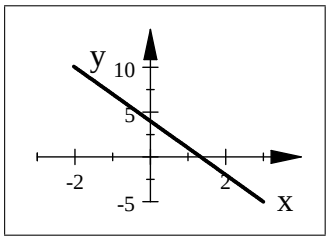
1. **Função constante:** $f : \mathbb{R} \to \{k\}$ definida por $f(x) = k$. Associa a qualquer númro real x um mesmo número real k. Graficamente, é uma reta paralela ao eixo das abcissas. Se $k = 2$, o gráfico é



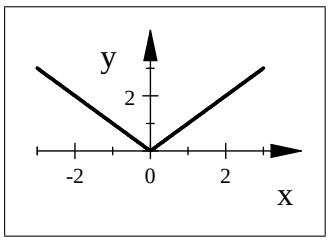
2. **Função Identidade:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. O gráfico é a reta bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante.



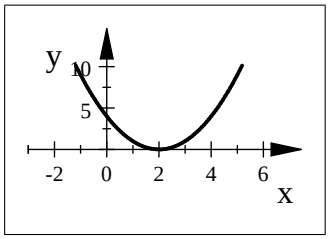
3. **Funções Lineares:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, onde a e b constantes e $a \neq 0$ são, respectivamente, o *coeficiente angular* e o *coeficiente linear*. O gráfico é uma reta. Se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a reta é decrescente; e se $b = 0$, a reta passa pela origem do sistema cartesiano. Exemplo: $f(x) = -3x + 4$.



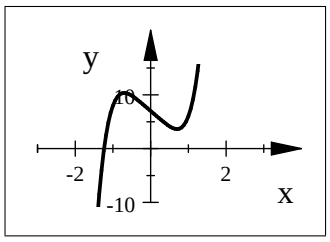
4. **Função Módulo:** $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = |x|$.



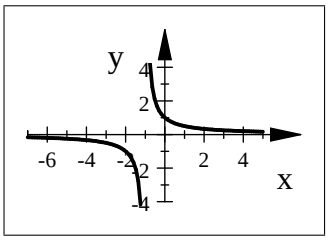
5. **Função Quadrática:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c constantes e $a \neq 0$. O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 4$



6. **Função polinomial:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, com a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, constantes reais, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e n é o grau do plonimômio. As funções constante, identidade, lineares e quadráticas são exemplos de funções polinomiais. Exemplo: $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$.



7. **Função Racional:** função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $q(x) \neq 0$. O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo todos os x tais que $q(x) \neq 0$. Exemplo: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.



1.5.4 Funções Pares, Ímpares e Periódicas

Definição 12: Uma função $f(x)$ é *par* se, para todo $x \in Df$,

$$f(-x) = f(x).$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

Definição 13: Uma função $f(x)$ é *ímpar* se, para todo $x \in Df$,

$$f(-x) = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Definição 14: Uma função $f(x)$ é *periódica* se existe um número real $T \neq 0$, tal que

$$f(x+T) = f(x).$$

para todo $x \in Df$. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

Exemplo 11: Classifique as funções abaixo, como par ou ímpar.

1. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$;
   Solução: $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 2 = x^4 + x^2 - 2 = f(x)$.
   Logo, f é uma função par.

2. $f(x) = 4x^3 + x^2$;
   Solução: $f(-x) = 4(-x)^3 + (-x)^2 = x^2 - 4x^3$.
   Logo, f não é uma função par nem ímpar.

3. $f(x) = x^7$;
   Solução: $f(-x) = (-x)^7 = -x^7 = -f(x)$.
   Logo, f é uma função ímpar.

Exemplo 12: Mostre que função $f(x) = \sin(2x)$ é peródica de perído $T = \pi$.

Solução: Pela definição de funções periódicas, temos que:
$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin 2x = f(x)$.
Portanto, $f(x) = \sin(2x)$ é peródica com perído $T = \pi$.

1.5.5 Funções Inversas

Seja $y = f(x) = x^3 + 1$. Nesta expressão, temos que y é uma função de x, mas podemos escrever x como uma função de y, ou seja, $x = g(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Observe que,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^3+1\right) = x;$$
$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\sqrt[3]{y-1}\right) = y.$$

Neste exemplo, compondo as funções f e g obtivemos as funções identidades. Os pares de funções com essas duas propriedades são chamadas de funções inversas.

Definição 15: Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$(g \circ f)(x) = x, \forall x \in Df,$$
$$(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Dg,$$

então, dizemos que f e g são *funções inversas*. Além disso, chamamos f *uma inversa de* g e g *uma inversa de* f.

Definição 16: Seja $y = f(x)$ uma função ou $f : A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \to A$. A função g definida desta maneira é chamada de inversa de f.

Exemplo 13: As funções $f(x) = x^3 + 1$ e $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ são funções inversas.

Uma função não pode ter duas inversas. Assim, se uma função f tiver uma inversa, a inversa é única. A inversa de uma função é comumente denotada por f^{-1} (*lê-se: inversa de* f). Sabemos que, função está determinada pela relação que estabelece entre suas entradas e saídas e não pela letra usada para variável independente. Assim, no exemplo 13, temos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ é a função inversa de f.

Se usarmos a notação f^{-1}, em vez de g, na definição 15, e se usarmos x como variável independente, temos que se f e f^{-1} são inversas, então:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \forall x \in Df,$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x, \forall x \in Df^{-1}.$$

ATENÇÃO: f^{-1} *é apenas uma notação para a função inversa,* $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

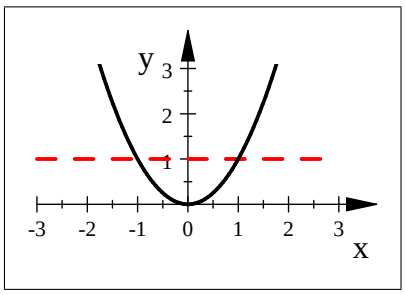
Exemplo 14:

1. A função $f:\left[\frac{2}{3},+\infty\right)\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ definida por $y=f\left(x\right)=\sqrt{3x-2}$ tem como função inversa $f^{-1}:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, definida por $f^{-1}\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(x^{2}+2\right)$.

2. A função $f:\mathbb{R}-\{3\}\rightarrow\mathbb{R}-\{-1\}$ definida por $y=f\left(x\right)=\frac{x-1}{3-x}$ tem como função inversa $f^{-1}:\mathbb{R}-\{-1\}\rightarrow\mathbb{R}-\{3\}$, definida por $f^{-1}\left(x\right)=\frac{1+3x}{x+1}$.

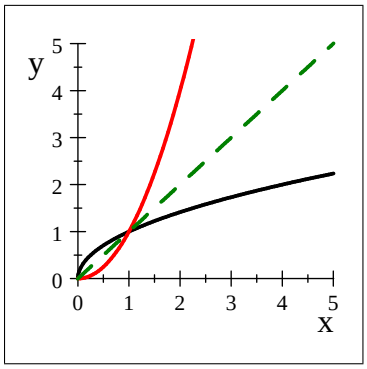
Uma maneira de determinar as funções inversas é resolvendo $y=f\left(x\right)$ para x como uma função de y e, a seguir, substituir y por x na fórmula final para f^{-1}.

Nem toda função tem uma função inversa. Graficamente, podemos determinar se uma função admite inversa. Passndo uma reta paralela ao eixo dos x, esta deve cortar o gráfico em apenas um ponto. Este é o *teste da reta horizontal*. A função $f\left(x\right)=x^{2}$ não possui função inversa, mas fazendo uma restrição conveniente no domínio, essa mesma função pode admitir inversa.



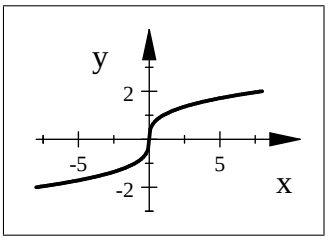
Para fazermos o gráfico da função inversa basta traçarmos a reta $y=x$ e observarmos a simetria.

Exemplo 15: Se $f:[0,+\infty)\rightarrow[0,+\infty)$ definida por $f\left(x\right)=x^{2}$ tem como inversa a função $f^{-1}:[0,+\infty)\rightarrow[0,+\infty)$ dada por $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{x}$.



1.5.6 Algumas Funções Elementares

1. **Função Potencial:** função definida por $f\left(x\right)=x^{n}$, onde $n\in\mathbb{R}$. Exemplo: $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$

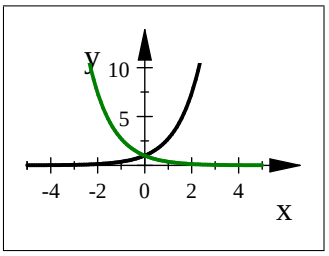


2. **Função Exponencial:** $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Com relação ao gráfico dessa função, podemos afirmar que:

   (a) está acima do eixo das abcissas;

   (b) corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$;

   (c) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.



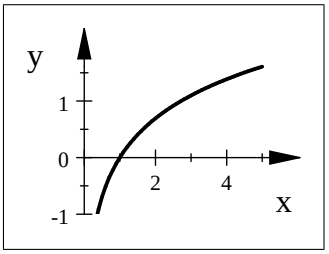
3. **Função Logarítmica:** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Com relação ao gráfico dessa função, podemos afirmar que:

   (a) está todo a direita eixo das ordenadas;

   (b) corta o eixo das abcissas no ponto $(1, 0)$;

   (c) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

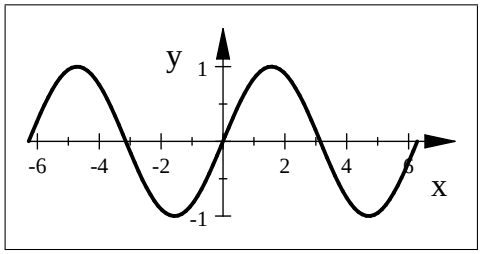
   (d) é simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação à reta $y = x$ (ou seja, funções exponenciais e logarítmicas são inversas uma da outra).



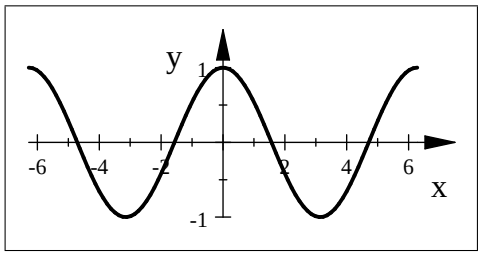
Observação: Quando a base for o número e o logarítmo é dito *logrítmo natural* ou *neperiano*, escrevemos $f(x) = \ln x$.

4. **Funções Trigonométricas:**

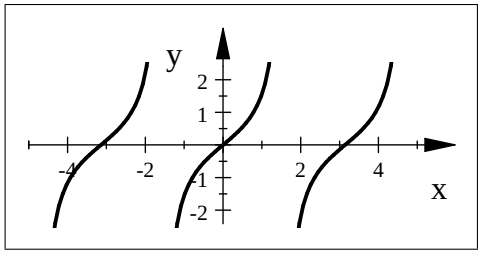
(a) **Função Seno:** $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \sin x$. A função seno é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



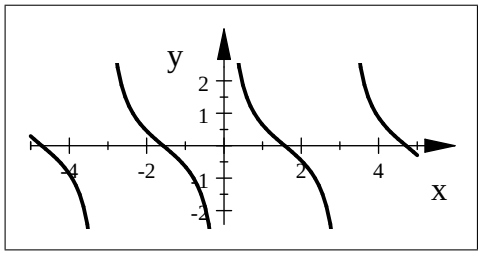
(b) **Função Cosseno:** $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos x$. A função cosseno é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



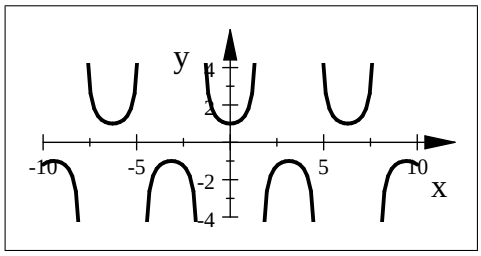
(c) **Função Tangente:** definida por $f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, para todo x tais que $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função tangente é uma função periódica e de período $T = \pi$.



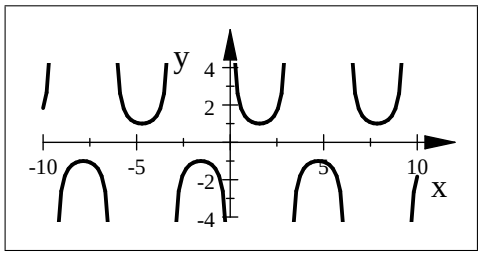
(d) **Função Cotangente:** definida por $f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, para todo x tais que $\sin x \neq 0$, isto é, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função cotangente é uma função periódica e de período $T = \pi$.



(e) **Função Secante:** definida por $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo x tais que $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função secante é uma função periódica e de período $T = \pi$.

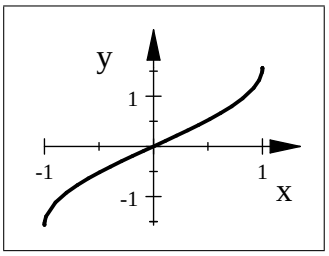


(f) **Função Cossecante:** definida por $f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\sin x}$, para todo x tais que $\sin x \neq 0$, isto é, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função cossecante é uma função periódica e de período $T = \pi$.

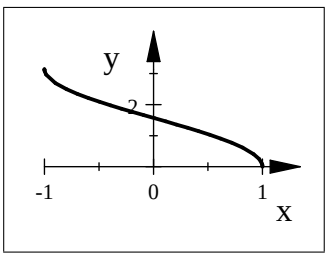


5. **Funções Trigonométricas Inversas:** como as funções trigonométricas são periódicas é impossível definir funções inversas das trigonométricas em todo o seu domínio. Portanto, para definirmos a funções trigonométricas inversas necessitamos restringir os domínios.

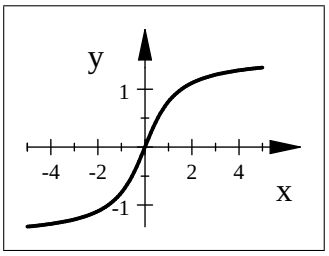
   (a) **Função Arco Seno:** Seja $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \sin x$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de $\arcsin x$ e denotada por $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onde $f^{-1}(x) = \arcsin x$.



   (b) **Função Arco Cosseno:** Seja $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ a função definida por $f(x) = \cos x$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de $\arccos x$ e denotada por $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, onde $f^{-1}(x) = \arccos x$.

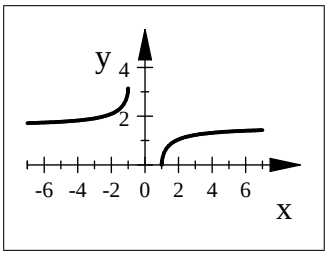


   (c) **Função Arco Tangente:** Seja $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \text{tg}(x)$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de $\text{arctg}(x)$ e denotada por $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, onde $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$.

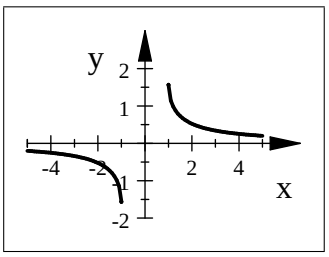


(d) **Função Arco Cotangente:** $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$ definifa por $f^{-1}(x)=\text{arccotg}(x)$.

(e) **Função Arco Secante:** definida por $f^{-1}(x)=\text{arcsec}(x)$, cujo domínio é $Df^{-1}=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$ e imagem $\text{Im}\,f^{-1}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.



(f) **Função Arco Cossecante:** definida por $f^{-1}(x)=\text{arcssec}(x)$, cujo domínio é $Df^{-1}=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$ e imagem $\text{Im}\,f^{-1}=\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

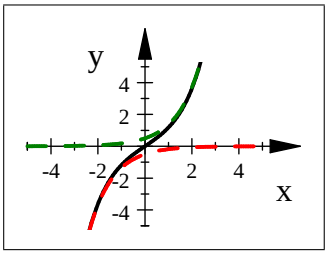


6. **Funções Hiperbólicas:** As funções exponenciais

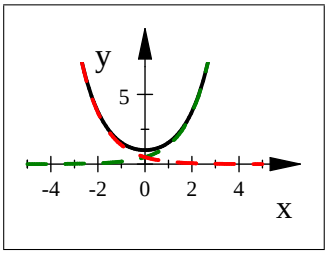
$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad\text{e}\qquad\frac{e+e^{-x}}{2},$$

ocorrem freqüentemente na Matemática Aplicada. Estas expressões definem as funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólibo* de x, respectivamente. O comportamento dessas funções nos leva a fazer uma analogia com as funções trigonométricas.

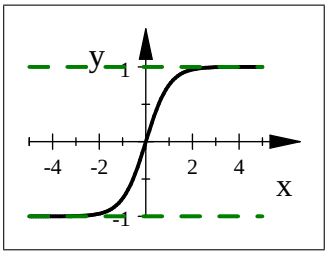
(a) **Seno Hiperbólico:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. O gráfico dessa função pode ser obtido pelo método chamado adição de coordenadas. Para usar esta técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejados) e somamos as resectivas ordenadas.



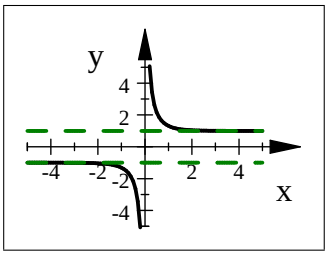
(b) **Cosseno Hiperbólico:** $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ definida por $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.



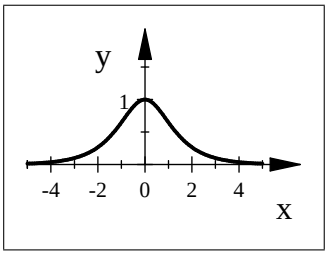
(c) **Tangente Hiperbólica:** $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f(x) = \text{tgh}(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.



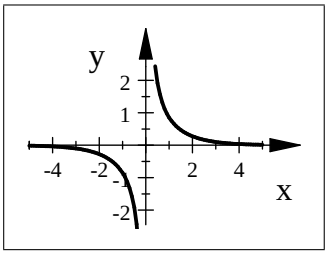
(d) **Cotangente Hiperbólica:** $f : \mathbb{R}^* \to [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$ definida por $f(x) = \frac{1}{\text{tgh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



(e) **Secante Hiperbólica:** $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ definida por $f(x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.



(f) **Cossecante Hiperbólica:** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$.



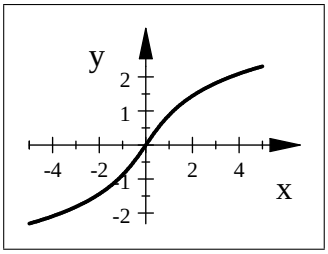
Observação: Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperbólicas. Algumas identidades das funções

hiperbólicas estão abaixo relacionadas:

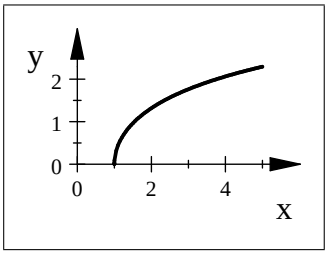
i. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
ii. $\sinh x + \cosh x = e^x$;
iii. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$;
iv. $1-\text{tgh}^2\,(x) = \text{sech}^2\,(x)$;
v. $1-\text{cotgh}^2\,(x) = \text{cossech}^2\,(x)$;
vi. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;
vii. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;
viii. $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$;
ix. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$;
x. $\sinh^2 x = \frac{\cosh(x)-1}{2}$;
xi. $\cosh^2 x = \frac{\cosh(x)+1}{2}$.

7. **Funções Hiperbólicas Inversas:**

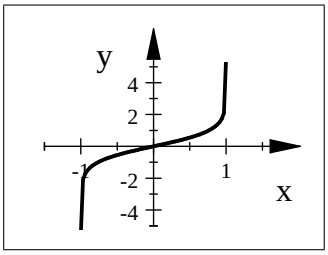
(a) **Inversa do Seno Hiperbólico:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, chamada de argumento do seno hiperbólico.



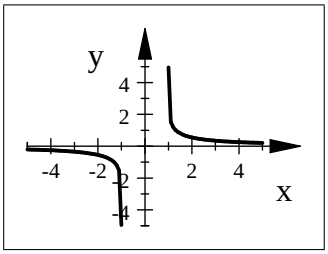
(b) **Inversa do Cosseno Hiperbólico:** $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $f(x) = \arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, chamada de argumento do cosseno hiperbólico.



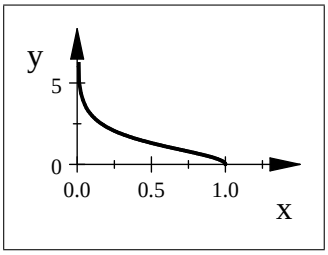
(c) **Inversa da Tangente Hiperbólica:** $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{argtgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, chamada de argumento da tangente hiperbólica.



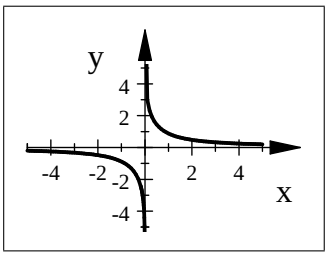
(d) **Inversa da Cotangente Hiperbólica:** $f : [(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)] \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argcotgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.



(e) **Inversa da Secante Hiperbólica:** $f : (0, 1] \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.



(f) **Inversa da Cossecante Hiperbólica:** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argcossech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$.



Exemplo 15: Mostrar que o $\arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
Solução: Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = \arg\sinh x$
Como a função argumento do seno hiperbólico é a função inversa do seno, temos que:
$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0.$
Multiplicando ambos os lados por e^y, temos que:
$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$
Resolvendo essa equação quadrática, segue que:
$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$
Como $e^y > 0$, $\forall\ y$, a solução envolvendo o sinal negativo deve ser descartada.
Portanto,
$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$
Aplicando o neperiano em ambos os membros, obtemos que:
$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

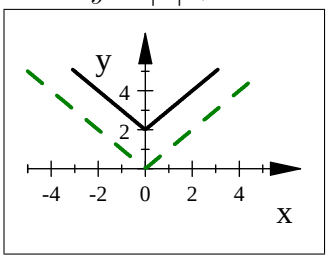
1.6 Translações

Uma vez conhecido o gráfico de uma equação $y = f(x)$, há algumas técnicas as quais podem ser usadas para ajudar a visualizar os gráficos das equações $y = f(x) \pm c$ e $y = f(x \pm c)$, onde c é uma constante positiva qualquer.

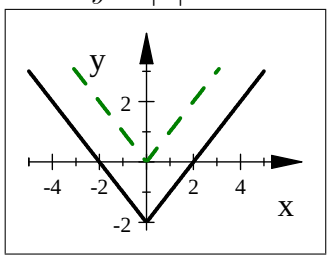
O efeito geométrico de acrescentar ou subtrair uma constante positiva a $f(x)$ é transladar o seu gráfico paralelamente ao eico y; a adição translada na direção positiva enquanto que a subtração, na negativa. Analogamente, se uma constante positiva for acrescentada ou subtraída da variável independente x, o efeito geométrico é uma translação paralela ao eixo x, na direção positiva se for subtração e na negativa se for adição.

Exemplo 16: Se $y = f(x) = |x|$ e $c = 2$, temos que:

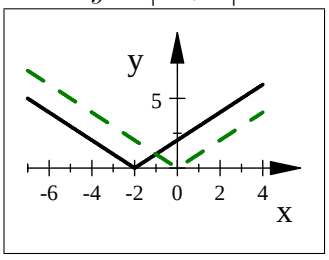
$y = |x| + 2$



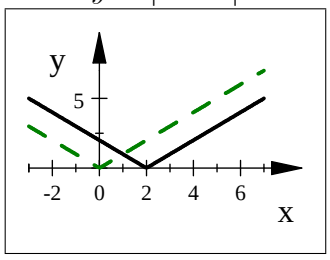
$y = |x| - 2$



$y = |x + 2|$



$y = |x - 2|$

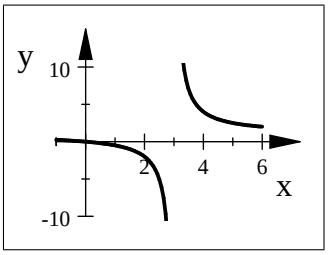


Exemplo 17: Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Solução: Note que,

$f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-x-6} = \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = 1 + 3\frac{1}{x-3}$.

Podemos esboçar o gráfico dessa função, observando que $f(x) = 1+3g(x-3)$, onde $g(x) = \frac{1}{x}$. O gráfico de f é obtido através de uma translação paralela ao eixo x, do gráfico de g em três unidades direção positiva, e ainda, há uma translação de uma unidade, na direção positiva, paralela ao eixo y. Assim,



1.7 Exercícios

1. Resolva as desigualdade em $\mathbb{R}$:

   a. $\frac{1}{x+7} > -1$;
   b. $\frac{2x+1}{2x} > \frac{x-3}{x+2}$;
   c. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}(6x-9) > \frac{x-2}{2}$;
   d. $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x+4\right) - \frac{x}{3} > \frac{x}{2}\left(\frac{6}{x}-1\right)$;
   e. $\frac{3-x}{\sqrt{x-1}} \leq 1$;
   f. $\frac{x+2}{x} < \frac{1-x}{2-x}$
   g. $\frac{2}{3-x} < x$;
   h. $x^2 < \frac{1}{x}$;
   i. $\frac{7}{x} < \frac{x}{x-2}$;
   j. $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$;
   k. $x^4 < \frac{1}{x}$;
   l. $\frac{\frac{1}{2}x-3}{4+x} > 1$;
   m. $0 < \frac{x-1}{2x-1} < 2$;
   n. $\frac{1}{3x+2} \leq \frac{3}{x-1}$;
   o. $\frac{-x}{2+x} \leq \frac{-x-1}{3-2x}$;
   p. $e^{\sqrt{x-2}} - 1 \geq 0$;
   q. $\frac{x+1}{2-x} - \frac{x}{3+x} < 0$;
   r. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x} > 0$;
   s. $\frac{x-2}{x-4} > \frac{x+2}{x}$;
   t. $\frac{x-1}{x+4} \geq \frac{1}{x+2}$;
   u. $\frac{x-a}{x+a} > 0$;
   v. $\frac{x+5}{x+a} < \frac{x-5}{x-a}$.

2. Sabendo-se que $x = -3$ e $y = 5$, calcule:

   a. $|x|$;
   b. $|y|$;
   c. $|x+y|$;
   d. $|x| + |y|$;
   e. $|x-y|$;
   f. $|x| - |y|$;
   g. $|y-x|$;
   h. $||x| - |y||$;
   i. $|5x-3y|$;
   j. $|x^2+2xy+y^2|$;
   k. $|x| \cdot |x-y|$;
   l. $|x-y|^2$;
   m. $\frac{|x|}{|y|}$;
   n. $\left|\frac{x}{y}\right|$.

3. Resolva as equações em $\Re$:

   a. $|4x+3| = 7$;
   b. $|4+3x| = 1$;
   c. $|7x| = 4-x$;
   d. $x+1-|2x-4|+|5-x| = 0$;
   e. $2x|3-x| - |4-x^2| + |x| = 54$;
   f. $|2x^2-3x+1| = 28$;
   g. $2x|4-x| - |x^2-9| + |x| = -31$;
   h. $x + |x| - 1 = 0$;
   i. $x - x|x-1| = 4$;
   j. $|x^2+x+1| - |x| = 10$;
   k. $\frac{|x-2|-7}{|x+5|} = 0$;
   l. $\left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{8}{3}$;
   m. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$;
   n. $||x-2|-7| = 6$;
   o. $\left|\frac{x}{1-5x}\right| = 4$.

4. Resolva as inequações em $\Re$:

a. $|6-2x| \geq 7$;
b. $|x+4| \leq |2x-6|$;
c. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leq \frac{1}{2}$;
d. $|9-2x| \geq |4x|$;
e. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$;
f. $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 6$;
g. $2 < |x-1|+|x|+|x+1| < 9$;
h. $|x|+\frac{1}{x} < 0$;
i. $\frac{10}{3} < |x|+\frac{1}{|x|} < \frac{26}{5}$;
j. $5 < |4-x^2| < 12$;
k. $9 < |x^2-6x| \leq 16$;
l. $\frac{|x|}{x-1} \geq \frac{2-x}{|x|}$;
m. $|x|+\sqrt{x} < 1$;
n. $\frac{|x+1|-3}{|x|} < \frac{1}{|x|}$;
o. $\frac{|2+x|}{|3-x|} > 4$;
q. $\frac{1}{|x+1||x+3|} \geq -\frac{1}{5}$;
r. $3|x-1|+|x| < 1$;
s. $|3-x| < \frac{1}{x-1}$;
t. $1-|x| < \frac{1}{|x|}$;
u. $\frac{1}{|x+1||x+3|} \geq \frac{1}{5}$;
v. $1+|x| < \frac{2}{|x|}$;
w. $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$;
y. $\left|\frac{1-x}{x}\right| \geq \frac{2-x}{|x-3|}$;
x. $\frac{3}{\left|\sqrt{x-1}+2\right|}+4 < 0$;
z. $\frac{7+|x-2|}{1+x^2} < -3$;
A. $|2x-3|-\frac{x}{2}+3-\left|5+\frac{3x}{2}\right| < 3$;
B. $|x-1| < x^2-3$;
C. $\frac{6-|x|}{x} < 1$;
D. $\frac{-3}{|x+2|} < \frac{1}{x-3}$.

5. Seja $f(x) = \frac{x-1}{3x+5}$ uma função. Calcule e dê o campo de definição de:
   a. $f\left(\frac{1}{x}\right)$
   b. $\frac{1}{f(x)}$

6. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^3$, escreva e dê o campo de definição, quando possível:
   a. $(f \circ g)(x)$;
   b. $(g \circ f)(x)$;
   c. $(f \circ g)(2)$.

7. Determine o campo de definição das funções:
   a. $f(x) = xe^x + \frac{x-1}{x^2+1}$;
   b. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{(1-e^x)(x+1)}$;
   c. $f(x) = \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\ln(x-1)}$;
   d. $f(x) = \sqrt{\frac{\sin(1+x^2)}{e^{\sqrt{x-2}}}}$;
   e. $f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x+1}}$;
   f. $f(x) = \frac{\ln(e^x+1)+3}{x^x}$;
   g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}$;
   h. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}$;
   i. $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}\ln(\sin x).}$
   j. $f(x) = \sqrt{\cosh\left(1-\frac{x^2-3x+5}{|x-5|}\right)}$;
   k. $f(x) = (x-1-|3-x|)^x$;
   l. $f(x) = \sqrt{\left(1-\frac{x^2-3x+5}{|x-5|}\right)\sinh(1-2^x)}$.

8. Em cada caso, escreva a função pedida na forma mais simples e dê o campo de definição:
   (a) Se $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$, então:
      a. $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$;
      b. $(f \circ f)(x)$. ;
   (b) Se $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$, então:

a. $g(x) = 2f(x) - f(2x)$; b. $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)$
c. $f(-x-1)$; d. $f\left(\frac{a}{b}\right)$;
e. $f\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$; f. $f\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

(c) Se $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x^2}$, então:
a. $f\left(\frac{-1}{a}\right)$; b. $f\left(\frac{2}{n}\right)$; c. $\mathrm{f}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

(d) Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então: $f(x+h) - f(x)$;

(e) Se $f(x) = x + \frac{1}{x}$, então:
a. $f(x-1)$; b. $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$;

(f) Se $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, então $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$;

(g) Se $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 1 - x$, então:
a.$(f \circ g)(x)$; b.$(g \circ f)(x)$.

(h) Se $f(\theta) = \frac{\theta-1}{\theta+1}$, então $\frac{f(\theta)-f(-\theta)}{1+f(\theta)f(-\theta)}$;

(i) Se $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$, então:
a. $f\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$; b. $\frac{f(a+b)}{f(a-b)}$; c. $\mathrm{f}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

(j) Se $f(x) = \sin^2(2x)$, então $f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Se $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.. Verifique que $f(x+1) = f(x) + x$.

10. Se $f(x) = x^2$, verifique se $f(a+b)^2 + f(a-b)^2 = 2f(a+b) + 8f(ab)$.

11. Se $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, verifique se $f(\sin\alpha) = f(\cos\alpha) = \sin(2\alpha)$.

12. Se $f(x) = x^2 + 1$, verifique se $f(\tan(x)) = \sec^2 x$.

13. Se $f(x) = \mathrm{tg}(2\alpha)$, verifique se $f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}$.

14. Se $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, verifique se $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

15. Se $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, verifique se $f(\alpha+\beta)f(\alpha-\beta) = \frac{[f(\alpha)]^2-[f(\beta)]^2}{1-f(\alpha)^2f(\beta)^2}$.

16. Se $f(x) = e^x$, verifique se $f(x)f(y) = f(x+y)$.

17. Se $f(x) = \ln x$, verifique se:

(a) $f(x)+f(y)=f(xy)$;
(b) $f\left(\frac{u}{v}\right)=f\left(\frac{v}{u}\right)=2f(u)-2f(v)$;
(c) $f(x^2)=2f(x)$;
(d) $f\left(\frac{u}{v}\right)+f\left(\frac{v}{u}\right)=0$.

18. Se $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$, verfique se $f(p)+f(q)=f\left(\frac{p-q}{1-pq}\right)$.

19. Se $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$, verfique se $f(t+1)+f(t)=\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$.

20. Se $f(x)=x^3$, obtenha $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ e dê o campo de definição.

21. Se $f(x)=x^2$, obtenha as funções abaixo e dê o campo de definição.

(a) $g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
(b) $g(x)=\frac{f(y)-f(x)}{f(x)}+2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

22. Se $f(x)=k$ e $k\in\mathbb{R}$, determine $g(x)=\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$.

23. Se $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$, verifique se $f(f(x))=x$.

24. Se $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ e $d\neq -a$, verifique se $f(f(x))=x$.

25. Sabendo que:

$f_1(x)=\ln\sqrt{1+x}$; $f_2(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $f_3(x)=\frac{x+1}{2x+3}$; $f_4(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}}{2x}$;
$f_5(x)=\frac{3x}{2\sqrt[3]{1-x^2}}$; $f_6(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$ $f_7(x)=\ln\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x}}\right)$; $f_8(x)=\frac{1}{\ln(2+x^2)}$.

Determine as funções indicadas e dê o campo de definição da resultante.

(a) $g(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_7(x)$;
(b) $g(x)=f_3(x).f_4(x)$;
(c) $g(x)=f_5(x).f_6(x)$;
(d) $g(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_5(x)+f_6(x)+f_7(x)$;
(e) $g(x)=f_3(x).f_4(x).f_5(x).f_6(x)$;
(f) $g(x)=[f_1(x)+f_2(x)+f_7(x)]\,f_8(x)$.

26. Sabendo que:

$f_1(x) = 2x$; $f_2(x) = \frac{1}{x}$; $f_3(x) = x^2$;
$f_4(x) = \sqrt{1-x}$; $f_5(x) = \ln(x^2+4x+4)$; $f_6(x) = \frac{1}{\ln\sqrt{x}}$
$f_7(x) = 3x^2 - 2x + 6$; $f_8(x) = e^x + 2$; $f_9(x) = e^{-x} + 2$;
$f_{10}(x) = \sin\sqrt{x+1}$; $f_{11}(x) = 1 - x$; $f_{12}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$;
$f_{13}(x) = 1 - e^{2x}$; $f_{14}(x) = \sqrt{x-4}$; $f_{15}(x) = \frac{1}{2x} + 1$;
$f_{16}(x) = \ln x$; $f_{17}(x) = \sqrt{1-x^2}$; $f_{18}(x) = \frac{1}{x}$;
$f_{19}(x) = 1 - x$; $f_{20}(x) = x^2$; $f_{21}(x) = \cos x$.

Determine as funções indicadas e dê o campo de definição da resultante.

(a) $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$;
(b) $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - f_4(x)$;
(c) $g(x) = f_1(f_2(x))$;
(d) $g(x) = f_1(f_3(x))$;
(e) $g(x) = f_4(f_1(x))$;
(f) $g(x) = f_4(f_3(x))$;
(g) $g(x) = f_4(f_2(x))$;
(h) $g(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$;
(i) $g(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x)$;
(j) $g(x) = f_3(f_4(x)) + f_1(x)$;
(k) $g(x) = \frac{f_7(x+h) - f_7(x-h)}{h}$ e $h \neq 0$;
(l) $g(x) = f_6(f_{10}(x))$;
(m) $g(x) = \ln(f_8(x) - f_9(x))$;
(n) $g(x) = (f_{11}(x))^{\frac{1}{f_6(x)}}$;
(o) $g(x) = \frac{f_{12}(x)}{f_{13}(x)}$;
(p) $g(x) = f_{14}(f_{15}(x))$;
(q) $g(x) = f_{15}\left(\frac{1}{f_{15}(x)}\right)$;
(r) $g(x) = f_{19}(f_{20}(f_{21}(x)))$;
(s) $g(x) = f_{18}\left(f_{17}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

27. Sabendo que:

$f_1(x) = \sqrt{1+\sin x}$; $f_2(x) = x - 3$; $f_3(x) = 2x$;
$f_4(x) = x - 4$; $f_5(x) = 1$; $f_6(x) = x$
$f_7(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$; $f_8(x) = 2x - 4$; $f_9(x) = \frac{x}{2} + 2$;
$f_{10}(x) = \sqrt{\ln(x^2 + x - 6)}$; $f_{11}(x) = \sqrt{2x+1}$; $f_{12}(x) = \sqrt{x-2}$;
$f_{13}(x) = \ln\left(\sqrt{2x - x^2}\right)$; $f_{14}(x) = \sqrt{1+x^2} + x$; $f_{15}(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
$f_{16}(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$; $f_{17}(x) = e^{\left(x^2+1\right)^{-1}}$; $f_{18}(x) = x^2 - 1$;
$f_{19}(x) = \cos x$; $f_{20}(x) = e^x$; $f_{21}(x) = x - \frac{1}{|x|} - |1 - x|$.

Determine as funções indicadas e seu campo de definição.

(a) $g(x) = (f_1(x))^{\frac{f_3(x)}{f_4(x)}}$;

(b) $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$;

(c) $g(x) = \frac{f_5(x)+\frac{f_6(x)}{f_7(x)}}{f_6(x)+f_7(x)}$;

(d) $g(x) = \frac{(f_{11}(x))^2-9}{(f_{12}(x))^2-2}$;

(e) $g(x) = \frac{f_{13}(x)}{f_{14}(x)}$;

(f) $g(x) = f_{16}(f_{15}(x))$;

(g) $g(x) = f_{17}(f_{16}(x))$;

(h) calcule $f_8(f_9(0))$ e $f_9(f_8(0))$;

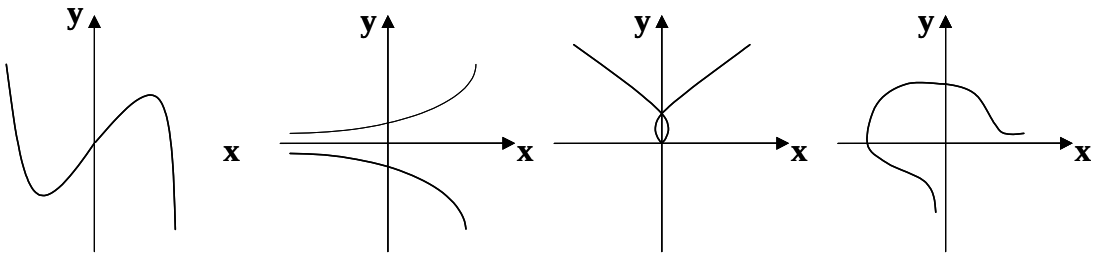
(i) mostre que $f_8(f_9(x)) = f_9(f_8(x)) = x$;

(j) determine o campo de definição de $f_{10}(x)$

28. Use a definição de módulo para redefinir a função $f(x) = |x| + |2x-1| + |x-1|$. A seguir, esboce o gráfico de f.

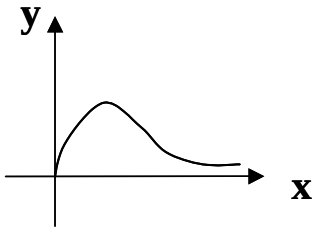
29. A função $f(x)$ é uma função do 1^o grau. Escreva a função sabendo que $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

30. Determine, nas figuras abaixo, se o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, ao eixo y, à origem ou nenhum dos procedentes.



31. A figura em anexo mostra a parte de um gráfico. Complete o gráfico de forma que ele seja simétrico com relação:

(a) ao eixo x; (b) ao eixo y; (c) à origem.



32. Complete, a tabela abaixo, de tal forma que o gráfico de $y = f(x)$ (o qual é um mapa de dispersão) seja simétrico em relação:

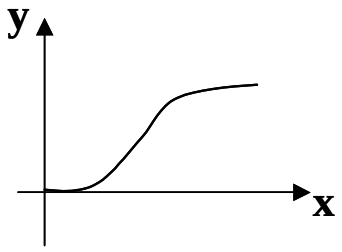
(a) ao eixo y; (b) à origem.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	?	-1	0	?	-5	?

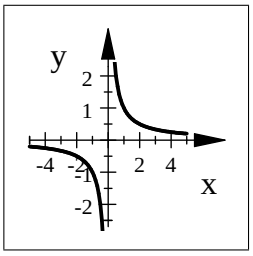
33. Esboce o gráfico de $y = |1 - x^2|$.

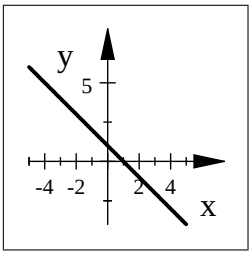
34. A figura em anexo mostra a parte de um gráfico. Complete os gráficos supondo que:

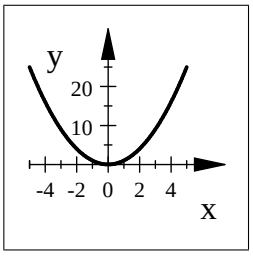
(a) f é uma função par; (b) f é uma função ímpar..

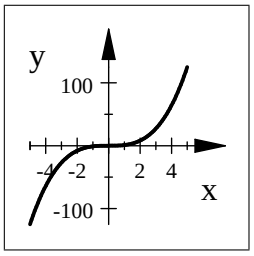


35. Classifique as funções cujos gráficos estão na figura abaixo em anexo, como pares, ímpares ou nenhum dos dois casos.









36. Determine quais das funções são *pares* ou *ímpares*.

(a) $f(x) = 5x^3 - 2x$; (b) $f(s) = s^2 + 2s + 2$;
(c) $f(t) = |t|$; (d) $f(v) = \frac{a^v + a^{-v}}{2}$;
(e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; (f) $f(u) = \ln \frac{1+u}{1-u}$.

37. Mostre que se f e g são funções *ímpares*, então $(f + g)$ e $(f - g)$ são também funções *ímpares*.

38. Mostre que se f e g são funções *ímpares*, então $f.g$ e $\frac{f}{g}$ são funções *pares*.

39. Mostre que a função $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ é *par* e que a função $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ é *ímpar*.

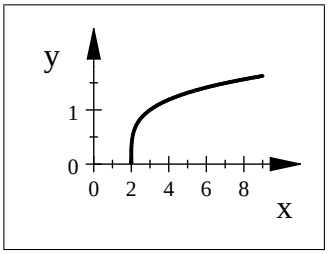
40. Demostre que qualquer função $f : R \to R$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

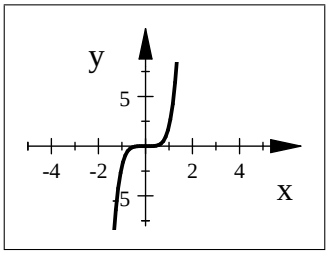
41. Determine a fórmula da função inversa. Faça os gráficos dafunção dada e de sua inversa.

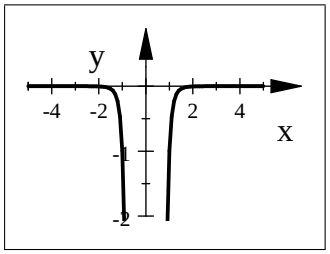
(a) $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$;
(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$;
(c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \geq 0$;
(d) $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$;
(e) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, $x \geq 0$;
(f) $f(x) = \begin{cases} 5/(2-x), & x < 2 \\ 3x^3 - 6, & x \geq 2 \end{cases}$

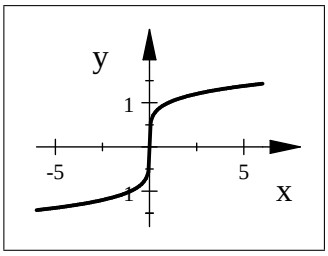
42. Em cada parte, combine a equação e um dos gráficos em anexo.

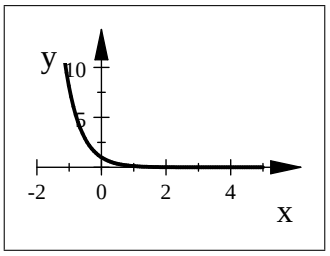
(a) $y = \sqrt[5]{x}$;
(b) $y = 2x^5$
(c) $y = -\frac{1}{x^8}$
(d) $y = 8^x$;
(e) $y = \sqrt[4]{x-2}$
(f) $y = \frac{1}{8^x}$

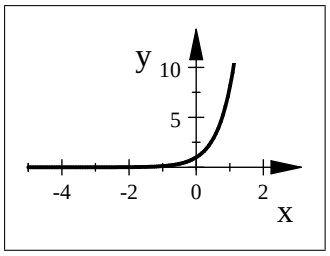








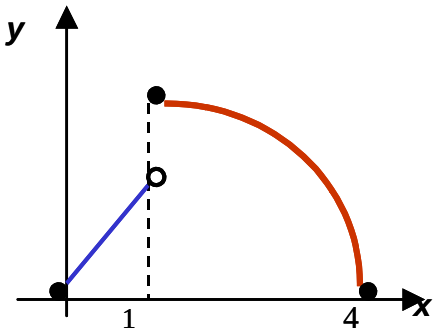




43. Mostre que a função $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

44. Se $f(x)$ é uma função *periódica* de período $\mathbf{T}$, prove que $\mathbf{3T}$ também é período de f.

45. Sabendo que $f(x)$ é uma par e periódica de período $\mathbf{T} = 4$, complete seu gráfico.



46. Se $f(x) = 2^x$, mostrar que $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$.

47. Seja $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ e $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Mostre que:

    (a) $f(x+y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$
    (b) $g(x+y) = f(x).f(y) + g(x).g(y)$

48. Construa o gráfico das funções exponenciais.

    (a) $y = a^x$, se $a = 2; \frac{1}{2}; e$
    (b) $y = 10^{\frac{1}{x}}$
    (c) $y = e^{-x^2}$
    (d) $y = -2^x$;

49. Determine se o teorema do valor intermediário se aplica para o valor de k dado. Se o teorema for aplicável, ache um número c tal que $f(c) = k$. Caso contrário, explique porquê.

    (a) $f(x) = 2 + x - x^2$, para $x \in [0,3]$ e $k = 1$;
    (b) $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$, para $x \in [0,8]$ e $k = -8$;
    (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1, \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, para $x \in [-2,3]$ e $k = -1$.

50. Mostre que o teorema do valor intermediário garante que a equação $e^x + \cos x - 3 = 0$ tem uma raiz no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

51. A função $f(x) = \cos x + \ln x + x$ tem alguma raiz no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$?

52. Mostre que a função $f(x) = e^x$ pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Capítulo 2

Limite e Continuidade de uma Função

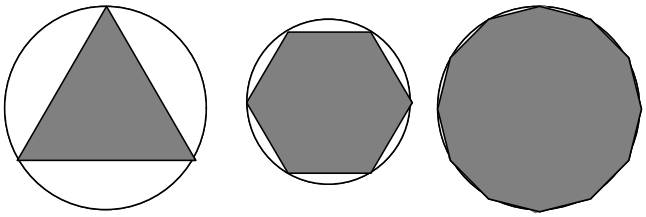
Objetivos

- Interpretar geometricamente a definição de limite;
- Provar os limites, pela definição;
- Determinar limites graficamente (usando os limites bilaterais);
- Calcular limites usando propriedades;
- Encontrar limites utilizando os limites notáveis;
- Estudar a continuidade de uma função;
- Classificar as descontinuidades de uma função;
- Aplicar o teorema do Valor Intermediário.

2.1 Limite de uma Variável

A idéia de uma variável aproximando-se de um valor limite aparece de forma clara quando se procura estabelecer a fórmula que representa a área de um círculo.

Assim, considerando a área de um polígono regular de n lados inscrito no círculo, vemos que a medida que n cresce a área do polígono se aproxima da área do círculo.



Fazendo n crescer indefinidamente, a área do polígono tende a um *limite* e este é definido como a área do círculo. Neste exemplo, observamos geometricamente a idéia de limite. Agora, vamos construir essa idéia trabalhando com o conjunto dos $\mathbb{R}$. Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas:

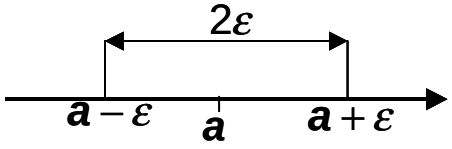
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$;
2. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}$;
3. $\{1, 0, -1, -2, -3, \cdots\}$;
4. $\left\{1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \cdots\right\}$.

Observe que, na sucessão (1) os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um *limite*; em (2), os temos estão se aproximando de zero, ou seja, zero é seu limite; em (3), os termos da sucessão decrescem indefinifamente sem atingir um limite; e, em (4), os termos estão oscilando, não havendo um limite.

Vamos estabelecer agora, a definição de limite de uma variável.

Definição 1: Seja x uma variável, diz-se que x tende a uma constante a, ou que o limite de x é a, se para um número qualquer positivo ε, por pequeno que seja, os valores sucessivos de x se aproximam de a de tal modo que a diferença $x - a$ em valor absoluto seja menor que ε , isto é, $|x - a| < \varepsilon$. Matematicamente, $\lim x = a$ ou $x \to a$. Lê-se: x *tende* para a.

Geometricamente, a desigualdade $|x - a| < \varepsilon$, estabelecida definição 1, significa que, para qualquer $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tem limite a, isto é, tende para a.



Exemplo 1: Se $a = 3$, então $x \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad 3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon \quad \Rightarrow$ $|x - 3| < \varepsilon$.

Se $\varepsilon = 0,001$, então $2,999 < x < 3,001 \quad \Rightarrow \lim x = a \quad \Rightarrow \quad x \to 3$.

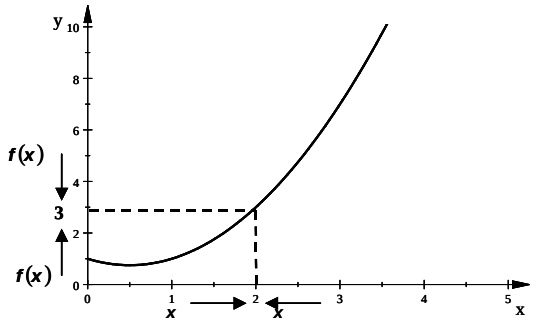
Estudaremos agora o limite de uma função de uma variável real com todas as suas interpretações.

2.2 Limite de uma Função

2.2.1 Noção Intuitiva

O uso básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor.

Exemplo 2: Examinemos o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 1$.



Representando f na forma tabular, temos que:

x	$1,99$	$1,995$	$1,999$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2,001$	$2,005$	$2,05$
$f(x)$	$2,8525$	$2,9701$	$2,985025$	$\cdots$		$\cdots$	$3,003001$	$3,015025$	$3,1525$

Observando a tabela e o gráfico é fácil constatar que o limite de $x^2 - x + 1$ quando x tende a 2 é 3 por qulaquer um dos lados de 2, ou seja, $\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 1) = 3$.

Note que, na análise precedente estivemos preocupados com os valores de f próximos do ponto $x = 2$ e não com o valor de f em $x = 2$.

Informalmente, temos que se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos quanto quisermos de b, fazendo x suficientemente próximo de a (não igual a a), então escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ ou } f(x) \to b \text{ se } x \to a.$$

Observação: No exemplo anterior, a função $f(x)$ estava definda em $x = 2$ (ponto de interesse), mas quando falamos em limite nos interessa saber o comportamento da função na vizinhança de um certo a, não necessita que a função f esteja definida no ponto a ser analisado. Observe isso, no exmplo a seguir.

Exemplo 3: Seja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$. Verifique que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right) = 2$.

Solução: Observe a tabela abaixo:

x	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	$\cdots$	0	$\cdots$	$0,00001$	$0,0001$	$0,001$
$f(x)$	$1,9995$	$1,99995$	$1,999995$	$\cdots$		$\cdots$	$2,000005$	$2,00005$	$2,0005$

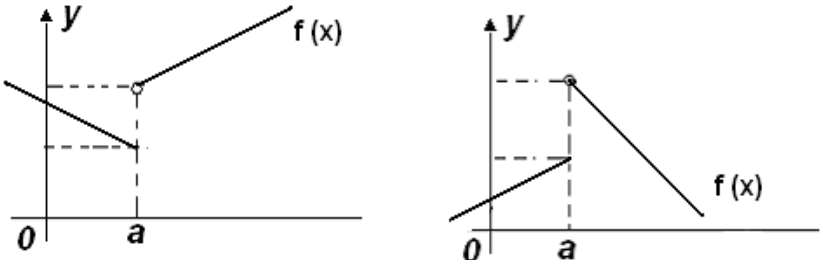
Por evidências numéricas estamos sendo induzidos a concluir que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right)=2.$$

Podemos confirmar este resultado por manipulações algébricas. Veja:
$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+1}-1$, se $x\neq 0$.
A partir daí, é evidente que $f(x)\to 2$, quando $x\to 0$

2.2.2 Limites Laterais

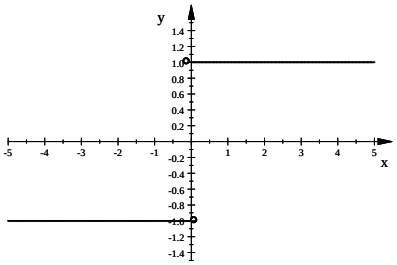
Nem sempre uma função tem limites iguais quando se aproxima pela *direita* ou pela *esquerda* de um número real a. Vamos analisar agora, funções que estão definidas em intervalos onde existem pontos nos quais o gráfico da função dá um salto. Assim,



Isto pode ser observado no próximo exemplo.

Exemplo 4: Se $f(x)=\frac{|x|}{x}$.
Solução:

Note que: $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, \text{ se } x>0;\\ -1, \text{ se } x<0.\end{cases}$



Graficamente, temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \text{ e } \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1.$$

Com esta notação, o índice superior $+$ indica um *limite à direita* e o índice superior $-$ indica um *limite à esquerda*.

Definição 2: Se a função $f(x)$ tende a b_1, finito ou não, quando x tende a a por valores inferiores ao a, então dizemos que b_1 é o *limite à esqueda* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1.$$

Definição 3: Se a função $f(x)$ tende a b_2, finito ou não, quando x tende a a por valores superiores ao a, então dizemos que b_2 é o *limite à direita* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2.$$

Estes limites laterais podem ser:

i. iguais, isto é, $b_1 = b_2$;

ii. diferentes, isto é, $b_1 \neq b_2$;

iii. pode existir um e outro não;

iv. ambos não existirem.

Relação entre limites laterais e bilaterais

O *limite bilateral* existe se, e somente se, existirem os limites laterais e forem iguais. Escrevemos,

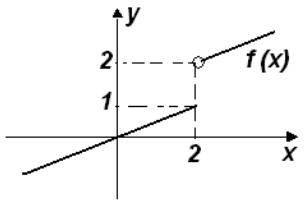
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \ .$$

Exemplo 4: Determine o limite (limite bilateral) das funções abaixo.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } x \leq 2; \\ \frac{x}{2} + 1, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

Solução:

O gráfico de f é:



Graficamente, os limites laterais são:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x}{2}\right) = 1;$

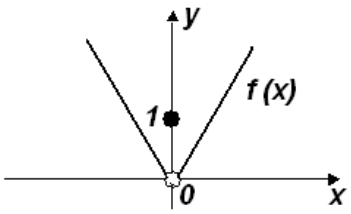
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2.$

Conclusão, como o $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, então não existe o $\lim_{x \to 2} f(x)$ (limite bilateral).

2. $f(x) = \begin{cases} x\,, \text{ se } x > 0; \\ 1, \text{ se } x = 0; \\ -x, \text{ se } x < 0; \end{cases}$

Solução:

O gráfico de f é:



Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0;$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, então existe o limite bilateral e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3. $f(x) = \begin{cases} 6x + 7\,, \text{ se } x \leq -2; \\ 4 - x, \text{ se } x > -2. \end{cases}$

Solução:

Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (6x + 7) = -5;$

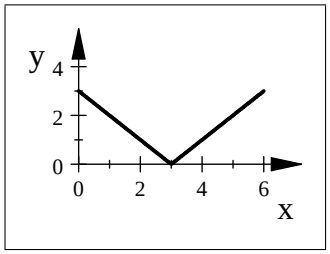
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (4 - x) = 6.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, então limite bilateral não existe.

4. $f(x) = |x - 3|\,.$

Solução:

O gráfico de f é:



.

Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-x + 3) = 0;$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x - 3) = 0.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 0$.

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ se } x > 2; \\ 1, \text{ se } x = 2; \\ \frac{1}{x-2}, \text{ se } x < 2. \end{cases}$

Solução:

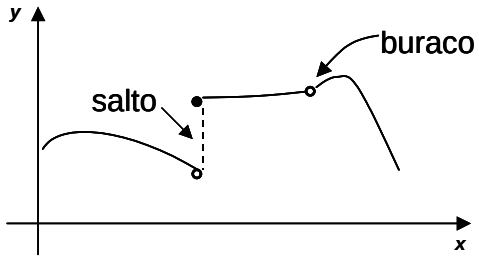
Graficamente, os limites laterais são:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty;$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 1.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Observação: Intuitivamente, dizemos que uma curva é *contínua* quando não apresenta *quebras* ou *buracos*. Estas quebras ou buracos são chamados de descontinuidades.



2.2.3 Limites pela definição

Introdução

Inicialmente, suponhamos que uma família pretende disciplinar o uso da água em sua residência. Admitimos que o custo do m^3 de água seja $R\$\ 1,20$ e que esta família decide gastar $R\$\ 90,00$ por mês com uma tolerância de $R\$\ 6,00$ para mais ou para menos. A questão que se põe é: qual a faixa de consumo em m^3 de água para que o custo fique dentro do padrão estabelecido?

Solução:

Sejam

x : o número de m^3 de água a serem consumidos;

p : o valor pago pela água em $R\$$.

É fácil ver que a função que relaciona o valor a pagar com o consumo é

$$p(x) = 1,2x.$$

Como foi decidido gastar $R\$\ 90,00$ por mês com uma tolerância de $R\$\ 6,00$ para mais ou para menos, conclui-se que o valor a ser pago deve pertencer ao intervalo $[84, 96]$.

Na seqüência, é necessário estabelecer o intervalo de consumo. Para isso, determinamos os valores de a e b tais que

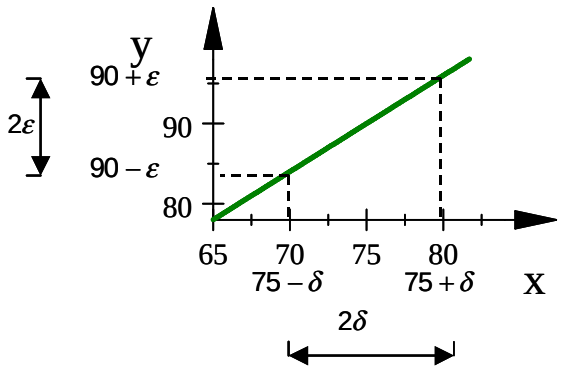
$$p(a) = 84 \text{ e } p(b) = 96.$$

Ou seja,

$$p(a) = 84 \Rightarrow 1,2a = 84 \Rightarrow a = 70;$$
$$p(b) = 96 \Rightarrow 1,2b = 96 \Rightarrow a = 80.$$

Conclusão: Para que os gastos fiquem no intervalo $[84, 96]$ o consumo deve ficar entre $70m^3$ e $80m^3$ de água, isto é, pertencer ao intervalo $[70, 80]$.

Ao estudarmos limites das funções, o valor $p(x) = 90$ é denominado limite de $p(x)$ quando x tende a 75, a tolerância $R\$\ 6,00$ é denominado ε e a margem 5 m^3 em torno de 75 é denominado δ. O gráfico a seguir retrata esta situação.



A próxima questão que se põe é: existe uma relação entre a tolerância admitida em torno do valor monetário fixado como referência ($R\$\ 90,00$) e a margem em torno do valor central de consumo (75 m^3)? Isto, é, dado $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que δ dependa de ε? A resposta é sim e, o procedimento, para determinar esta relação consiste em estabelecer a relação entre as desigualdades

$$|p(x) - 90| < \varepsilon \text{ e } |x - 75| < \delta\,.$$

Desse modo,

$$|p(x) - 90| = |1,2x - 90| = 9\,|x - 75| < \varepsilon. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$|x - 75| < \delta. \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), podemos admitir a relação

$$1,2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{1,2}.$$

Portanto, para cada tolerência de gastos ε podemos encontrar a margem de consumo δ.

Vejamos os valores de δ para alguns valores de ε.

Valor de ε	Valer de δ	Intervalo de gastos	Intervalo de consumo
6	5	$[84, 96]$	$[70, 80]$
5	$4,1667$	$[85, 95]$	$[70.833, 79.617]$
4	$3,3333$	$[86, 94]$	$[71.667, 79.333]$
3	$2,5$	$[84, 93]$	$[72.5, 77.5]$
2	$1,6667$	$[88, 92]$	$[73.833, 76.16666]$
$1,2$	1	$[89, 91]$	$[74, 76]$

Generalizando

Consideremos $y = f(x)$ uma função definida em uma determinada vizinhança do ponto a ou para certos pontos desta vizinhança.

Definição 4: A função $y = f(x)$ tende ao limite b, quando x tende para a, se para todo e qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, é possível indicar um número positivo δ tal que, para todo e qualquer $x \neq a$ que satisfaz $0 < |x - a| < \delta$ se verificará a desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$. Escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ ou } f(x) \to b \text{ quando } x \to a.$$

Interpretação Geométrica

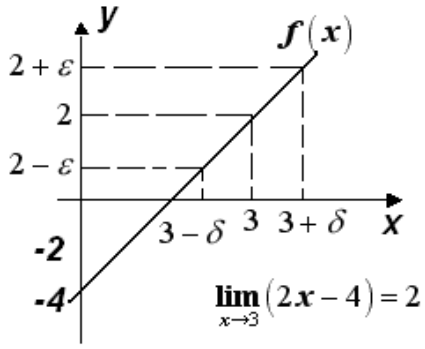
Se $f(x) \to b$ quando $x \to a$, no gráfico de $y = f(x)$ se interpreta:
- I/Apostila 2008.1/cap2/cap2Fig1.eps

Uma vez que da desigualdade $0 < |x - a| < \delta$ se deduz $|f(x) - b| < \varepsilon$, então, todos os pontos P, no gráfico de $f(x)$, correspondentes aos valores de x que se encontram a uma distância não maior que δ do ponto a, se localizarão dentro de uma faixa de largura 2ε, limitada pelas retas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$. Isto é, para um dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, $f(x)$ faz corresponder um número $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a + \delta$ sempre que $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Podemos resumir a definição 4, usando símbolos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - a| < \delta.$$

Exemplo 5: Seja $f(x)$ uma função dada por $f(x) = 2x - 4$.



Graficamente, observamos que $\lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2$, pois:

x	2,99	2,999	3	3,01	3,001
$f(x)$	1,98	1,998		2,02	2,002

A medida que x se aproxima de 3 por valores menores ou maiores, $f(x)$ se aproxima de 2. Podemos tomar $|f(x) - 2|$ tão pequeno quanto quisermos, bastando para

isto, escolhermos x bem próximo de 3. Vejamos agora, como determinar δ em função de um dado ε.

Temos $f(x) = 2x - 4$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$. Usando a definição 4, temos que:

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{array}{lll} & |f(x) - 2| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \\ \Rightarrow & |(2x-4) - 2| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \\ \Rightarrow & |2x - 6| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \\ \Rightarrow & 2|x-3| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \\ \Rightarrow & |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} & \end{array}$$

Escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, a definição se verifica.
Por exemplo, se $\varepsilon = 0,01$, então $\delta = 0,005$.

Exemplo 6: Mostre que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Solução: Vamos mostrar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - 4| < \varepsilon$ se $0 < |x-2| < \delta$.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{array}{lll} & |f(x) - 4| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-2| < \delta \\ \Rightarrow & \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-2| < \delta \\ \Rightarrow & \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-2| < \delta \\ \Rightarrow & |x-2| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-2| < \delta \end{array}$$

Escolhendo $\delta = \varepsilon$, a definição se verifica.

Exemplo 7: Mostre que $\lim_{x\to 4} x^2 = 16$.

Solução: Vamos mostrar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - 16| < \varepsilon$ se $0 < |x-4| < \delta$.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{array}{lll} & |f(x) - 16| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-4| < \delta \\ \Rightarrow & |x^2 - 16| < \varepsilon & \text{se} \quad 0 < |x-4| < \delta \end{array}$$

Observe que,
$|f(x) - 16| = |x^2 - 16| = |(x-4)(x+4)| = |x-4|\ |x+4|.$ (1)

Precisamos sustituir $|x+4|$ por um valor constante. Neste caso, vamos supor que $0 < \delta \leq 1$, então $0 < |x-4| < \delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$|x-4| < \delta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x-4| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-4 < 1 \quad \Rightarrow \quad 3 < x < 5$
$\Rightarrow \quad 3 < x < 5 \Rightarrow \quad 7 < x+4 < 9.$

Logo, $|x+4| < 9$.

Assim, por (1), temos que

$$|f(x) - 16| < 9\,|x-4|$$

Como, pela definição, deve ocorrer que $|x-4|<\delta$, temos que

$$|f(x)-16|<9\delta.$$

Escolhendo $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{9}\right\}$, obtém-se que

$$|f(x)-16|\leq 9.\frac{\varepsilon}{9}=\varepsilon.$$

Teorema da Unicidade: Se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_1$ e $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_2$, então $b_1=b_2$.

Demonstração: *Note que,*

$|b_1-b_2|=|b_1-f(x)+f(x)-b_2|=|-(f(x)-b_1)+(f(x)-b_2)|$

Pela desigualdade tringular, temos que:

$|b_1-b_2|\leq|-(f(x)-b_1)|+|f(x)-b_2|=|f(x)-b_1|+|f(x)-b_2|$ $\quad(*)$

Como $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_1$ *e* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b_2$*, pela definição de limites, dado* $\varepsilon>0$*,*

$\exists\delta_1>0$ *tal que* $|f(x)-b_1|<\varepsilon$ *se* $0<|x-a|<\delta_1$*;*
$\exists\delta_2>0$ *tal que* $|f(x)-b_2|<\varepsilon$ *se* $0<|x-a|<\delta_2$*.*

Seja $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$*. Então, em* $(*)$*, segue que*

$$|b_1-b_2|<2\varepsilon.$$

Se escolhermos $\varepsilon=\frac{|b_1-b_2|}{2}$*, obtém-se que*

$|b_1-b_2|<|b_1-b_2|$, sempre que $|x-a|<\delta$. Contradição!!!

Logo, $b_1=b_2$*.*

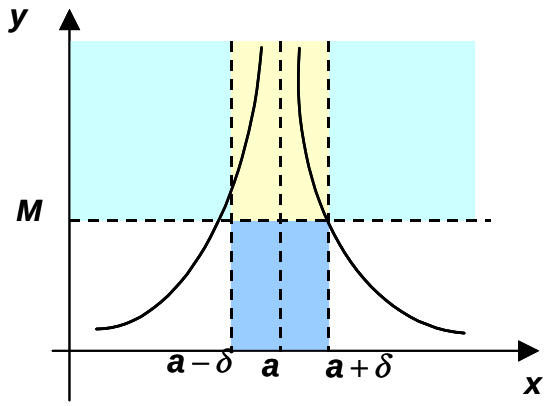
Voltemos agora a analisar a definição de limite. Convém enfatizar que, em limites, não é necessário que a função seja definida em $x=a$ para que o limite desta função exista quando $x\to a$.

2.2.4 Limites Infinitos

Definição 5: Uma função $f(x)$ torna-se *infinitamente grande positivamente* quando $x\to a$ se o valor de $f(x)$ se torna e permanece maior do que qualquer número positivo M devidamente escolhido, por maior que seja. Isto é,

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall M>0,\ \exists\delta>0 \text{ tal que } f(x)>M \text{ se } 0<|x-a|<\delta.$$

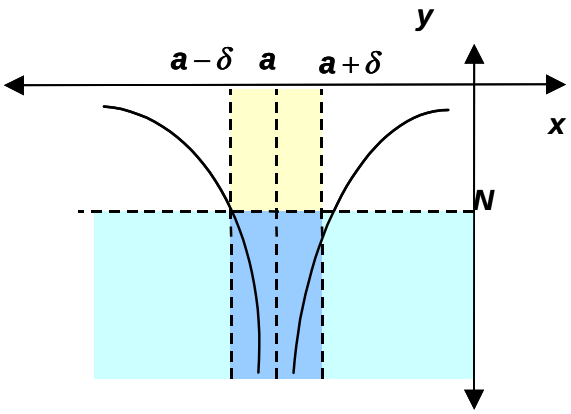
Geometricamente:



Definição 6: Uma função $f(x)$ torna-se *infinitamente grande negativamente* quando $x \to a$ se o valor de $f(x)$ se torna e permanece menor do que qualquer número positivo N devidamente escolhido, por menor que seja. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N < 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(x) < N \text{ se } 0 < |x - a| < \delta.$$

Geometricamente:



Exemplo 8: Mostre que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Solução: Dado um número $M > 0$ para que $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) > M$ se $0 < |x - 1| < \delta$.

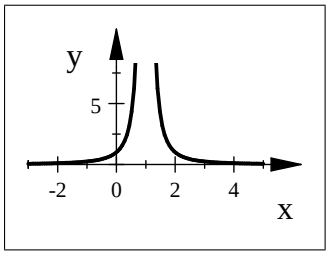
Seja $M > 0$. Assim,
$f(x) > M$ se $0 < |x - 1| < \delta$
$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > M$, se $0 < |x - 1| < \delta$
$\Rightarrow \quad (1 - x)^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x - 1| < \delta$.

Por propriedade de valor absoluto, temos que:
$\Rightarrow \quad |1 - x|^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x - 1| < \delta$.

Como $|1 - x| = |x - 1|$, temos que:
$\Rightarrow \quad |x - 1|^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x - 1| < \delta$
$\Rightarrow \quad |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Logo, escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ tem-se o resultado.

Se $M = 9$, então $\delta = \frac{1}{3}$.



Exemplo 9: Mostre que $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

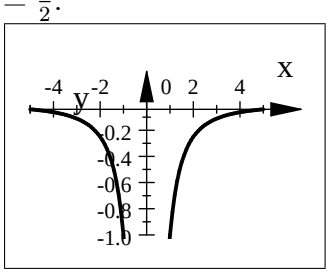
Solução: Dado um número $N < 0$ para que $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) < M$ se $|x - 0| < \delta$.

Seja $N < 0$. Assim,
$f(x) < N$ se $0 < |x| < \delta$
$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{x^2} < N$, se $0 < |x| < \delta$
$\Rightarrow \quad -x^2 > \frac{1}{N}$, se $0 < |x| < \delta$.
$\Rightarrow \quad x^2 < -\frac{1}{N}$, se $0 < |x| < \delta$.

Por propriedade de valor absoluto, temos que:
$\Rightarrow \quad |x|^2 < \frac{1}{-N}$, se $0 < |x| < \delta$.
$\Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{-N}}$.

Logo, escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{-N}}$ obtém-se o resultado.

Se $N = -4$, então $\delta = \frac{1}{2}$.



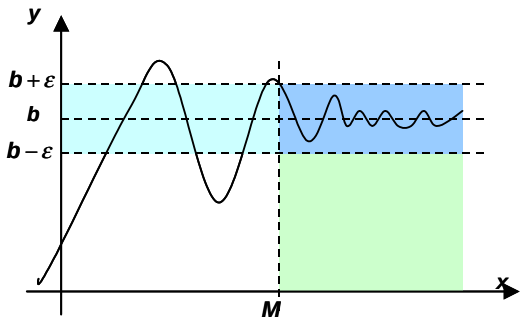
Observação: Encontramos com muita freqüencia gráficos que se aproximam de *uma reta* à medida que x cresce ou decresce. Estas retas são chamadas de *assíntotas*. No exmplo 8, temos duas assíntotas: $x = 1$ e $y = 0$. A primeira é chamada de *assíntota vertical*; a segunda, *assíntota horizontal.*

2.2.5 Limites no Infinito

Definição 7: Uma função $f(x)$ tem limite b quando x ao infinito positivamente, se para qualquer número ε positivo por pequeno que seja, é possível indicar um M positivo, tal que, para todo x que satisfaz $x > M$ se verifica $|\ f(x) - b| < \varepsilon$. Isto é,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tal que} |\ f(x) - b| < \varepsilon \text{ se } x > M.$$

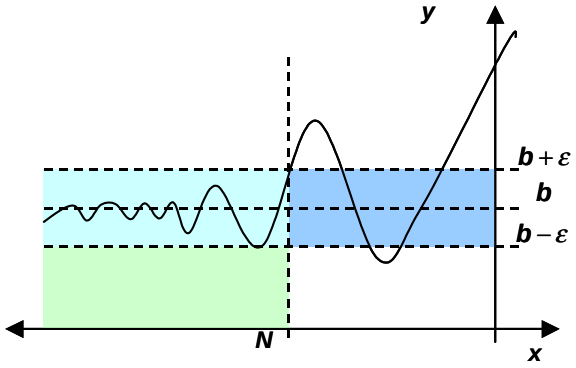
Geometricamente:



Definição 8: Uma função $f(x)$ tem limite b quando x ao infinito negativamente, se para qualquer número ε positivo por pequeno que seja, é possível indicar um N negativo, tal que, para todo x que satisfaz $x < N$ se verifica $|f(x) - b| < \varepsilon$. Isto é,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists N < 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \varepsilon \text{ se } x < N.$$

Geometricamente:



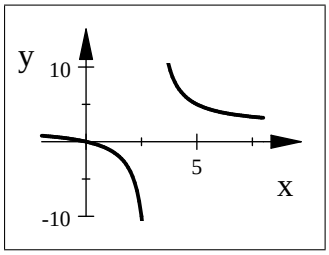
Exemplo 10: Mostre que $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-3} = 2$.

Solução: Pela definição de limite, sabemos que
$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-3} = 2$ se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $N < 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& |f(x) - 2| < \varepsilon && \text{se} && x < N \\
\Rightarrow\quad & \left|\tfrac{2x}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \left|\tfrac{2(x-3+3)}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \left|2 + \tfrac{6}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{6}{|x-3|} < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & |x-3| > \tfrac{6}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Por propriedade de módulo, temos que
$x - 3 < -\frac{6}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x < 3 - \frac{6}{\varepsilon}$.

Logo, $N = 3 - \frac{6}{\varepsilon}$
Se $\varepsilon = 0,05$, então $N = -117$.



Exemplo 11: Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{x+4} = 1$.

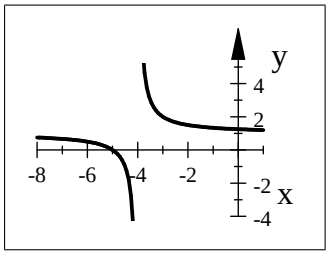
Solução: Pela definição de limite, sabemos que

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{x+4} = 1$ se, e somente se, dado qq $\varepsilon > 0$, existe um número $M > 0$ tal que

$$\begin{array}{lll} & |f(x) - 1| < \varepsilon & \text{se} \quad x > M \\ \Rightarrow & \left|\frac{x+5}{x+4} - 1\right| < \varepsilon & \\ \Rightarrow & \left|\frac{(x+4)+1}{x+4} - 1\right| < \varepsilon & \\ \Rightarrow & \left|1 + \frac{1}{x+4} - 1\right| < \varepsilon & \\ \Rightarrow & \frac{1}{|x+4|} < \varepsilon & \\ \Rightarrow & |x+4| > \frac{1}{\varepsilon} & \end{array}$$

Por propriedade de módulo, temos que
$x + 4 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x > 4 + \frac{1}{\varepsilon}$.

Logo, $M = 4 + \frac{1}{\varepsilon}$.



2.2.6 Limites Infinitos no Infinito

Definição 9: Uma função $f(x)$ torna-se infinitamente grande positivamente quando x tende ao infinito positivamente se, para cada número M positivo qualquer (tão grande quando se queira) pudermos determinar um número m positivo, tal que para todo x que satisfaz $x > m$ verifica $f(x) > M$. Isto é,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists m > 0 \text{ tal que } f(x) > M \text{ se } x > m.$$

Analogamente, nos demais casos, temos que:

Definição 10: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists m > 0$ tal que $f(x) < N$ se $x > m$.

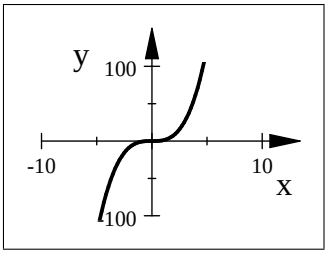
Definição 11: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n < 0$ tal que $f(x) > M$ se $x < n$.

Definição 11: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists n < 0$ tal que $f(x) < M$ se $x < n$.

Observação: Convém esclarecer que $+\infty$ e $-\infty$ não são números, dizer que $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ indica o comportamento da variável x. Este fato não tem o mesmo significado que, por exemplo, $x \to 10$ ou $x \to -10$. Neste caso, dizemos que o limite da função não existe.

Exemplo 12: Determine os limites no infinito de $f(x) = x^3$.
Solução: Geometricamente, é fácil concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$



2.3 Propriedades dos Limites

Sejam $f(x)$e $g(x)$ funções para as quais existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$. Assim:

1. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;

   Lê-se: o limite de uma soma e/ou diferença de funções é igual a mesma soma e/ou diferença dos limites destas funções.

2. $\lim_{x\to a} [k.f(x)] = k.\lim_{x\to a} f(x)$;

   Lê-se: o limite do produto de uma constante k por uma função é igual ao produto desta constante pelo limite da função.

3. $\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$;

   Lê-se: o limite de um produto de duas funções é igual ao produto dos limites destas duas funções.

4. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, se $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)\neq 0$;

   <u>Lê-se</u>: *o limite de um quociente de funções, se existir, é igual ao quociente dos limites destas funções.*

5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]^{n}=\left(\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\right)^{n}$, com $n\in\mathbb{N}$;

   <u>Lê-se</u>: *o limite da potência de uma função é igual a potência do limite desta função.*

6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f\left(x\right)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)}$;

   Lê-se: o limite da raiz n-ésima de uma função é igual a raiz n-ésima do limite desta função.

7. $\lim\limits_{x\to a}\left(\ln f\left(x\right)\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\right)$, se $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)>0$;

8. $\lim\limits_{x\to a}\left(\cos f\left(x\right)\right)=\cos\left(\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin f\left(x\right)\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)}$;

11. O limite de uma função polinomial inteira quando $x\to\pm\infty$ é igual ao limite de seu termo de mais alto grau. Isto é: se $f\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, então

    (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\begin{cases}+\infty, \text{ se } a_0>0\\ -\infty, \text{ se } a_0<0\end{cases}$;

    (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty$, se $\begin{cases}\text{se } a_0>0 \text{ e } n \text{ par}\\ \text{se } a_0<0 \text{ e } n \text{ ímpar}\end{cases}$;

    (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, se $\begin{cases}\text{se } a_0>0 \text{ e } n \text{ ímpar}\\ \text{se } a_0<0 \text{ e } n \text{ par}\end{cases}$.

12. Se $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=b$ e se $h\left(x\right)$ é um função para a qual $f\left(x\right)\leq h\left(x\right)\leq g\left(x\right)$, então $\lim\limits_{x\to a}h\left(x\right)=b$. *(Propriedade do Confronto.)*

13. Se o $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=b\neq 0$, então existe uma vizinhança do ponto $x=a$ na qual $f(x)$ conserva o sinal de b. *(Propriedade da Conservação do Sinal.)*

14. Se $f(x)$ assume somente valores positivos e se $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=b$, então b será um número positivo.

Observações: Por comodidade, não efetuamos as demonstrações de nenhuma propriedade, que ficam como exercícios.

2.4 Cálculo de Limites

No cálculo do limite de uma função, quando obtivermos uma das sete formas,

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^{\pm\infty} \text{ e } \infty^0,$$

conhecidas como *formas indeterminadas*, nada se poderá concluir de imediato sem um estudo mais profundo de cada caso, estudo esse feito em geral com auxílio da equivalência entre funções.

Exemplo 13: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 8}\left(3x^2+\sqrt[3]{x-7}+xe^{x-9}+2\right)$

   Solução: Pelas propriedades de limites, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 8}\left(3x^2+\sqrt[3]{x-7}+xe^{x-9}+2\right)=$

   $=3\lim\limits_{x\to 8}\left(x^2\right)+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 8}\left(x-7\right)}+\lim\limits_{x\to 8}x.\lim\limits_{x\to 8}e^{x-9}+\lim\limits_{x\to 8}2$

   $=3\lim\limits_{x\to 8}\left(x^2\right)+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 8}x-\lim\limits_{x\to 8}7}+\left(\lim\limits_{x\to 8}x\right).e^{\left(\lim\limits_{x\to 8}(x-9)\right)}+\lim\limits_{x\to 8}2$

   $=3\left(8\right)^2+\sqrt[3]{8-7}+\left(8\right).e^{\left(\lim\limits_{x\to 8}x-\lim\limits_{x\to 8}9\right)}+2$

   $=3*64+1+8e^{8-9}+2$

   $=8e^{-1}+195.$

   Observação: Note que, escrevendo passo a passo todas as propriedades de limites, o cálculo do limite torna-se trabalhoso. Com a experiência, é possível aplicar diretamente estas propriedades.

2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\frac{0}{0}$;

   Solução: Devemos eliminar a ndeterminação, para isso, usarmos manipulações algébricas.

   $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\left(x-2\right)=-5.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{0}{0}$;

   Solução: Multiplicando e dividindo pelo conjugado de $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$.

Solução: Definindo $x=t^6$, e observando que se $x\to 1$, então $t\to 1$, temos que:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5}{5x^2+3x}=\frac{\infty}{\infty}$;

Solução 1:

Pela propriedade (11), temos que: $\lim\limits_{x\to a}\frac{-2x^2}{5x^2}=-\frac{2}{5}$.

Solução 2:

Colocando x^2 em evidência no numerador e denominador, temos que:

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to\infty}}\frac{-2x^2+5}{5x^2+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{3}{x}}=-\frac{2}{5}$, pois $\frac{5}{x^2}$ e $\frac{3}{x}$ tendem a zero quando $x\to\infty$

Observação: Quando temos $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ estamos denotando os limites no infinito, ou seja, queremos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2x^2y+2x^3y^2}{4-3xy-2y^3x^3}=\frac{\infty}{\infty}$

Solução: Pela propriedade (11), temos que:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2x^2y+2x^3y^2}{4-3xy-2y^3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3y^2}{-2y^3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y^2}{-y}=-\frac{1}{y}$.

7. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x^2-a^2}=\frac{0}{0}$;

Solução: Fatorando o numerador, temos que:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\left(x^2-a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\left(x^2+a^2\right)=2a^2$.

8. $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x-a)^n-x^n}{a}=\frac{0}{0}$;

Solução: Pela forma binomial, temos que:

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x-a)^n-x^n}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)x^{n-2}a^2}{2!}+\cdots+(-a)^n-x^n}{a}$

$=\lim\limits_{a\to 0}\left(-nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}a}{2!}+\cdots+(-a)^{n-1}\right)=-nx^{n-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\frac{\infty}{\infty}$;

Solução: Colocando x^2 em evidência no numerador e denominador, temos que:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}$

Analisando os limites no infinito, temos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\infty-\infty;$

Solução: Multiplicando e dividindo pelo conjugado do númerador, temos que:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$

Assim,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=2.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=-2.$

11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{|2x-6|}{x^2-9}=\frac{0}{0}.$

Solução: Temos que, $f(x)=\frac{|2x-6|}{x^2-9}=2\frac{|x-3|}{(x-3)(x+3)}$

Pela definição de módulo, temos que:

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, \text{ se } x\geq 3\\ 3-x, \text{ se } x<3\end{cases}.$$

Reescrevendo a função, temos que:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+3}, \text{ se } x\geq 3\\ -\frac{2}{x+3}, \text{ se } x<3\end{cases}.$$

Assim, para determinar $\lim\limits_{x\to3}f(x)$, analisemos os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2}{x+3}=\frac{1}{3}.$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(-\frac{2}{x+3}\right)=-\frac{1}{3}.$

Como $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$, então $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ não existe.

12. $\lim\limits_{x\to2}f(x)$, onde $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{ se } x<2\\ 6 \text{ , se } x=2\\ 9-2x, \text{ se } x>2\end{cases}.$

Solução: Como $f(x)$ é uma função definida por partes, para determinar $\lim_{x\to 2} f(x)$ devemos analisar os limites laterais.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (9-2x) = 5.$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 5.$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, então $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.

Exemplo 13: Se $f(x) = \frac{1}{x}$, mostre que $\lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} = -\frac{1}{x^2}$.

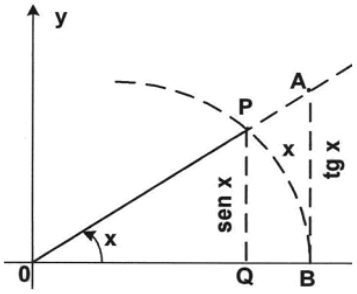
Solução: $\lim_{a\to 0} \frac{f(x+a)-f(x)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{-1}{x(x+a)} = -\frac{1}{x^2}$.

2.5 Limites Notáveis

Desenvolveremos aqui, alguns limites, cujas generalizações serão de grande utilidade no cálculo dos limites de funções que assumem uma das indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, 1^∞ e ∞^0.

Proposição 1: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Demonstração:



Do gráfico, teremos que:

$\sin x < x < tg(x) \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$.

Para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *temos que* $\sin x > 0$ *e* $\cos x > 0$. *Assim, dividindo tudo por* $\sin x$, *obtém-se que:*

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Por propriedades de desigualdades não estrita, temos que:

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Tomando o limite para $x \to 0$, *segue que:*

$\lim_{x\to 0} 1 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} \cos x \quad \Rightarrow \quad 1 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$.

Pela propriedade do Confronto, otbemos que:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exemplo 14: Calcule os limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{0}{0}$.

Solução: Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{\sin bx}.\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\sin ax}{ax}}{\frac{b\sin bx}{bx}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\sin ax}{ax}}{\frac{b\sin bx}{bx}}=\frac{a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{b\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}.$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\frac{0}{0}$.

Solução: Reescrevendo a função, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

3. $\lim_{x\to 0}\left(x.\mathrm{cossec}\,(3x)\right)=0.\infty$.

Solução: Reescrevendo a função, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(x.\mathrm{cossec}\,(3x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(x.\frac{1}{\sin(3x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin(3x)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}=\frac{1}{3}.$$

Proposição 2: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

Demonstração:

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$*, para* $\theta=\frac{x}{2}$*, temos que:*

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1*0=0.$

Exemplo 15: Calcule os limites:

1. $\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)}=\frac{0}{0}$

Solução: Definindo $t=x-\pi$. Se $x\to\pi$, então $t\to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{0}{1}=0.$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x\sin(4x)}=\frac{0}{0}$.

Solução: Multiplicando e divindindo pelo conjugado do numerador, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(4x)}{x\sin(4x)(1+\cos(4x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(4x)}{x\sin(4x)(1+\cos(4x))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x(1+\cos(4x))}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(4x)}=4.1.\frac{1}{2}=2.$$

Proposição 3: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, onde $e\approx 2.7183$ é o número irracional neperiano.

Demonstração: A prova desta proposição envolve noções de séries, por este motivo será omitida aqui.

Exemplo 16: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$.

   Solução: Definindo $u = \frac{1}{x}$. Se $x \to 0$, então $u \to \infty$. Assim,

   $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = 1^{\infty}$.

   Solução: Definindo $y = \frac{a}{x}$. Se $x \to \infty$, então $y \to 0$. Assim,

   $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{a}{y}} = \left(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{a} = e^{a}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = 1^{\infty}$.

   Solução: Reescrevendo a função, temos que:

   $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$.

   Definindo $\frac{4}{x-1} = \frac{1}{v}$. Se $x \to \infty$, então $v \to \infty$. Assim,

   $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{4v+4} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v}\right)^{4}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{4} = e^{4}$.

Proposição 4: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Demonstração: Definindo $u = a^x - 1$.

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os lados, temos que:

$\ln(u+1) = \ln a^x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(u+1)}{\ln a}$.

Se $x \to 0$*, então* $u \to 0$*. Dessa forma,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln a}} = \ln a.\ \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = \ln a.\ \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} =$$
$$= \ln a.\ \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\ln(u+1)}{u}\right)} = \ln a.\ \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} = \ln a.\frac{1}{\ln e} = \ln a.$$

Exemplo 17: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^{5x}-1}{x}} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{2\ln e}{5\ln e} = \frac{2}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{7^x-49}{x-2} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Reescrevendo a função, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 2}\frac{7^x-49}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{7^x-7^2}{x-2} = 7^2\lim\limits_{x\to 2}\frac{7^{x-2}-1}{x-2}$.

   Definindo $u = x - 2$. Se $x \to 2$, então $u \to 0$.

   $\lim\limits_{x\to 2}\frac{7^x-49}{x-2} = 49\lim\limits_{u\to 0}\frac{7^u-1}{u} = 49\ln 7$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\frac{0}{0}$.

Solução: Multiplicando e dividindo a função por $a\ln(1+x)$, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}.\frac{a\ln(1+x)}{x}\right)=a\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$$

$$=a\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$$

$$=a\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$$

$$=a\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$$

Definindo: $u=(1+x)^a$, então $\ln u=a\ln(1+x)$.

Se $x\to 0$, então $u\to 1$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\lim_{u\to 1}\left(\frac{u-1}{\ln u}\right). \qquad (*)$$

Definindo: $y=u-1$. Se $u\to 1$, então $y\to 0$. Dessa forma, em $(*)$, temos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=a.\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=a\frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)}=a\frac{1}{\ln e}=a.$$

2.6 Continuidade de uma Função

Ao estudarmos $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a, pois o $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ pode existir sem mesmo a função estar definida no ponto $x=a$.

Definição 12: Dizemos que uma função $f(x)$ é *contínua no ponto* c se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:

i. $f(c)$ está definida;

ii. $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ existir;

iii. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$.

Se uma ou mais destas três condições não for verificada, dizemos que a função $f(x)$ tem uma descontinuidade no ponto $x=a$.

Exemplo 18: Determine se as funções são contínuas no ponto $x=1$.

a. $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$; b. $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1}, \text{ se } x\neq 1\\ 2\ , \text{ se } x=1\end{cases}$ c. $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1}, \text{ se } x\neq 1\\ 3\ , \text{ se } x=1\end{cases}$

Solução: Observe que as três funções são idênticas, exceto no ponto $x=1$. Assim,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+2) =$$

3.

Logo, a segunda condição da definição de continuidade é satisfeita para as funções f, g e h. Analisemos as outras duas condições separadamente:

a. f não está definida em $x = 1$. Portanto, f não é contínua em $x = 1$, pois falha a primeira condição da definição de continuidade.

b. Para a função g, temos que: $g(1) = 2$, mas $g(1) \neq \lim_{x\to 1} g(x)$. Logo, a função g não é contínua em $x = 1$, pois falha a terceira condição da definição de continuidade.

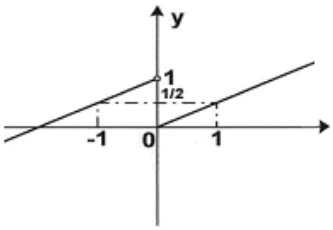
c. Para a função h, temos que: $h(1) = 3$ e $h(1) = \lim_{x\to 1} h(x)$. Conclusão, a função h é contínua em $x = 1$.

Exemplo 19: Estude a continuidade das funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } x \geq 0 \\ \frac{x}{2} + 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$;

Solução:

O gráfico de f é:



Graficamente, conclui-se que f não é contínua, pois a função apresenta um salto no ponto $x = 0$.

Verificando as condições da definição 12.

(a) $f(0) = 0$;

(b) Os limites laterais são:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right) = 0$;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 1$.

Logo, como o $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, então não existe o $\lim_{x\to 0} f(x)$ (limite bilateral).

Conclusão: A função f não é contínua em $x = 0$, pois a segunda condição da definição de continuidade não é satisfeita.

2. $f(x) = \begin{cases} |2x+5|, \text{ se } x \neq -\frac{5}{2} \\ 3 \quad , \quad \text{se } x = -\frac{5}{2} \end{cases}$;

Solução: Aplicando a definição de módulo, podemos reescrever $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+5), \text{ se } x < -\frac{5}{2} \\ 3 \quad , \quad \text{se } x = -\frac{5}{2} \\ 2x+5, \text{ se } x > -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Verificando se as condições da definição 12 são satisfeitas:

(a) $f\left(-\frac{5}{2}\right) = 3$;

(b) Limites laterais:

$\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}^-} (-2x-5) = 0$;

$\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}^+} (2x+5) = 0$;

Como os limites laterias são iguais, então $\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}} f(x) = 0$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\frac{5}{2}} f(x) \neq f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Conclusão: f não é contínua em $x = -\frac{5}{2}$.

Exercício: *Mostre que a função $f(x) = |x|$ é uma função contínua.*

Há alguns casos em que a função $f(x)$ não está definida no ponto $x = a$, mesmo assim, pode ser contínua neste ponto, fato este que fica esclarecido no teorema seguinte:

Teorema: Se a função $f(x)$ não é definida para $x = c$ e se o $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, então a função $f(x)$ será contínua em $x = c$ se o valor b for atribuído à $f(x)$ para $x = c$. Isto é:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ , se } x \neq c \\ b \text{ , se } x = c \end{cases}.$$

Observação: A descontinuidade a que se refere o teorema acima é dita *descontinuidade removível* e a qual o teorema não se aplica, ilustrada no , número 1, do exemplo 19, é dita *descontinuidade essencial*.

Exemplo 20: Estude a continuidade da função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Solução: Como a função $f(x)$ não é definida para $x = 2$, então $f(x)$ não é contínua neste ponto.

Observe que: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

A função f só será contínua em $x = 2$ se redefinirmos essa função da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} \text{ , se } x \neq 2 \\ 4 \text{ , se } x = 2 \end{cases}$$

Conclusão: $x = 2$ é uma descontinuidade removível.

2.7 Continuidade em Intervalos

Uma função é contínua em um intervalo quando é contínua para todo x deste intervalo. Assim,

Definição 13: Dizemos que f é *contínua à direita em* a se, e somente se,

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Definição 14: Dizemos que f é *contínua à esquerda em* b se, e somente se,

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Definição 15: Uma função $f(x)$ é dita *contínua em um intervalo fechado* $[a, b]$, se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) f é contínua em (a, b);

(ii) f é contínua à direita em a;

(iii) f é contínua à esquerda em b.

Exemplo 21: Verificar se $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em $[-2, 2]$.
Solução:
Sabemos que o domínio de f é $Df = [-2, 2]$. Verifiquemos se as condições da definição 15 são satisfeitas.

(i) Para qualquer $c \in (-2, 2)$, temos que $f(c) = \sqrt{4 - x^2} = \lim_{x \to c} f(x)$. Logo, f é contínua em (a, b).

(ii) $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(-2)$. Então, f é contínua à direita em a.

(iii) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(2)$. Então, f é contínua à esquerda em a.

Conclusão: $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

2.8 Propriedades das Funções Contínuas

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em c, então:

(i) $f(x) \pm g(x)$ é uma função contínua em c;

(ii) $f(x).g(x)$ é uma função contínua em c;

(iii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ é uma função contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c se $g(c) = 0$.

Teorema: Todo polinômio é uma função contínua.

Demostração: Queremos mostrar que $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$, *onde* $p(x)$ *é um polinômio de grau* n.

Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

Tomando o limite para $x \to c$, *temos que:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\\ &= \lim_{x\to c}(a_0x^n) + \lim_{x\to c}(a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\\ &= a_0\lim_{x\to c}x^n + \lim_{x\to c}(a_1x^{n-1}) + \lim_{x\to c}(a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\end{aligned}$$

Aplicando-se sucessivamente as propriedades de limites, segue que:

$\lim_{x\to c} p(x) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n = p(c)$.

Portanto, $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

Continuidade de Funções Racionais

Uma função racional é contínua em todo seu domínio.

Exemplo 22: Para quais valores de x a função $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-5x+6}$ é contínua?

Solução: Como $f(x)$ é uma função racional, então é contínua em todo seu domínio, ou seja, em todos os pontos, exceto onde o denominador se anula. Logo, f é contínua em $\mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Continuidade de Funções Compostas

Se $f(x)$ é contínua em $x = c$ e $g(x)$ é contínua em $f(c)$ então, a função composta $(g \circ f)(x)$ é também contínua em c, isto é:

$$\lim_{x\to c}(g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = g(f(a)).$$

Exemplo 23: Sejam $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 2^x$. Então a função $g \circ f$ é contínua em $x = 0$?

Solução: Como $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(\cos x) = g(0) = 1 = g(f(0))$, então $g \circ f$ é contínua em $x = 0$.

Exemplo 24: Investigue se a função $f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(2x)}{\ln(\sin x)}$ em $x = \frac{\pi}{6}$.

Solução: Note que $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_3(f_2(x))},$$

onde $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$ e $f_3(x) = \ln x$.

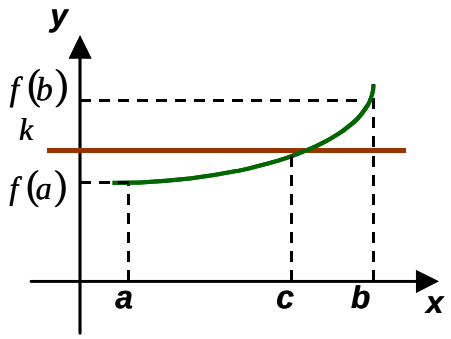
Em $x = \frac{\pi}{6}$, temos que:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f_1(x) = \operatorname{sin}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = f_1\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad f_1$ é contínua;
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f_2(x) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = f_2\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad f_2$ é contínua;
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f_3(f_2(x)) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f_3\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = -\ln 2 = f_3\left(f_2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad f_3 \circ f_2$ é contínua.

Pelas propriedades (i) e (iii) de funções contínuas, concluímos que f é contínua em $x = \frac{\pi}{6}$.

Teorema do Valor Intermediário

A figura abaixo, mostra o gráfico de uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, sugere que se traçarmos uma reta horizontal $y = k$, onde k está entre $f(a)$ e $f(b)$ então essa reta irá interceptar a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.



Teorema do Valor Intermediário: Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e k é um número real tal que $f(a) \leq k \leq f(b)$ ou $f(b) \geq k \geq f(a)$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Conseqüência: *Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, se f é contínua em um intervalo fechado e f aplicada nos extremos do intervalo tem sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz pertencente a este intervalo.*

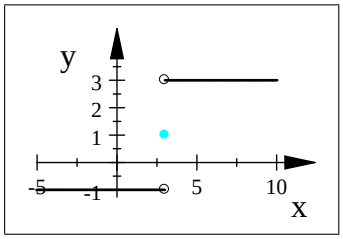
Exemplo 25: Seja $f(x) = x^2 + x - 2$. Existe alguma raiz de f no intervalo $[0, 2]$?

Solução: Temos que $f(0) = -2$ e $f(2) = 4$. Como fé contínua em $[0, 2]$, $f(0) < 0$ e $f(2) > 0$, então pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

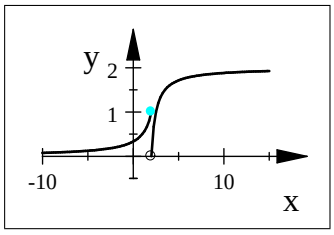
Determine este c!

2.9 Exercícios

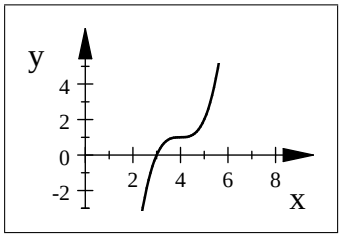
1. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine
   (a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$
   (d) $f(3)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



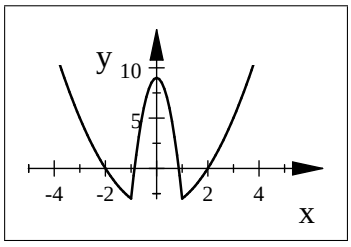
2. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine
   (a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$
   (d) $f(2)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



3. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine
   (a) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 4} f(x)$
   (d) $f(4)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



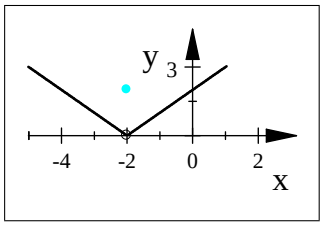
4. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine
   (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$
   (d) $f(0)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



5. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -2} f(x)$

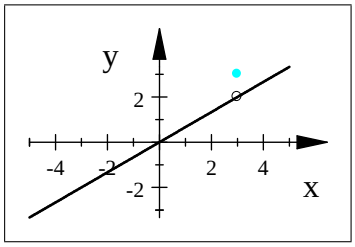
(d) $f(-2)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



6. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

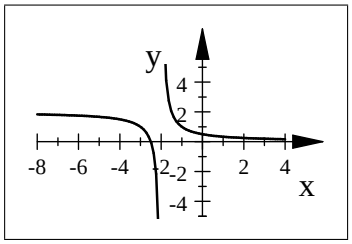
(d) $f(3)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



7. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -2} f(x)$

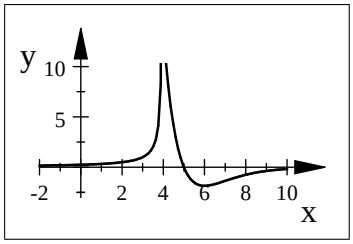
(d) $f(-2)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



8. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 4} f(x)$

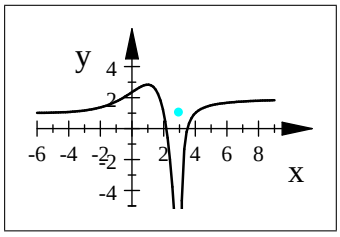
(d) $f(4)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



9. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

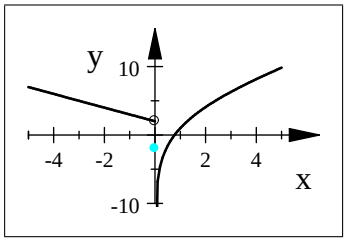
(d) $f(3)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



10. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

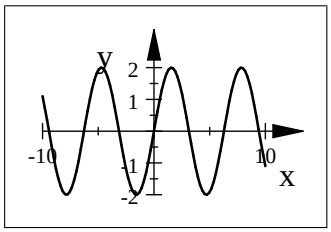
(d) $f(0)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



11. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

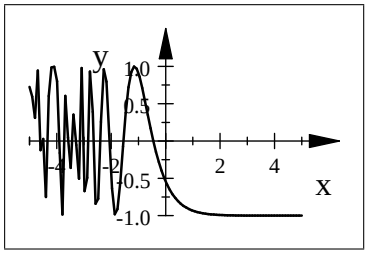
(d) $f(0)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



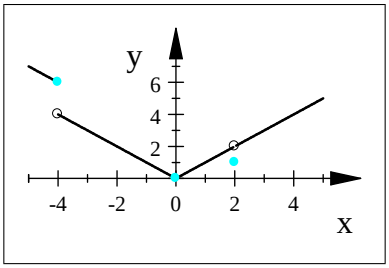
12. Para a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo, determine

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

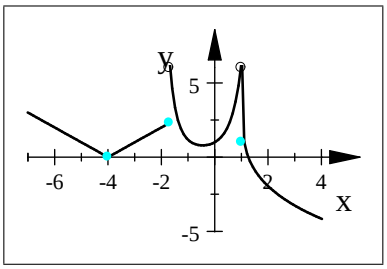
(d) $f(0)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (f) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



13. Considere a função $g(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo. Para que valores de x_0 existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$?



14. Considere a função $f(x)$ cujo gráfico está na figura em anexo. Para que valores de x_0 existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$?



15. Use a definição de limite para mostrar que:

    (a) Se $f(x) = 2x + 3$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

    (b) Se $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$, então $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

    (c) Se $f(x) = x^2 - x - 6$, então $\lim_{x \to 2} f(x) = -4$.

    (d) Se $f(x) = \frac{1}{2 - x}$, então $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

    (e) Se $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$, então $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

    (f) Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$, então $\lim_{x \to 5} f(x) = \frac{1}{2}$.

    (g) Se $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

    (h) Se $f(x) = \sqrt{x - 1}$, então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

    (i) Se $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$, então $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

    (j) Se $f(x) = x^2 + 2x$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

    (k) Se $f(x) = x^2 - x - 6$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = -6$.

(l) Se $f(x) = \frac{4}{x-1}$, então $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.

(m) Se $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

(n) Se $f(x) = 1 - x$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(o) Se $f(x) = 2x + 3$, então $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

(p) Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(q) Se $f(x) = \frac{1}{3-x}$, então $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$.

(r) Se $f(x) = x + 3$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(s) Se $f(x) = \frac{x}{x+1}$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(t) Se $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

(u) Se $f(x) = \frac{1}{x-3}$, então $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.

(v) Se $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

(w) Se $f(x) = \frac{x+1}{x}$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(x) Se $f(x) = \frac{1}{x+2}$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(y) Se $f(x) = 3x^2 + x + 2$, então $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$.

(z) Se $f(x) = \frac{4x}{2x+3}$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

() Se $f(x) = \frac{5}{x-2}$, então $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

() Se $f(x) = \frac{2}{1-x}$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

16. Dados

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = -4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 0.$$

Obtenha os limites abaixo. Justifique seu raciocínio.

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + 2g(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x) - 3g(x) + 1]$ (c) $\lim_{x\to a} [g(x)]^2$

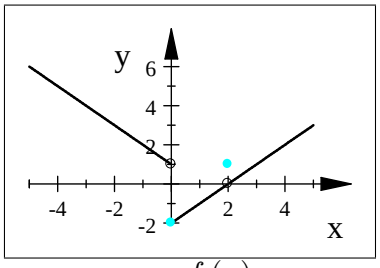
(d) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \frac{7g(x)}{2f(x)+g(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \frac{3f(x)-8g(x)}{h(x)}$

17. Use os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ na figura abaixo para determinar os seguintes limites:

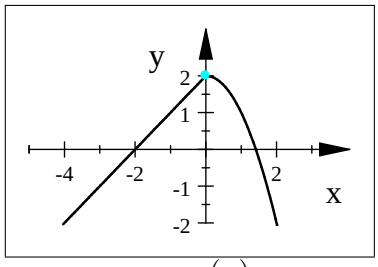
(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ (c) $\lim_{x\to 0^+}[f(x)+g(x)]$

(d) $\lim_{x\to 0^-}[f(x)+g(x)]$ (e) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{1+g(x)}$ (f) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1+g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{f(x)}$ (h) $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{f(x)}$



$y = f(x)$



$y = g(x)$

18. Determine os limites:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$
3. $\lim_{t\to -2}\frac{t^3+8}{t+2}$
4. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$
6. $\lim_{s\to -\infty}\frac{s^6-2s^3-5s+1}{4s^4-3s}$
7. $\lim_{s\to +\infty}\frac{s^6-2s^3-5s+1}{4s^4-3s}$
8. $\lim_{y\to -\infty}\frac{y-2}{y^2+2y+1}$
9. $\lim_{u\to +\infty}\sqrt[3]{\frac{3u^2-4u^5}{2u^7+1}}$
10. $\lim_{y\to -\infty}\frac{\sqrt{5y^2-2}}{y+3}$
11. $\lim_{u\to -\infty}\frac{u^2-8}{\sqrt{3u^4+u}}$
12. $\lim_{x\to -3}\frac{2x+8}{x+3}$
13. $\lim_{s\to 6}\frac{s+6}{s^2-36}$
14. $\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x^2-2x-8}$
15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
16. $\lim_{x\to 0}\frac{10x}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+3}}$
17. $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$
18. $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^4-16}{h}$
19. $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a^2+bt}-a}{t}$, $a>0$
20. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$, a, $b>0$
21. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$
22. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$
23. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$
24. $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$
25. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
24. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3}$
25. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
26. $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
27. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2}x\right)$
28. $\lim_{y\to +\infty}\frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$
29. $\lim_{y\to -\infty}\frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$
30. $\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^3-x^2+x-1}{x^4+x-x+1}$
31. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-5^x}{\sin 2x-\sin x}$
32. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

19. Esboce o gráfico da função $f(x)$ definida por partes e, para o valor a indicado, determine cada limite, se existir. Justifique sua resposta.

(a) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{se } x\le 2 \\ 4-2x, & \text{se } x>2 \end{cases}$, $a=2$;

(b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2-3x}, & \text{se } x\leq -3 \\ \sqrt{x+2}, & \text{se } x>-3 \end{cases}$, $a=-3$;

(c) $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{se } x\leq 0 \\ 2-x, & \text{se } 0<x\leq 1 \\ 4-x^2, & \text{se } x>1 \end{cases}$, $a=0$ e 1;

(d) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x^2-27|}{2x-6}, & \text{se } x\neq 3 \\ -1, & \text{se } x=3 \end{cases}$, $a=3$.

20. Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)\right]$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x}\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;
8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;
10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$;
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$;
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$;
14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$;
15. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$;
16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$;
17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin x}{x^3}$;
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}$;
19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$;
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;
21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;
22. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[n]{x}}{x-a}$;
23. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}$;
24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2(x)\right)^{\operatorname{cotg}^2(x)}$;
25. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}$;
26. $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x-3}}$;
27. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x-\sin 2}{x-2}$;
28. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}$;
29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x^2+4}$;
30. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;
31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1+x}-\frac{5}{x^2-1}\right)$;
32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;
33. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-9}{4x^2+7x+3}}$;
34. $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(\frac{x^{e^2}-1}{x-1}\right)$;
35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x.\operatorname{cotg}(x)}{x}$;
36. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3^{\frac{x+2}{7}}-1}{x+2}$;
37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1+e^{2x}}{2x}$;
38. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\cos(\pi x)+\frac{x^2-64}{x-4}\right)$;
39. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;
40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$;

41. $\lim\limits_{x\to -4} \sqrt[x+4]{(x+5)^2}$;
42. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[5+\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2$;
43. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}\right)$;
44. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{(2x-2)}-1}{e^{(5x-5)}-1}$;
45. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$;
46. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{\frac{3x^7-4x^5}{2x^7+1}}$;
47. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$;
48. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-1}{x^2\sec x}$;
49. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$;
50. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(3-x^3\right)^4-16}{x^3-1}$;
51. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[x\left(\ln\left(x-1\right)-\ln x\right)\right]$;
52. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-3\sin x}{x}$;
53. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos(2x)}{x^2}$;
54. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$;
55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin(2x)}$;
56. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2\mathrm{tg}^3(x)\cos x}$;
57. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$;
58. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{tg}(x)}{\cos x-\sin x}$;
59. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln e^{1-\cos x}.\ln\sqrt[x]{1+x}}{x}$;
60. $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$;
61. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{e^x-1}$;
62. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x+2\cos^2 x\right)^{\sec^2 x}$;
63. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}$;
64. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+\sin x-1}{\ln(x+1)}$;
65. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\sin(2x)-\sin x}$;
66. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{1-x}}}{x+5}$;
67. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}.\mathrm{tg}\left(x\right)\right)$;
68. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{\sin[5(x-1)]}$;
69. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{25-x^2}$;
70. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[10+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}\right]$;
71. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln\sqrt[x]{e}.\ln 2^{\sin^2 x}\right)$;
72. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^3-3x^2-x+3}$;
73. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[7x\left(1+\mathrm{cotg}^2 x\right)\right]^{-1}$;
74. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1-x+\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}$;
75. $\lim\limits_{x\to -2} \left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$;
76. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{e^x-e^3}{x-3}$.

21. Estude a continuidade das funções:

1. $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{5}{x-4}\text{ , se } x\neq 4 \\ 1\text{ , se } x=4 \end{cases}$;
2. $f\left(x\right)=\begin{cases} 1+x\text{ , se } x\leq -2 \\ 2-x\text{ , se } -2<x<2 \\ 2x-1\text{ , se } x\geq 2 \end{cases}$;
3. $f\left(x\right)=\begin{cases} -1\text{ , se } x<0 \\ 0\text{ , se } x=0 \\ x\text{ , se } x>0 \end{cases}$;
4. $f\left(x\right)=\frac{x^4-16}{x^2-4}$
5. $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x+3}\text{ , se } x\neq -3 \\ 1\text{ , se } x=3 \end{cases}$;
6. $f\left(x\right)=\frac{x^2-4}{x^4-16}$;

7. $f(x) = \begin{cases} 3x-2 \text{ , se } x<1 \\ x^2 \text{ , se } x \geq 1 \end{cases}$;

8. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$;

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} \text{ , se } |x| \leq 5 \\ 1 \text{ , se } |x|>5 \end{cases}$;

10. $f(x) = \left|\frac{x}{3}-2\right|$;

11. $f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$;

12. $f(x) = \frac{|x+3|+|x|+3}{x}$;

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x-3|} \text{ , se } x \neq 3 \\ 1 \text{ , se } x=3 \end{cases}$;

14. $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$;

15. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x^3}$;

16. $f(x) = \sqrt{x}+4$;

17. $f(x) = \frac{\left|3x^2+2x\right|}{x}$;

18. $f(x) = \frac{x^2-x}{|x|}$;

19. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

20. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+2} \text{ , se } x<3 \\ 0 \text{ , se } x=3 \\ \frac{1}{x-3}, \text{ se } x>3 \end{cases}$;

21. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x+2}$;

22. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ , se } -1<x<0 \\ \frac{2x^2}{x+1}, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$;

23. $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$;

24. $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ , se } x<0 \\ \frac{1}{x^2+1}, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$;

25. $f(x) = \frac{x^2-4}{x(x-5)}$;

26. $f(x) = \begin{cases} \ln x \text{ , se } 0<x<\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}(x), \text{ se } \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

27. $f(x) = \frac{\left|3x^2+2x\right|}{x}$;

28. $f(x) = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$;

29. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$;

30. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ , se } x \leq -1 \\ \ln e^{\sin x}, \text{ se } -1<x \leq 0 \\ e^x \ln(\sin x) \text{ , se } 0<x<1 \\ \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x}} \text{ , se } x \geq 1 \end{cases}$;

31. $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi e^x) \text{ , se } x \leq 0 \\ x^{x+1} \text{ , se } x>0 \end{cases}$;

32. $f(x) = \begin{cases} x+3 \text{ , se } x<0 \\ 2^{\cos x} \text{ , se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x, \text{ se } x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

33. $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) \text{ , se } x \geq 0 \\ -x \text{ , se } x<0 \end{cases}$;

34. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$;

35. $f(x) = \begin{cases} x^2-8 \text{ , se } x<3 \\ \frac{\sin(x-3)}{x-3}, \text{ se } x>3 \\ 1, \text{ se } x=3 \end{cases}$;

36. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+6} \text{ , se } x<-3 \text{ e } x>-2 \\ -1 \text{ , se } -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$;

37. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{3-x}$.

22. Determine o(s) valor(es) de k para que seja contínua a função

$$f(x) = \begin{cases} 2kx \text{ , se } x \leq 1 \\ x+k, \text{ se } 1<x<2 \\ \frac{2}{kx}, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}.$$

23. Considere a função f, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+2ax+b+15, \text{ se } x<-1 \\ 5, \text{ se } x=-1 \\ bx^3-ax^2, \text{ se } x>-1 \end{cases}$.

Encontre os valores de a e b de tal forma que a função $f(x)$ seja contínua.

24. Sejam f e g duas funções definidas por $g(x) = x - 2$ e $f(x) = \frac{(x-4)^2}{e^x - e^4}\text{cosec}(x-4)$. Determine $\lim_{x\to 6} h(x)$, onde $h(x) = (f \circ g)(x)$.

25. Sejam f e g duas funções definidas por $g(x) = \sqrt[2x]{x+1}$ e $f(x) = \ln(x+1)$. Determine $\lim_{x\to 0} h(x)$, onde $h(x) = (g \circ f^{-1})(x)$.

26. Sejam $f(x) = \ln\sqrt{2-2x}$, $\forall x < 1$, e $k = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x$. Encontre, se possível, o valor da constante c a fim de que $f^{-1}(0) = k$.

27. Considere a função $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}\sin(2x) + (x+1)b, & \text{se } x < 0 \\ a(x^2+1) + 3b, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Encontre, se possível, uma relação entre a e b de tal forma que a função $f(x)$ seja contínua em 0.

28. Obtenha $\lim_{x\to -1} F(x)$, sabendo que $F(x) = h(f(g^{-1}(x)))$, onde

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = e^x - 2 \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{1-\cos(x-1)}{x-1}$$

29. Sejam $f(x) = \sqrt[3]{\ln(2x - 1 + |1-x|)}$ e $g(x) = e^{x^3}$.
    (a) Determine o domínio da função f.
    (b) Estude a continuidade da função $h(x)$, sabendo que

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x)) & \text{, se } x \in Df \\ \frac{\sin(2x)}{x} - 2, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \{Df\} \end{cases}.$$

30. Para cada uma das funções abaixo:
    (a) Use a translação para esboçar o gráfico de f.
    (b) Determine os limites de f para $x \to \pm\infty$.
    (c) Classifique as descontinuidades de f. Caso f tenha alguma descontinuidade removível, redefina a função.eja $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$.
        i. $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$;
        ii. $f(x) = \frac{2x^2+4x}{x^2-x-6}$;
        iii. $f(x) = \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$.

31. A desigualdade $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ é válida para todo $x \geq 0$. Usando a desigualdade, determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3}$. Justifique sua resposta.

32. A solução abaixo está incorreta. Encontre e justofique o erro. A seguir, calcule (corretamente) o seguinte limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\tfrac{1}{x}\right)} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(x.0) = 0.$$

Capítulo 3

Derivada e Diferencial

Objetivos

- Determinar a equação de retas tangentes a uma curva em um determinado ponto;
- Resolver problemas que envolvam retas paralelas e normais à reta tangente de uma curva em ponto;
- Calcular derivadas pela definição;
- Derivar qualquer função, usando as regras de derivação;
- Determinar as derivadas laterais;
- Derivar funções compostas (regra da cadeia);
- Derivar implicitamente uma função;
- Encontrar a derivada de funções parametrizadas;
- Determinar derivadas de ordem superior;
- Interpretar geométrica e fisicamente derivadas e diferenciais;
- Resolver problemas que envolvam diferenciais.

3.1 Introdução

O Cálculo Diferencial é o ramo da matemática que tem como foco o estudo do movimento e da variação deste movimento. Seu objeto de estudo são as funções. As idéias que usaremos aqui foram introduzidas no século XVII por Newton e Leibnitz.

A intenção de Cálculo Diferencial é o de medir os incrementos ou variações de grandezas, isto é, problemas do tipo: dada uma função, medir o seu incremento.

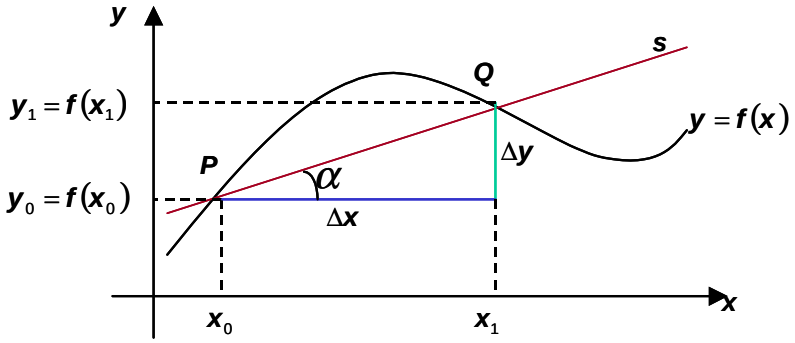
Exemplo 1:

a. A velocidade é a variação da distância em relação ao tempo, isto é, o incremento da distância na unidade de tempo é a velocidade.

b. O peso de um animal aumenta regularmente 5 quilos por mês, isto é, o seu incremento em quilos por mês é 5.

3.2 Reta Tangente

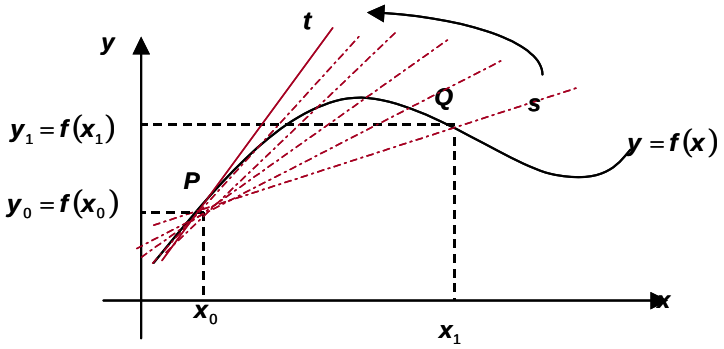
Sejam $y = f(x)$ uma curva do $\mathbb{R}^2$. Sejam P e Q dois pontos distintos desta curva, cujas coordenadas são $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, respectivamente.



A inclinação da reta secante s, que passa pelos pontos P e Q, é

$$m_s = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Sunpondo que o ponto P se mantém fixo e Q se move sobre a curva na direção de P. Assim, a inclinação da reta secante irá variar. À medida que Q se aproxima de P a inclinação da reta secante varia cada vez menos até atingir uma posição limite. Este limite é chamade de inclinação da reta tangente (t) à curva no ponto P.



Definição 1: Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre ela. A *inclinação da reta tangente* à curva em P é dada por

$$m_t = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

quando este limite existe.

Definindo $x_1 = x_0 + \Delta x$. Se $x_1 \to x_0$, então $\Delta x \to 0$. Assim, podemos reescrever o coeficiente angular da reta tangente como

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Sabemos que a equação geral de uma reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

onde m é o coeficiente angular da reta.

Dessa forma, podemos escrever a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0).$$

Exemplo 2:

1. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 6x + 9$, no ponto $P(x_0, y_0)$.

   Solução: Pela definição 1, sabemos que a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 6x + 9$ no ponto $P(x_0, y_0)$ é

   $$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 6(x_0 + \Delta x) + 9 - \left(x_0^2 + 6x_0 + 9\right)}{\Delta x} =$$

   $$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x) + 6) = 2x_0 + 6.$$

   Logo, o coeficiente angular da reta tangente é $2x_0 + 6$.

2. Determine a equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 + 5$, no ponto cuja abcissa é 4.

   Solução: Sabemos que, a equação da reta tangente à curva $y = f(x) = 3x^2 + 5$, no ponto de abcissa 4, é

   $$y - f(4) = m_t (x - 4),$$

   onde:

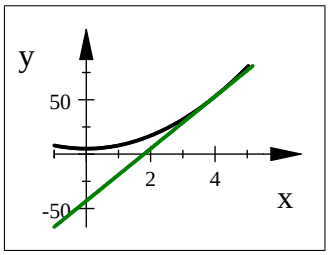
   $f(4) = 3(4)^2 + 5 = 53$;

   $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3(4+\Delta x)^2 + 5 - 53}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\left(16 + 8\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 48}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{24\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 24.$

   Logo, a equação da reta tangente é

   $y - 53 = 24(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = 24x - 43.$

   Geometricamente,



3. Considere à curva $y = \sqrt{x}$. Determine a equação da reta tangente a curva e paralela a reta $r : 18x - 3y + 3 = 0$.

   Solução: Seja t a reta tangente à curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ e paralela a reta $r : y = 6x + 1$.

   Como as retas t e s são paralelas, então $m_t = m_s = 6$. (1)

   Por outro lado, a inclinação da reta tangente é

   $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$

   Resolvendo-se o limite acima, obtém-se: $m_t = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. (2)

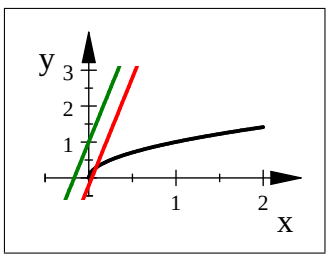
   Comparando (1) e (2), tem-se:

   $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{144}.$

   Logo, a equação da reta tangente no ponto $P\left(\frac{1}{144},\ f\left(\frac{1}{144}\right)\right)$ é

   $t : y - \frac{1}{12} = 6\left(x - \frac{1}{144}\right) \quad \Rightarrow \quad t : \ y = 6x + \frac{1}{8}.$

   Geometricamente,



4. Determine a equação da reta normal à curva $y = x^3$ no ponto $P(1,1)$.

   Solução: Sejam s e t as retas normal e tangente, respectivamente, à curva $y = x^3$ no ponto $P(1,1)$.

   Como as retas t e s são normais, então $m_t.m_s = -1$. (1)

   Por outro lado, a inclinação da reta tangente em P é

   $m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x} = \frac{0}{0}$

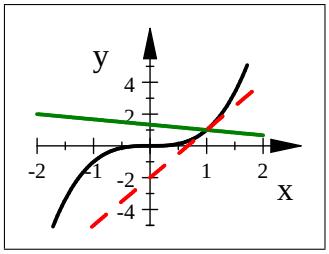
   Resolvendo-se o limite acima, obtém-se: $m_t = 3$. (2)

   Substituindo (2) em (1), tem-se que: $m_s = -\frac{1}{3}$.

   Dessa forma, a equação da reta normal no ponto $P(1,1)$ é

   $s : y - 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad s: \ y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x.$

   Geometricamente,



3.3 Derivadas

Derivada de uma função num ponto

Definição 2: A derivada de uma função $f(x)$ num ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$ é definida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Lembrando que: $x_1 = x_0 + \Delta x$, podemos escrever $f'(x_0)$ como

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Geometricamente, $f'(x_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

Derivada de uma função

Definição 3: A derivada de uma função $y = f(x)$, denotada por $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer $x \in Df$ é definido por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Dizemos que f é *derivável* quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Observações:

(i) Da definição 2**,** temos que o coeficiente angular da reta tangente a uma curva $y = f(x)$, em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, é $m_t = f'(x_0)$.

(ii) Na definição 3, o quociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ é chamado *Quociente de Newton.*

Outras notações de derivada:

$$f'(x) = y' = D_x f = \frac{dy}{dx}.$$

Exemplo 4: Seja $f(x) = x^2 + 1$. Determine $f'(3)$.

Solução: Pela definição de derivada de uma função num ponto, em $x_0 = 3$, temos que:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((3+\Delta x)^2+1\right)-\left(3^2+1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10+6\Delta x+(\Delta x)^2-10}{\Delta x} = 6.$$

Portanto, $f'(3) = 6$.

Exemplo 5: Determine a derivada de cada uma das funções:

1. $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$;

   Solução: Pela definição de derivada, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)-2}{(x+\Delta x)+3} - \frac{x-2}{x+3}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-2)(x+3)-(x-2)(x+\Delta x+3)}{\Delta x(x+3)(x+\Delta x+3)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(x+3)(x+\Delta x+3)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(x+3)(x+\Delta x+3)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

   Solução: Pela definição de derivada, temos que:

   $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$

   Definindo $u^3 = x + \Delta x$ e $a^3 = x$. Se $\Delta x \to 0$, então $u \to a$. Dessa forma,

   $f'(x) = \lim_{u \to a} \frac{u-a}{u^3-a^3} = \lim_{u \to a} \frac{1}{u^2+au+a^2} = \frac{1}{3a^2}$,

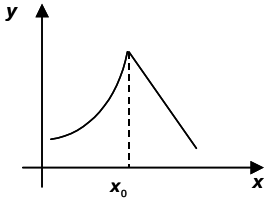
   mas $a = \sqrt[3]{x}$, então:

   $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

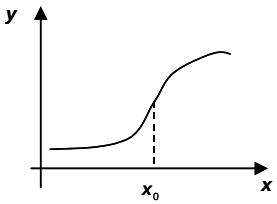
3.4 Diferenciabilidade

Como a definição de derivadas envolve limites, a derivada de uma função existe quando o limite da definição 3 existe. Esses pontos são chamado *pontos de diferenciabilidade* para f, e os pontos onde este limite não exist são chamados de *pontos de não-diferenciabilidade* para f.

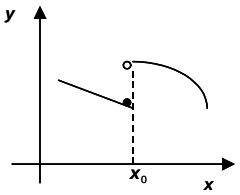
Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de f são aqueles onde a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente,e os pontos de não-diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente. De modo informal, os pontos de não-diferenciabilidade mais comumente encontrados podem ser classificados como: picos, pontos de tangência vertical e pontos de descontinuidade.



Pico

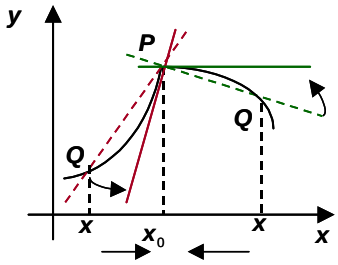


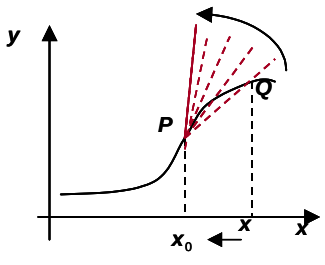
Ponto de tangência vertical



Ponto de descontinuidade

Intuitivamente, os picos são pontos de não-diferenciabilidade, uma vez que não há como desenhar uma única reta tangente em tal ponto. Por um ponto de tangência vertical entendemos um lugar na curva onde a reta secante tende a uma posição limite vertical. Neste pontos, o único candidato razoável para a reta tangente é uma reta vertical naquele ponto. Mas as retas verticais tem inclinações infinitas; logo, a derivada (se existisse) teria um valor finito real lá, o que explicaria intuitivamente por que a derivada não existe no ponto de tangência vertical.





Exercício 6: Prove que a função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

Solução: Pela definição de derivada de uma função em um ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Como os limites laterais são diferentes, dizemos que o limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Conseqüentemente, $f'(0)$ não existe.

Observação: A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ e no entanto não é derivável em $x = 0$.

Continuidade de funções deriváveis

Vejamos um teorema que nos garante a continuidade da função nos pontos em que esta é derivável.

Teorema: Se uma função $y = f(x)$ é derivável em $x = a$, então é contínua em $x = a$.

Demonstração:

Devemos mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *ou seja, que* $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Note que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} . \Delta x \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} . \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0}.$$

Por hipótese, f *é derivável então* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *existe e é igual a* $f'(x_0)$. *Dessa forma,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Por propriedades de limites, tem-se que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Definindo $x = x_0 + \Delta x$. *Se* $\Delta x \to 0$, *então* $x \to x_0$. *Portanto,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observações:

(i) Convém notar que o recíproco deste teorema não é necessariamente correto, isto é, uma função $y = f(x)$ pode ser contínua em $x = a$ e, no entanto, não derivável em $x = a$. Pode-se observar isso, no exemplo 6.

(ii) O teorema acima nos garante que nos pontos de descontinuidade a função não pode ter derivada. Embora com isto não se queira dizer que nos demais exista.

Exemplo 7: A função $y = f(x)$ é definida e contínua para todo $x \in \mathbb{R}_+$, mas $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ não é definida para $x = 0$. Portanto, não existe y' para $x \in \mathbb{R}_-$.

3.5 Derivadas Laterais

Definição 4: Seja $y = f(x)$ uma função definida em $x = x_0$, então *a derivada à direita* de $f(x)$ em x_0 indica por $f'_+(x_0)$ é definida por

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0^+} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

caso o limite exista.

Definição 5: Seja $y = f(x)$ uma função definida em $x = x_0$, então *a derivada à esquerda* de $f(x)$ em x_0 indica por $f'_-(x_0)$ é definida por

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0^-} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

caso o limite exista.

Do teorema da unicidade dos limites teremos que, se

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

então f é derivável em x_0.

Exemplo 8: Seja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x < 3 \\ 8 - x, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$, calcule a derivada em $x = 3$.

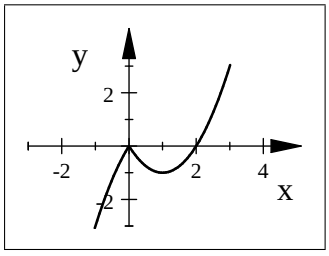
Solução: Sabemos que $f'(3)$ existe se as derivadas laterais existirem e forem iguais.

As derivadas laterais são:
$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} = 2;$
$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{8 - 3 - \Delta x - 8 + 3}{\Delta x} = -1.$
Como $f'_+(3) \neq f'_-(3)$, então f não é derivável em $x = 3$

Exemplo 9: Seja $f(x) = (x - 2)|x|$. Encontre $f'(0)$.
Solução: Aplicando a definição de módulo, podemos reescrever f como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x), & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

O gráfico de f é:



Geometricamente, concluímos f não é derivável em $x = 0$, pois apresenta um pico neste ponto.

Mostremos analiticamente que $f'(0)$ não existe.

As derivadas laterais são:

$f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{(0+\Delta x)^2-2(0+\Delta x)-0}{\Delta x} = -2;$

$f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(0+\Delta x)^2+2(0+\Delta x)-0}{\Delta x} = 2.$

Conclusão: $f'(0)$ não existe, pois $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

3.6 Regras de Derivação

A derivada de uma função é definida como um limite e usamos este limite para calcular alguns casos simples. Vamos desenvolver agora alguns teoremas importantes, que possibilitaram calcular derivadas de forma mais eficiente.

Derivada de uma função constante

Teorema: Se $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x)$.

Demostração: *Pela definição de derivada, temos que:*

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

Exemplo 10: Se $f(x) = 10$, então $f'(x) = 0$.

Regra da Potência

Teorema: Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostração: *Pela definição de derivada, temos que:*

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x} \qquad (1)$

Pelo binômio de Newton, sabemos que

$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n.$

Substituindo em (1)*, segue que:*

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1}.$

Portanto, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 11:

(a) Se $f(x) = x^7$, então $f'(x) = 7x^6$.

(b) Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.

Observação: Se $n \in \mathbb{Q}$, o teorema acima continua verdadeiro.

Derivada do produto de uma constante por uma função

Teorema: Se f for uma função diferenciável em x e c for um número real constante, então cf também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(cf\left(x\right)\right) = c\frac{df\left(x\right)}{dx}.$$

Demonstração: Defina $g\left(x\right) = cf\left(x\right)$. *Pela definição de limite, temos que:*
$g'\left(x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} = c\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
Como f *é diferenciável em* x, *então* $f'\left(x\right)$ *existe. Assim,*

$$g'\left(x\right) = cf'\left(x\right)$$

Portanto,

$$\left(cf\left(x\right)\right)' = cf'\left(x\right).$$

Exemplo 12:

(a) Se $f\left(x\right) = 3x^4$, então $f'\left(x\right) = 12x^3$.

(b) Se $f\left(x\right) = \frac{x^3}{\pi}$, então $f'\left(x\right) = \frac{3}{\pi}x^2$.

Derivada de soma e diferença de funções

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então $f \pm g$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right] = \frac{df\left(x\right)}{dx} \pm \frac{dg\left(x\right)}{dx}.$$

Demonstração: Definindo $h\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right)$. *Pela definição de limite, temos que:*
$h'\left(x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$.
Reagrupando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:
$h'\left(x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$.
Como f *e* g *são funções diferenciáveis, segue que*

$$h'\left(x\right) = f'\left(x\right) + g'\left(x\right).$$

Portanto, a derivada da soma é a soma das derivadas, ou seja,

$$\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) + g'\left(x\right).$$

Exemplo 13: Se $f(x) = 6\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 7$. Determine $f'(x)$.
Solução: Aplicando a propriedade da derivada da soma, temos que:
$f'(x) = \left(6\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 7\right)' = \left(6\sqrt[3]{x}\right)' + \left(3x^2\right)' + (7)'$.

Pelas propriedades da derivada de uma constante por uma função e da derivada de uma função constante, segue que:

$f'(x) = 6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 3\left(x^2\right)' + 0.$

Aplicando a regra da potência, obtém-se:
$f'(x) = 6.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 3.2x^{2-1} = 6x + \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = 6x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Regra do Produto

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então $f.g$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Demonstração: Definindo $h(x) = f(x).g(x)$. *Pela definição de limite, temos que:*

$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}$

Somando e subtraindo $f(x).g(x+\Delta x)$, *segue que:*

$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-\mathbf{f(x).g(x+\Delta x)+f(x).g(x+\Delta x)}-f(x).g(x)}{\Delta x}$.

Rearranjando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade do produto de limites, temos que:

$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} f(x).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$.

Como f *e* g *são funções diferenciáveis, segue que:*

$$h'(x) = g(x).f'(x) + f(x).g'(x).$$

Exemplo 14: Se $f(x) = x^2\sqrt{x}$. Determine $f'(x)$.
Solução 1: Pela regra do produto, temos que:
$f'(x) = \left(x^2\right)'\sqrt{x} + x^2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Solução 2: Reescrevendo f, temos que: $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$.
Pela regra do produto, obtemos que:
$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Observação: O teorema anterior é válido para mais de duas funções, vejamos para três. Se $f(x) = u(x).v(x).w(x)$, então

$$f'(x) = u'(x).v(x).w(x) + v'(x).u(x).w(x) + w'(x).u(x).v(x)$$

e assim sucessivamente.

Regra do Quociente

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Demonstração: Definindo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. *Pela definição de limite, temos que:*
$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x).f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}\right)$.
Somando e subtraindo $f(x).g(x)$, *segue que:*
$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x).f(x+\Delta x) + \mathbf{f(x).g(x)} - \mathbf{f(x).g(x)} - g(x+\Delta x)f(x)}{g(x).g(x+\Delta x)}\right)$
Rearranjando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)(.f(x+\Delta x) - f(x))}{g(x).g(x+\Delta x)\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)(-g(x)+g(x+\Delta x))}{g(x).g(x+\Delta x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{.f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x).g(x+\Delta x)} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como f *e* g *são funções diferenciáveis, segue que:*
$h'(x) = \frac{1}{g(x)}.f'(x) - \frac{f(x)}{(g(x))^2} g'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$.
Portanto,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Exemplo 15: Se $f(x) = \frac{x^2+2}{3x-1}$. Determine $f'(x)$.
Solução: Pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{(3x-1).\left(x^2+2\right)' - \left(x^2+2\right)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{(3x-1).2x - \left(x^2+2\right)3'}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2}$.

Regra da Cadeia

Teorema: Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$, duas funções deriváveis. A derivada da função y em relação a x é igual ao produto da derivada da função y em relação a u pela derivada da função u em relação a x, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x).$$

Demonstração: Formemos separadamente o quociente de Newton em ambas as funções, assim:

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u) \Rightarrow \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}; \quad (1)$$

$$u + \Delta u = g(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \Rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Notemos que, os primeiros membros de (1) *e* (2)*, nos dão uma razão entre o acréscimo de cada função e o acréscimo da correspondente variável. Os segundos membros de* (1) *e* (2)*, nos dão as mesmas razões de outra forma.*

Escolhemos os primeiros membros por ser uma notação mais conveniente e façamos o produto, assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Fazendo $\Delta x \to 0$*, então* $\Delta u \to 0$ *pois,* $u(x)$ *é derivável e portanto contínua. De onde vem que:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Da definição de derivadas vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x).$$

Portanto,

$$((f \circ g)(x))' = f'(g(x)).g'(x).$$

Exemplo 16: Determine as derivadas das funções abaixo:

(a) $y = \sqrt{5x + 2}$;

Solução: Definindo $u = 5x + 2$. Então, $y = \sqrt{u}$.

Assim, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ e $\frac{du}{dx} = 5$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}.$$

(b) $y = \sqrt[3]{\sqrt{2x^2 - x}}$;

Solução: Definindo $v = 2x^2 - x$, $u = \sqrt{v}$ e $y = \sqrt[3]{u}$.

Pela regra da cadeia, temos que: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ (1)

mas, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$.

Temos que:

$\frac{dv}{dx} = 4x - 1$; $\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{u^2}}$.

Assim, substituindo em (1), segue que:

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{u^2}} . \left(\frac{1}{2\sqrt{v}} . (4x-1)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x-1}{6\sqrt[3]{2x^2-x}\sqrt{2x^2-x}} = \frac{4x-1}{6(2x^2-x)^{\frac{5}{6}}}$.

(c) $y = (2x^2 - x)^4 . \left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)$;

Solução: Pela regra do produto, temos que:

$$y' = \left((2x^2 - x)^4\right)' \left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right) + \left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)' (2x^2 - x)^4 . \qquad (*)$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\left((2x^2 - x)^4\right)' = 4\,(2x^2 - x)^3\,(2x^2 - x)' = 4\,(4x - 1)\,(2x^2 - x)^3 . \qquad (1)$$

Pela regra do quociente, segue que:

$$\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)' = \frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2} \qquad (2)$$

Substituindo (1) e (2) em $(*)$, temos que:

$$y' = 4\,(4x - 1)\,(2x^2 - x)^3 \left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right) + \frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2}\,(2x^2 - x)^4$$

$$y' = \frac{\left(2x^2-x\right)^3}{(3x-1)^2}\,(54x^4 - 35x^3 + 90x^2 - 50x + 8).$$

(d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^{-2}}}$.

Solução: Reescrevendo a função, temos que:

$$y = x^2 \left(x^2 + 1\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = (x^2)'\,(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + x^2 \left((x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}\right)' . \qquad (*)$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\left((x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\,(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}-1}\,(x^2 + 1)' = \frac{4x}{3}\,(x^2 + 1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} . \qquad (1)$$

Substituindo (1) em $(*)$, temos que:

$$y' = 2x\,(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + x^2 \left(\frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$y' = \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\,(3x^2 + 5).$$

Derivada das funções trigonométricas

1. **Derivada da Função Seno:** Se $f(x) = \sin x$, então $f'(x) = \cos x$.

   Demonstração: Pela definição de limite, temos que:

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos x - \sin x}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x[\cos(\Delta x) - 1] + \sin(\Delta x)\cos x}{\Delta x}$$

   Aplicando propriedades de limites, temos que:

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sin x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$
   $$f'(x) = \sin x * 0 + \cos x * 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x.$$

   Portanto,

   $$f'(x) = \cos x.$$

   Exemplo 17: Se $f(x) = \sin\sqrt{3x^2 - 1}$, determine $f'(x)$.

   Solução: Definindo $u = \sqrt{3x^2 - 1}$, então $y = f(u) = \sin u$.

   Pela regra da cadeia, temos que:

   $$y' = f'(u).u' = (\sin u)'.u' = u'.\cos u$$
   $$y' = \left((3x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)' . \cos\left(\sqrt{3x^2 - 1}\right)$$
   $$y' = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 - 1)' . \cos\left(\sqrt{3x^2 - 1}\right)$$
   $$y' = \tfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 1}} \cos\left(\sqrt{3x^2 - 1}\right).$$

2. **Derivada da Função Cosseno:** Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = \sin x$.

   Demonstração: Pela definição de limite, temos que:

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \sin(\Delta x)\sin x - \cos x}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1] - \sin(\Delta x)\sin x}{\Delta x}$$

   Aplicando propriedades de limites, temos que:

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \cos x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \sin x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$
   $$f'(x) = \cos x * 0 - \sin x * 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x.$$

   Portanto,

   $$f'(x) = -\sin x.$$

   Exemplo 18: Se $f(x) = \cos\left(\sin\sqrt{x+1}\right)$, determine $f'(x)$.

Solução: Definindo $u = \sin\sqrt{x+1}$, então $y = f(u) = \cos u$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\cos u)'.u' = -u'.\sin u$
$y' = -\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)'.\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$
$y' = -\left(\cos\sqrt{x+1}.\left(\sqrt{x+1}\right)'\right).\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$
$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\cos\left(\sqrt{x+1}\right).\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$.

3. **Derivada da Função Tangente:** Se $f(x) = \text{tg}(x)$, então $f'(x) = \sec^2 x$.

Demonstração: Escrevendo a função tangente como um quociente, temos que:

$$f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Derivando pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$
Portanto,

$$f'(x) = \sec^2 x.$$

Exemplo 19: Se $f(x) = \text{tg}\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$, determine $f'(x)$.

Solução: Definindo $u = \sqrt{\sin(x^2)}$, então $y = f(u) = \text{tg}(u)$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\text{tg}(u))'.u' = u'.\sec^2 u$
$y' = \left((\sin(x^2))^{\frac{1}{2}}\right)'.\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$
$y' = \frac{1}{2}(\sin(x^2))^{-\frac{1}{2}}(\sin(x^2))'.\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$
$y' = x\frac{\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$.

4. **Derivada da Função Cotangente:** Se $f(x) = \text{cotg}(x)$, então $f'(x) = -\text{cossec}^2(x)$.

Demonstração: Escrevendo a função cotangente como um quociente, temos que:

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Derivando pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -cossec^2(x).$

Portanto,

$$f'(x) = -cossec^2(x).$$

Exemplo 20: Se $f(x) = \text{cotg}(x^2 + x + 1)$, determine $f'(x)$.

Solução: Definindo $u = x^2 + x + 1$, então $y = f(u) = \text{cotg}(u)$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\text{cotg}(u))'.u' = -u'.\text{cossec}^2 u$
$y' = -(x^2 + x + 1)'.\text{cossec}^2(x^2 + x + 1)$
$y' = -(2x + 1).\text{cossec}^2(x^2 + x + 1)$.

5. **Derivada da Função Secante:** Se $f(x) = \sec(x)$, então $f'(x) = \text{tg}(x)\sec x$.

   Demonstração: Escrevendo a função secante como um quociente, temos que:

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}.$$

   Derivando pela regra da cadeia, temos que:
   $f'(x) = -1(\cos x)^{-2}(\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = tg(x)\sec x.$
   Portanto,

$$f'(x) = \text{tg}(x)\sec x.$$

6. **Derivada da Função Cossecante:** Se $f(x) = \text{cossec}(x)$, então $f'(x) = -\text{cotg}(x)\text{cossec}(x)$.

   Demonstração: Escrevendo a função cossecante como um quociente, temos que:

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}.$$

   Derivando pela regra da cadeia, temos que:
   $f'(x) = -1(\sin x)^{-2}(\sin x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin x} = -cotg(x).cossec(x).$
   Portanto,

$$f'(x) = -\text{cotg}(x).\text{cossec}(x).$$

Exemplo 21: Se $f(x) = \text{cossec}\sqrt[4]{\sec(x)}$, determine $f'(x)$.

Solução: Definindo $u = \sqrt[4]{\sec(x)}$, então $y = f(u) = \text{cossec}(u)$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = -u'.\text{cotg}(u)\text{cossec}(u)$
$y' = -\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)'.\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
$y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{-\frac{3}{4}}(\sec(x))'\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
$y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{-\frac{3}{4}}\text{tg}(x)\sec(x).\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
$y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{\frac{1}{4}}\text{tg}(x).\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$.

Observação: Todos os teoremas demonstrados até aqui, são generalizados, com o uso da função composta:

1. Se $f(u) = \sin u$, então $f'(u) = u' \cos u$;
2. Se $f(u) = \cos u$, então $f'(u) = -u' \sin u$;
3. Se $f(u) =$tg(u), então $f'(u) = u' \sec^2 u$;
4. Se $f(u) =$cotg(u), então $f'(u) = -u'$cossec$^2(u)$;
5. Se $f(u) = \sec u$, então $f'(u) = u'$tg$(u) \sec(u)$;
6. Se $f(u) =$cossec(u), então $f'(u) = -u'$cossec(u)cotg(u).

Derivada da função exponencial

Teorema: Se $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln a$.
Demonstração: Pela definição de limite, temos que:
$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$.
Pelas propriedades de limites, temos que:
$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$.
Portanto,

$$y' = a^x \ln a.$$

Caso particular: Se $a = e$, então para $y = e^x$, segue que

$$y' = e^x \ln e \quad \Rightarrow \quad y' = e^x.$$

Derivada da função logarítmica

Teorema: Se $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = \frac{1}{x} \log_a e$.
Demonstração: Pela definição de limite, temos que:
$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \right)$.
Definindo $\frac{1}{u} = \frac{\Delta x}{x}$*, ou seja,* $u = \frac{x}{\Delta x}$*. Se* $\Delta x \to 0$*, então* $u \to \infty$*. Assim,*
$y' = \log_a \left(\lim\limits_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{x}} \right) = \log_a \left(\lim\limits_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e$.
Portanto,

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Caso particular: Se $a = e$, então para $y = \log_e x = \ln x$, segue que

$$y' = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Derivada de uma função exponencial composta

Teorema: Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x, deriváveis em um intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, então

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'.$$

Demonstração: Usando propriedades de logaritmo, podemos escrever a função $y = u^v$, *como*

$$y = e^{\ln u^v} \quad \Rightarrow \; y = e^{v \ln u} \; .$$

Note que:
$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, *onde* $g(w) = e^w$ *e* $w = f(x) = v \ln u$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = g'(w).w' \quad \Rightarrow \quad y' = e^w.(v \ln u)'$
$\Rightarrow y' = e^w \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = e^{v \ln u}(v' \ln u + v.u^{-1}.u')$
Por propriedade de logaritmo, segue que:
$y' = e^{\ln u^v}(v' \ln u + v.u^{-1}.u') \;\Rightarrow\; y' = u^v(v' \ln u + v.u^{-1}.u')$.
Portanto,

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'.$$

Resumo: Aplicando a regra da cadeia para as funções compostas abaixo, obtém-se:

1. Se $y = a^u$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y = u'.a^u \ln a$;
2. Se $y = e^u$, então $y = u'e^u$;
3. Se $y = \log_a u$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y = \frac{u'}{u}\log_a e$;
4. Se $y = \ln u$, então $y = \frac{u'}{u}$;
5. Se $y = u^v$, então $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'$.

Exemplo 22: Determine a derivada das funções:

1. $y = 5^{\sqrt{2x^2+3x}}$;

   Solução: Definindo $u = \sqrt{2x^2 + 3x}$, então $y = 5^u$.
   Pela regra da cadeia, temos que:
   $u' = \left((2x^2+3x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(2x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}.(2x^2+3x)' = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x}}$.

Pela regra de derivação da função exponencial composta, temos que:

$y' = 5^u \ln 5.u' \;\Rightarrow\; y' = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x}} 5^{\sqrt{2x^2+3x}} \ln 5.$

2. $y = \ln(\sin(e^{-2x}))$;

Solução: Definindo $u = \sin(e^{-2x})$, então $y = \ln u$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = (\sin(e^{-2x}))' \;\Rightarrow\; u' = (e^{-2x})' \cos(e^{-2x})$

$u' = (-2x)'(e^{-2x})\cos(e^{-2x}) \;\Rightarrow\; u' = -2e^{-2x}\cos(e^{-2x}).$

Pela regra de derivação da função logaritmo composta, temos que:

$y' = \frac{u'}{u} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-2e^{-2x}\cos\left(e^{-2x}\right)}{\sin(e^{-2x})} = -2e^{-2x}\mathrm{cotg}(e^{-2x}).$

3. $y = e^{\sqrt{e^{x^2}}}$;

Solução: Definindo $u = \sqrt{e^{x^2}}$, então $y = \ln u$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left(\left(e^{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{x^2}\right)' = xe^{x^2}\left(e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$u' = x\left(e^{x^2}\right)^{1-\frac{1}{2}} = x\sqrt{e^{x^2}}.$

Pela regra de derivação da função exponencial composta, temos que:

$y' = u'e^u \;\Rightarrow\; y' = x\sqrt{e^{x^2}}e^{\sqrt{e^{x^2}}}.$

4. $y = \sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) + \mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$;

Solução: Aplicando propriedades de derivadas, temos que:

$y' = \left(\sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) + \mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' = \left(\sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\right)' + \left(\mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)'.$

Definindo $u = \sqrt[3]{2x+1}$ e $v = \frac{x-1}{x+1}$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left((2x+1)^{\frac{1}{3}}\right)' \;\Rightarrow\; u = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}.$

Pela regra do quociente, temos que:

$v' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \;\Rightarrow\; v' = \frac{(x+1)(x-1)'-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$

Pela regra de derivação de funções trigonométricas composta, temos que:

$y' = u'\sec(u)\mathrm{tg}(u) - v'\mathrm{cotg}(v)\mathrm{cotg}(v)$

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\mathrm{tg}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) - \frac{2}{(x+1)^2}\mathrm{cotg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$

5. $y = (\sin x)^{x^2}$;

   Solução: Definindo $u = \sin x$ e $v = x^2$.

   Pela regra de derivação de uma função exponencial composta, temos que:

   $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'$

   $y' = x^2 (\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} \ln(\sin x) . (x^2)'$

   $y' = x^2 (\sin x)^{x^2-1} \cos x + 2x (\sin x)^{x^2} \ln(\sin x)$

   $y' = x (\sin x)^{x^2} \left(x \frac{\cos x}{\sin x} + 2\ln(\sin x)\right)$

   $y' = x (\sin x)^{x^2} (x\text{cotg}(x) + 2\ln(\sin x))$.

Derivada de funções hiperbólicas

Como as funções hiperbólicas são definidas em termos das funções exponenciais, a derivação dessas funções se resume na derivação de funções exponenciais.

Exemplo 23: Mostre que se $f(x) = \sinh x$, então $f'(x) = \cosh x$.

Solução: Lembre que: $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Assim,

$f'(x) = (\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.

Portanto, $f'(x) = \cosh x$.

Analogamente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas, que são:

1. Se $f(u) = \sinh u$, então $f'(u) = u' \cosh u$;
2. Se $f(u) = \cosh u$, então $f'(u) = u' \sinh u$;
3. Se $f(u) = \text{tgh}(u)$, então $f'(u) = u'\text{sech}^2(u)$;
4. Se $f(u) = \text{cotgh}(u)$, então $f'(u) = -u'\text{cossech}^2(u)$;
5. Se $f(u) = \text{sech}(u)$, então $f'(u) = -u'\text{tgh}(u)\text{sech}(u)$;
6. Se $f(u) = \text{cossech}(u)$, então $f'(u) = -u'\text{cossech}(u)\text{cotgh}(u)$.

Observação: *A demonstração das derivadas das funções hiperbólicas fica como exercício!*

Exemplo 24: Determine a derivada das funções:

1. $y = \cosh\left(\left(x^3+2\right)e^{4x}\right)$;

   Solução: Definindo $u = \left(x^3+2\right)e^{4x}$. Então: $y = \cosh u$.

   Pela regra do produto, temos que:

   $u' = \left(x^3+2\right)\left(e^{4x}\right)' + \left(x^3+2\right)' e^{4x} \;\Rightarrow\; u' = 4\left(x^3+2\right)e^{4x} + 3x^2 e^{4x}$

   $u' = \left(4x^3+3x^2+8\right)e^{4x}$.

   Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

   $y' = (\cosh u)' = u' \sinh u \;\Rightarrow\; y' = \left(4x^3+3x^2+8\right)e^{4x}\sinh\left(\left(x^3+2\right)e^{4x}\right)$.

2. $y = \text{tgh}\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$;

   Solução 1: Definindo $u = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)$. Assim, $y = \text{tgh}(u)$.

   Derivando o ln, temos que:

   $u' = \frac{\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)'}{\frac{x^2+3}{x^4}} = \frac{-\frac{2\left(x^2+6\right)}{x^5}}{\frac{x^2+3}{x^4}} = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}$.

   Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

   $y' = u'\text{sech}^2(u) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}\text{sech}^2\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$.

   Solução 2: Definindo $u = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)$. Assim, $y = \text{tgh}(u)$.

   Aplicando as propriedades de ln para reescrever a função u, temos que:

   $u = \ln\left(x^2+3\right) - 4\ln x \;\Rightarrow\; u' = \frac{2x}{x^2+3} - \frac{4}{x} = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}$.

   Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

   $y' = u'\text{sech}^2(u) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}\text{sech}^2\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$.

3. $y = \sqrt{\text{cotgh}\left(t+1\right)^2}$;

   Solução: Definindo $u = \text{cotgh}(t+1)^2$. Então, $y = \sqrt{u}$.

   Pela regra da cadeia, temos que:

   $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u' \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\text{cotgh}(t+1)^2}}\left(-\text{cossech}^2\left(t+1\right)^2\right)\left(\left(t+1\right)^2\right)'$

   $y' = \frac{-(t+1)\text{cossech}^2(t+1)^2}{\sqrt{\text{cotgh}(t+1)^2}}$.

3.7 Derivação Implícita

Definição 6: Quando a relação entre x e y é dada por uma equação da forma $F(x,y) = 0$, dizemos que y é uma *função implítica* de x.

Uma equação em x e y pode implicitamente definir mais do que uma função de x.Por exemplo, se resolvermos a equação

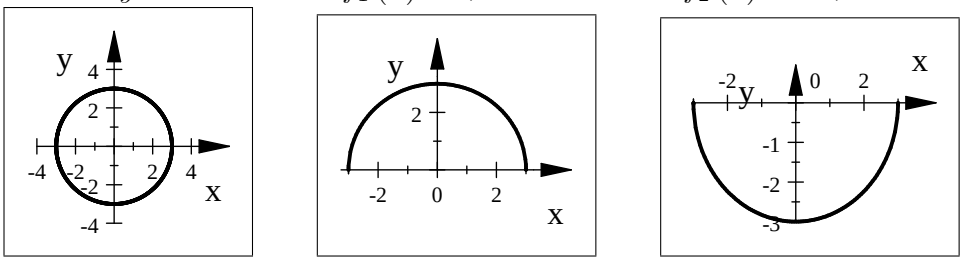
$$x^2 + y^2 = 9, \qquad (1)$$

para y em termos de x, obtemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Assim, encontramos duas funções que estão definidas implicitamente por (1), são

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}; \qquad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2};$$

Os gráficos dessas funções são semicírculos do círculo $x^2 + y^2 = 9$ que estão localizados acima e abaixo do eixo das ordenadas.

$x^2 + y^2 = 9$ $\quad$ $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad$ $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$



Observe que o círculo completo não passa no teste da reta vertical, e portanto, não é o gráfico de uma função de x. Contudo, os semicírculos superior e inferior passam no teste da reta vertical.

Nem sempre é possível definir a forma explícita de uma função definida implicitamente. Por exemplos, as funções

$$x^3 + y^2 = 3xy,$$
$$y^4 + 3xy + 2\ln y = 0,$$

não podem ser expressas na forma $y = f(x)$.

O método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la.

Derivada de uma função dada implicitamente

Suponhamos que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. A derivada de uma função na forma umplícita é obtida usando a regra da cadeia. Assim, é possível determinar y' sem explicitar y.

Exemplo 24: Derive implicitamente as funções abaixo.

1. $x^2 + y^2 = 9$;

   Solução: Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(x^2 + y^2)' = (9)' \quad \Rightarrow \quad 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

2. $x^3 + y^2 = 3xy$;

   Solução: Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(x^3 + y^2)' = (3xy)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} = 3(xy)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} = 3y + 3x\frac{dy}{dx}$

   $\Rightarrow \quad (2y - 3x)\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{2y - 3x}$.

3. $y^4 + 3xy + 2\ln y = 0$

   Solução: Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(y^4 + 3xy + 2\ln y)' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 4y^3\frac{dy}{dx} + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$

   $\Rightarrow \quad \left(4y^3 + 3x + \frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -3y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{4y^4+3xy+2}.$

4. $y^7 + \ln(\sin(xy^2)) = e^{2x^3+x}$.

   Solução: Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $7y^6y' + \frac{\left(\sin\left(xy^2\right)\right)'}{\sin(xy^2)} = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow \;\; 7y^6y' + \frac{\left(xy^2\right)'\cos\left(xy^2\right)}{\sin(xy^2)} = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow \;\; 7y^6y' + (y^2 + 2xyy')\text{cotg}(xy^2) = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow (7y^6 + 2x\cot(xy^2))\,y' = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x} - y^2\text{cotg}(xy^2)$

   $\Rightarrow y' = \frac{\left(6x^2+1\right)e^{2x^3+x} - y^2\cot\left(xy^2\right)}{7y^6+2x\cot(xy^2)}.$

Exemplo 25: Determine o(s) ponto(s) em que a reta tangente à curva

$$C : x^2 + xy + y^2 - 3y = 9$$

é horizontal.

Solução: Sabemos que a reta tangente é horizontal nos pontos em que $m_t = \frac{dy}{dx} = 0$.

Derivando implicitamente a equação que descreve C, temos que:
$2x + xy' + y + 2yy' - 3y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y-3}.$ $\qquad (*)$

Se $x + 2y - 3 \neq 0$, então $\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x.$ $\qquad (1)$

Substituindo em C, temos que:
$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$, ou seja, $x = -3$ ou $x = 1$.

Substituindo estes valores em (1), obtemos: $P_1(-3, 6)$ e $P_2(1, -2)$.

Portanto, a reta tangente é horizontal nos pontos P_1 e P_2, pois satisfazem a condição $(*)$.

3.8 Derivada da função inversa

Exemplo 26: Considere a função $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$. Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$.
Solução:
Como $y = \frac{x}{x+2}$, derivando pela regra do quociente, obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+2)^2}.$$

Para determinar $\frac{dx}{dy}$, iremos escrever x em função de y e, a seguir, derivar x com relação a y.

Se $x = g(y) = \frac{2y}{1-y}$, então $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(y-1)^2}$.

Lembrando que $y = \frac{x}{x+2}$, temos que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(x+2)^2}{2}.$$

Observe que,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Neste exemplo, verificamos uma aparente relação que existe entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa.

Para determinarmos um relação entre as derivadas de f e f^{-1}, suponha que ambas as funções são diferenciáveis, e seja

$$y = f^{-1}(x). \qquad (\#)$$

Reescrevendo esta equação como

$$x = f(y),$$

e diferenciando implicitamente com relação a x, resulta que

$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(y)) \quad \Rightarrow \quad 1 = f'(y)\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$.

A partir de $(\#)$ obtemos a seguinte fórmula que relaciona a derivada de f^{-1} com a derivada de f.

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Podemos enunciar este resultado como:

Teorema: Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admite uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Em outras palavras, se $y = f(x)$ admita uma função inversa então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Derivada das funções trigonométricas inversas

1. **Derivada da função Arco Seno:** Seja $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \arcsin x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco seno é a inversa da função seno, ou seja,

   $$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y.$$

   Como $(\sin y)'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

   $$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$*. Assim,*

   $$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   Portanto,

   $$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. **Derivada da função Arco Cosseno:** Seja $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ definida por $f(x) = \arccos x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco cosseno é a inversa da função cosseno, ou seja,

   $$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y.$$

   Como $(\cos y)'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0,\pi)$*, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

   $$y' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$*. Assim,*

   $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

   Portanto,

   $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. **Derivada da função Arco Tangente:** Seja $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por $f(x) = \text{arctg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

   Demostração: Sabemos a função arco tangente é a inversa da função tangente, ou seja,

$$y = \text{arctg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tg}(y).$$

   Como $(\text{tg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\text{tg}(y))'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sec^2 y = \text{tg}^2(y) + 1$*. Assim,*

$$y' = \frac{1}{\text{tg}^2(y) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

   Portanto,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. **Derivada da função Arco Cotangente:** Seja $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ definida por $f(x) = \text{arccotg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

   Demostração: Sabemos a função arco cotangente é a inversa da função cotangente, ou seja,

$$y = \text{arccotg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotg}(y).$$

   Como $(\text{cotg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0, \pi)$*, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

$$y' = \frac{1}{(\text{cotg}(y))'} = -\frac{1}{\text{cossec}^2 y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\text{cossec}^2 y = \text{cotg}^2(y) + 1$*. Assim,*

$$y' = -\frac{1}{\text{cotg}^2(y) + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

   Portanto,

$$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. **Derivada da função Arco Secante:** Seja $f(x) = \text{arcsec}(x)$, definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco secante é a inversa da função secante, ou seja,

$$y = \text{arcsec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec(y) = \frac{1}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:
$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
Portanto,

$$y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

6. **Derivada da função Arco Cossecante:** Seja $f(x) = \text{arccossec}(x)$, definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco cossecante é a inversa da função cossecante, ou seja,

$$y = \text{arccossec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cossec}(y) = \frac{1}{\sin y} \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:
   $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
   Portanto,

$$y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Para funções compostas, usando a regra da cadeia, temos que:

1. Se $y = \arcsin u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
2. Se $y = \arccos u$, então $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
3. Se $y = \text{arctg}(u)$, então $y' = \frac{u'}{1+u^2}$;
4. Se $y = \text{arccotg}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
5. Se $y = \text{arcsec}(u)$, então $y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$;
6. Se $y = \text{arccossec}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$.

Exemplo 27: Determine a derivada das funções.

1. $f(x) = \arcsin[\ln(x^2-1)]$;
   Solução: Definindo $u = \ln(x^2-1)$. Então, $u' = \frac{2x}{x^2-1}$.
   $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln(x^2-1))^2}}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{1-\ln^2(x^2-1)}}$.

2. $f(x) = \text{arcsec}\left(xe^{x^3}\right)$;

   Solução: Definindo $u = xe^{x^3}$. Então, $u' = (1+3x^3)\,e^{x^3}$.

   $y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \frac{\left(1+3x^3\right)e^{x^3}}{\left|xe^{x^3}\right|\sqrt{x^2e^{2x^3}-1}}$.

3. $f(x) = \text{arccossec}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$;

   Solução: Definindo $u = \ln\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Então, $u' = \frac{x}{x^2+1}$.

   $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\left|\ln\sqrt{x^2+1}\right|\sqrt{\ln^2\sqrt{x^2+1}-1}}$.

Derivada das funções hiperbólicas inversas

Pelo capítulo anterior, sabemos que a função $y = \text{arg}\sinh x$ também pode ser escrita como $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Assim, definindo $u = x+\sqrt{x^2+1}$, segue que:

$$y' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Logo, se $y = \text{arg}\sinh x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Por desenvolvimento análogo podem ser obtidas as derivadas das demais funções hiperbólicas inversas.

A seguir, apresentamos as derivadas das funções hiperbólicas inversas compostas.

1. Se $y = \text{arg}\sinh u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$;

2. Se $y = \text{arg}\cosh u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, para $u > 1$;

3. Se $y = \text{arg tgh}(u)$, então $y' = \frac{u'}{1-u^2}$, para $|u| < 1$;

4. Se $y = \text{arg cotgh}(u)$, então $y' = \frac{u'}{1-u^2}$, para $|u| > 1$;

5. Se $y = \text{arg sech}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$, para $0 < u < 1$;

6. Se $y = \text{arg cossech}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$, para $u \neq 0$.

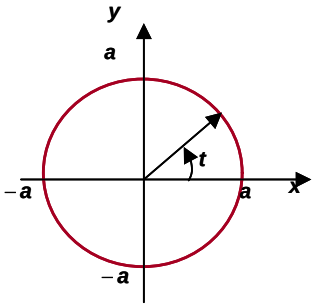
Exemplo 27: Determine a derivada da função $y = \operatorname{arg\,tgh}\left(\cosh^2(6x)\right)$.
Solução: Se $u = \cosh^2(6x)$, então:
$u' = 12\cosh(6x)\sinh(6x) = 6\sinh(12x)$.
Assim,
$y' = \frac{u'}{1-u^2} = \frac{6\sinh(12x)}{1-\cosh^4(6x)}$.

3.9 Derivada de uma função na forma paramétrica

Função na forma paramétrica Considere a equação

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (1)$$

A equação (1) representa um círculo de raio a. Pelos conhecimentos da Geometria Analítica, podemos expressar x e y como funções de uma paramâmetro t, da seguinte forma:



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 2\pi]. \qquad (2)$$

As expressões (1) e (2) representam a mesma curva. Na equação (1), a função é apresentada na *forma implícita.* As equações (2), expressam a função na *forma paramétrica.*

Sejam

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ com } t \in [a, b], \qquad (3)$$

Então a cada valor de t correspondem dois valores x e y. Considerando estes valores como as coordenadas de um ponto P, podemos dizer que a cada valor de t corresponde um ponto bem determinado do plano xy. Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas, quando t varia de a até b, o ponto $P(x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano. As equações (3) são chamadas *equações paramétricas* da curva C e t é chamado *parâmetro.*

Derivada de uma função na forma paramétrica

Seja y uma função de x, definida pelas equações paramétricas (3). Suponhamos que as funções $y = y(t)$, $x = x(t)$ e sua inversa $t = t(x)$ são deriváveis. A função $y = y(x)$, através das equações (3), podem ser vista como função composta

$$y = y(t(x)). \qquad (4)$$

Aplicando a regra da cadeia em (4), segue que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

Como $x = x(t)$ e $t = t(x)$ são deriváveis, pelo teorema da derivada para funções inversas, temos que:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad t'(x) = \frac{1}{x'(t)}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\ .$$

Exemplo 28: Derive a função representada parametricamente por $\begin{cases} x = 2t^3 - 1 \\ y = t^4 - 3 \end{cases}$.

Solução: Temos que:

$$x'(t) = 6t^2 \quad \text{e} \quad y'(t) = 4t^3.$$

Logo, a derivada da função respresentada parametricamente é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{6t^2} = \frac{2}{3}t.$$

Para apresentar a derivada $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, deve-se escrever t como $t = t(x)$.

Neste caso, como $x = 2t^3 - 1$, então $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$.

Substituindo em $\frac{dy}{dx}$, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x+1}.$$

Exemplo 29: Considere a função representada parametricamente por

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}.$$

Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função no ponto onde $t = \frac{\pi}{4}$.

Solução: Determinando o coeficiente angular, pela derivação de funções dada parametricamente.

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sqrt{2}\cos^2 t.\sin t \\ y'(t) = 3\sqrt{2}\sin^2 t\cos t \end{cases}.$$

Então,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3\sqrt{2}\sin^2\cos t}{-3\sqrt{2}\cos^2 t.\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$

Em $t = \frac{\pi}{4}$, segue que

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

E ainda,

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos^3\frac{\pi}{4} \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin^3\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

A equação da reta tangente no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é
$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1.$
O coeficiente anguar da reta normal é $m_n = \frac{-1}{m_{tg}}$, ou seja, $m_n = 1$.
Assim, a equação da reta normal é
$y - \frac{1}{2} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = x.$

3.10 Derivadas de Ordem Superior

Se a derivada f' de uma função f for ela mesma diferenciável, então a derivada de f' será denotada por f'', sendo chamada de *derivada segunda* de f. À medida que tivermos diferenciabilidade, poderemos continuar o processo de diferenciar derivadas para obter as derivadas terceira, quarta, quinta e mesmo as derivadas mais altas de f. As derivadas sucessivas de f são denotadas por

$$f',\ f'' = (f')'\ ,\ f''' = (f'')',\ f^{(4)} = (f''')',\ f^{(5)} = \left(f^{(4)}\right)',\ \cdots$$

Chamadas de derivadas primeira, segunda, terceira e assim por diante. Acima da derivada terceira, fica muito estranho continuar a usar linhas para indicar derivadas. Assim sendo, denotamos por inteiros entre parênteses a indicação da *ordem* das derivadas. Nesta notação, a derivada de ordem arbitrária é denotada por

$$f^{(n)}\text{: } n\text{-ésima derivada de } \dot{f}.$$

Derivadas sucessivas também podem ser denotadas por

$$\begin{array}{lll} y' = f'(x) & \Rightarrow & \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]; \\ y'' = f''(x) & \Rightarrow & \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\right]; \\ y''' = f'''(x) & \Rightarrow & \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)\right]\right) = \frac{d^3}{dx^3}\left[f(x)\right]; \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \end{array}$$

Em geral, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\right].$$

Exemplo 30: Obtenha a expressão da *n-ésima* derivada das funções abaixo:

1. $y = x^5 - 3x^3 + x^2 + 5$;

   Solução: Temos que:

   $y' = 5x^4 - 9x^2 + 2x$;

   $y'' = 20x^3 - 18x + 2$;

$y''' = 60x^2 - 18$;

$y^{(4)} = 120x$;

$y^{(5)} = 120$;

$y^{(6)} = 0$;

$\vdots$

Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é

$$y^{(n)} = 0,\ \forall n \geq 6.$$

2. $y = a^{2x}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$;
   Solução: Temos que:
   $y' = 2\ln a.a^{2x}$;

   $y'' = (2\ln a)^2 .a^{2x}$;

   $y''' = (2\ln a)^3 .a^{2x}$;

   $y^{(4)} = (2\ln a)^4 .a^{2x}$;

   $\vdots$

   Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é

   $$y^{(n)} = (2\ln a)^n .a^{2x},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $y = \sin x$;
   Solução: Temos que:
   $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

   $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$;

   $y''' = \cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$;

   $y^{(4)} = -\sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$;

   $\vdots$

   Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é

   $$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. $y = \ln(3x+1)$;

   Solução: Temos que:

   $y' = \frac{3}{3x+1}$;

   $y'' = -\frac{3.3}{(3x+1)^2}$;

   $y''' = \frac{3.3.2.3}{(3x+1)^3}$;

   $y^{(4)} = -\frac{3.3.2.3.3.3}{(3x+1)^4}$;

   $\vdots$

   Observamos que a forma geral da *n-ésima* é

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} 3^n (n-1)!}{(3x+1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}..$$

5. $y = \frac{1}{x+a}$.

   Solução: Observe que, $y = (x+a)^{-1}$. Assim, temos que:

   $y' = -(x+a)^{-2}$;

   $y'' = 2(x+a)^{-3}$;

   $y''' = -2.3.(x+a)^{-4}$;

   $y^{(4)} = 2.3.4.(x+a)^{-5}$;

   $\vdots$

   Observamos que a forma geral da *n-ésima* é

$$y^{(n)} = (-1)^n (x+a)^{-(n+1)} n! = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 31: Determine a constante k para que $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\ .\text{sech}(x)$ seja solução da equação

$$y.y' + \cot \text{gh}(x) \,.\, \cos \text{sech}^2(x) = 0.$$

Solução: Reescrevendo $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\ .\text{sech}(x)$, temos que:

$y(x) = k\frac{\cosh x}{\sinh x}.\frac{1}{\cosh x} = k\frac{1}{\sinh x} = k(\sinh x)^{-1}$
Assim,
$y'(x) = -k(\sinh x)^{-2}\cosh x = -k\frac{\cosh}{\sinh^2 x}$.
Observe que,
$y.y' + \text{cotgh}(x) \,.\, \text{cossech}^2(x) = k\frac{1}{\sinh x}.\left(-k\frac{\cosh}{\sinh^2 x}\right) + \text{cotgh}(x) \,.\, \text{cossech}^2(x)$
$= (-k^2+1)\,\text{cotgh}(x) \,.\, \text{cossech}^2(x)$

Logo,

$y.y' + \text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-k^2+1)\,\text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0$

Dessa forma, a igualdade é satisfeita se, e somente se,

$-k^2 + 1 = 0$ ou $\text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0 \;\Rightarrow\; k = \pm 1$ ou $\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} = 0$.

Conclusão: Se $k = \pm 1$ então $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\,.\text{sech}(x)$ é solução da equação diferencial dada.

3.11 Diferenciais e Aproximação Linear Local

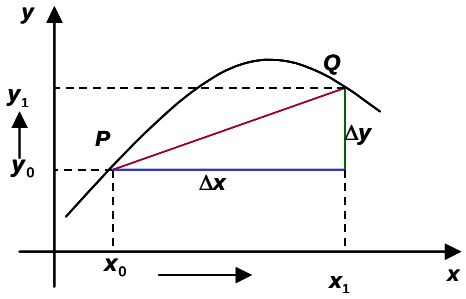
3.11.1 Incrementos

Seja $y = f(x)$ uma função. Sempre é possível considerar uma variação da variável independente x. Se x varia de x_0 a x_1, definimos o *incremento* ou *acréscimo* de x, denotado por Δx, como

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Se $y = f(x)$ e se x varia de x_0 a x_1, então há uma correspondente variação no valor de y que vai de $y_0 = f(x_0)$ até $y_1 = f(x_1)$, ou seja, o incremento Δx em x produz um incremento Δy em y, onde

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)\,. \qquad (*)$$



Os incrementos podem ser positivos, negativos ou nulos, dependendo da posição relativa do pontos inicial e final. Por exemplo, na figura anterior, os incrementos Δx e Δy são positivos. Observe que, as expressões $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta y = y_1 - y_0$, podem ser reescritas como

$$x_1 = x_0 + \Delta x \text{ e } y_1 = y_0 + \Delta y.$$

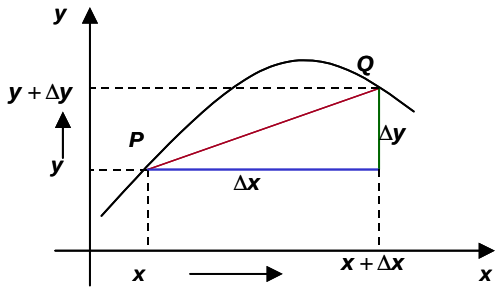
Com esta notação podemos escrever $(*)$ como

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

Em um ponto qualquer, omitindo-se os subscritos, temos que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)\,.$$

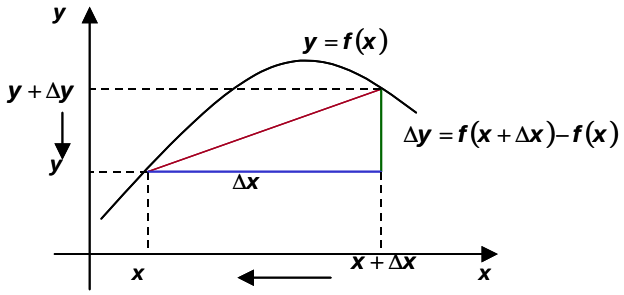
Geometricamente,



A razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pode ser interpretada como a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P\left(x, f\left(x\right)\right)$ e $Q\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$, e, portanto, a derivada de y com relação a x pode ser expressa como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Graficamente,



3.11.2 Diferenciais

Os símbolos dy e dx que aparecem na derivada são chamados de *diferenciais*, e o nosso objetivo é definir estes símbolos de tal forma que se possa tratar $\frac{dy}{dx}$ como uma *razão*. Com essa finalidade, vamos considerar x como fixo e *definir* dx como uma variável independente, para a qual possa ser atribuído um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x, então *definimos* dy pela fórmula

$$dy = f'\left(x\right) dx.$$

Se $dx \neq 0$, podemos dividir esta expressão por dx. Assim,

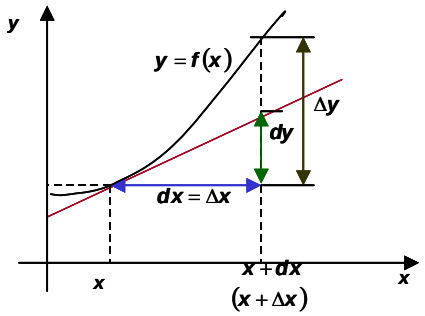
$$\frac{dy}{dx} = f'\left(x\right).$$

Como a inclinação da reta tangente a $y = f\left(x\right)$ em x é $m_t = f'\left(x\right)$, as diferenciais dy e dx podem ser vistas como o avanaço (dx) e a elevação (dy) correspondentes dessa reta tangente.

Para ver a diferença entre o incremento Δy e o diferencial dy, vamos atribuir às variáveis independentes dx e Δx o mesmo valor $(dx = \Delta x)$. Dessa forma, temos que:

(i) Δy representa a variação ao *longo da curva* $y{=}f(x)$, quando são percorridas Δx unidades na direção x;

(ii) dy representa a variação ao *longo da reta tangente* $y{=}f(x)$, quando são percorridas dx unidades na direção x.



Exemplo 31: Seja $y = x^2$. Determine o incremento Δy e o diferencial dy em $x = 3$ para $dx = \Delta x = 4$ unidades.

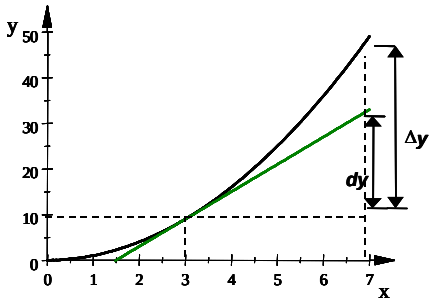
Solução: Observe que $\frac{dy}{dx} = 2x$ pode ser escrita na forma diferencial como $dy = 2xdx$.

Para $x = 3$, temos que:

$dy = 6dx \quad \Rightarrow \quad dy = 24$ unidades ao longo da reta tangente.

$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(7) - f(3) = 40$ unidades ao longo da curva.

Assim, $\Delta y - dy = 16$ unidades.



Exemplo 32: Seja $y = \ln x$. Determine o incremento Δy e o diferencial dy em $x = 2$ para $dx = \Delta x = \frac{3}{2}$ unidades.

Solução: Observe que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ pode ser escrita na forma diferencial como $dy = 2xdx$.

Para $x = 2$, temos que:

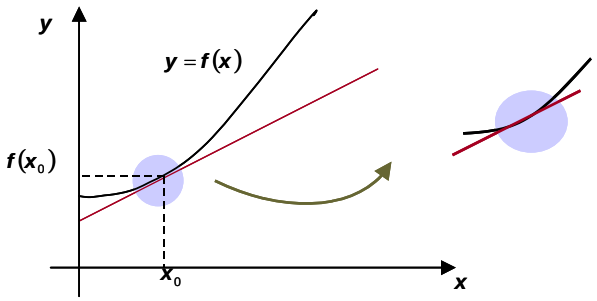
$dy = \frac{1}{2}dx \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{3}{4} = 0.75$ unidades ao longo da reta tangente.

$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f\left(\frac{7}{2}\right) - f(2) = \ln\frac{7}{2} - \ln 2 = 0.559\,62$ unidades ao longo da curva.

Assim, $\Delta y - dy = -0.190\,38$ unidades.

3.11.3 Aproximação Linear Local

Uma função diferenciável em P é dita *localmente linear em* P, quando P é um ponto de diferenciabilidade de uma função f, pois quanto maior for a ampliação em P, mais o segmento da curva contendo P se parecerá com uma reta não-vertical, que é a reta tangente a curva em P.



Observe que, a equação da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Como $y = f(x)$, para valores de x próximos de x_0, tem-se que

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta aproximação é chamada de *aproximação linear local* e é melhor a medida que $x \to x_0$. Definindo $\Delta x = x - x_0$, podemos escrever a aproxmação como

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Exemplo 33: Calcule um valor aproximado de $\sqrt[3]{65,5}$.
Solução:
Seja a função $y = \sqrt[3]{x}$. Assim, a aproximação linear local para f é
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\Delta x. \qquad (+)$
Observe que:

$$65,5 = 64 + 1,5.$$

Assumindo $x_0 = 64$ e $\Delta x = 1,5$, pela aproximação dada em $(+)$, segue que
$\sqrt[3]{65,5} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}(1,5) = 4,0313.$
Obsere que, o valor calculado diretamente é $\sqrt[3]{65,5} = 4,031$.
Assim, a diferença entre o valor exato e aproximado, em valor absoluto, é $3 * 10^{-3}$.

Exemplo 34: Calcule uma valor aproximado para $\text{tg}(45°4'30'')$.
Solução:
Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \text{tg}(x)$. Assim, a aproximação linear local para f é
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
$\Rightarrow \quad \text{tg}(x_0 + \Delta x) \approx \text{tg}(x_0) + \sec^2(x_0)\Delta x. \quad (\#)$
Observe que:

$$45°4'30'' = 45° + 4'30''.$$

Assumindo $x_0 = 45°$ e $\Delta x = 4'30''$.
Devemos transformar Δx para radianos:
Transformando $30''$ para minutos, tem-se que: $30'' = \left(\frac{1}{2}\right)'$
Transformando $4' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{9}{2}\right)'$ para graus, tem-se que:
$\left(\frac{9}{2}\right)' = \left(\frac{9}{120}\right)° = \left(\frac{3}{40}\right)°$

E, finalmente, transformando $\left(\frac{3}{40}\right)^\circ$ para radianos, obtém-se:
$\left(\frac{3}{40}\right)^\circ = \frac{\pi}{2400}$.
Portanto, pela aproximação dada em $(\#)$, tem-se que
$\text{tg}(45^\circ 4' 30'') \approx \text{tg}(45^\circ) + \sec^2(45^\circ)\,\frac{\pi}{2400}$
$\Rightarrow \quad \text{tg}(45^\circ 4' 30'') \approx 1,002617.$

Exemplo 35: Determine uma aproximação linear local para $f(x) = \sin x$ em torno de $x = 0$. Use esta aproximação para encontrar $\sin(2^\circ)$.
Solução: Pela aproximação linear local, temos que:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Para $x_0 = 0$, temos que
$f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0)\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad \sin(\Delta x) \approx \sin 0 + (\cos 0)\,\Delta x$
$\Rightarrow \sin(\Delta x) \approx \Delta x. \quad (I)$
Para determinar um valor aproximado de $\sin(2^\circ)$, é necessário transformar 2° para radianos. A seguir, basta aplicar a relação dada em (I).
Transformando 2° para radianos, obtém-se:
$2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{1}{90}\pi$.
Assim, pela aproximação dada em (I), tem-se que
$\sin(2^\circ) \approx \frac{\pi}{90} = 0,03\,490\,7$.
Note que este valor está bem próximo do valor exato, que é

$$\sin(2^\circ) = 0,0348995.$$

3.11.4 Diferenciais de ordem superior

Se $y = f(x)$ uma função e $dy = f'(x)\,dx$ a diferencial desta função. Se denomina diferencial segunda de $y = f(x)$ e se representa por d^2y a expressão $d^2y = f''(x)\,dx^2$. A diferencial terceira de $y = f(x)$ e se representa por d^3y a expressão $d^3y = f'''(x)\,dx^3$. E assim sucessivamente, a expressão da diferencial *n-ésima* é

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Exemplo 36: Obtenha a diferencial n-ésima da função $y = xe^x$.
Solução: Temos que:
$dy = e^x(x+1)\,dx;$
$d^2y = e^x(x+2)\,dx^2;$
$d^3y = e^x(x+3)\,dx^3;$
$\vdots$
Observamos que a diferencial *n-ésima* é

$$d^n y = e^x(x+n)\,dx^n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.12 Interpretação Mecânica da Derivada

Velocidade

Sabemos que velocidade é a variaçãoo do espaço percorrido num determinado intervalo de tempo.

Supondo que um corpo se move em linha reta e que $s(t)$ respresente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então no intervalo de tempo entre t e $t+\Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Definimos a *velocidade média* como

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

A velocidade média não nos diz nada a respeito da velocidade do corpo num determinado instante t. Para determinar a *velocidade instantânea*, isto é, a velocidade num instante t devemos fazer Δt cada vez menor ($\Delta t \to 0$). Assim, a velocidade neste instante é o limite das velocidade médias.

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v = s'(t).$$

Aceleração

Lembre que a aceleração é a variação da velocidade num certo intervalo de tempo gasto.

Por racicínio análogo ao anterior, segue que a *aceleração média* no intervalo de t até $t+\Delta t$ é

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Para obter a aceleração do corpo no instante t, tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A *aceleração instantânea* é

$$a = a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a = v'(t) = s''(t).$$

Exemplo 37: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento retilíneo e sua posição num instante t é dada por $s(t) = \frac{t}{t+1}$. Determinar:

(a) a posição no instante $t = 2$;

(b) a velocidade média do corpo para $t \in [2, 4]$;

(c) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

(d) a aceleração média do corpo para $t \in [0, 4]$;

(e) a aceleração no instante $t = 2$.

Obs: Considere o tempo medido em segundos e a distância em metros.

Solução:

(a) A posição do corpo no instante $t = 2$ é $s(2) = \frac{2}{3}m$.

(b) Para $t \in [2, 4]$, temos que $\Delta t = 2$. Assim, a velocidade média do corpo é $v_m = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4)-s(2)}{2} = \frac{1}{15}m/s$.

(c) A velocidade instantânea é $v(t) = s'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$.
Então, em $t = 2$, obtém-se $v(2) = s'(2) = \frac{1}{9}m/s$.

(d) Para $t \in [0, 4]$, temos que $\Delta t = 4$. A aceleração média do corpo é $a_m = \frac{v(4)-v(0)}{4} = -\frac{6}{25}m/s$.

(e) A aceleração instantânea é $a(t) = v'(t) = -\frac{2}{(t+1)^3}$.
Logo, em $t = 2$, temos que $a(2) = -\frac{2}{27}m/s^2$.

3.13 Taxa de Variação

Sabemos que a velocidade é a razão da variação do deslocamento por unidade de variação de tempo. Então, dizemos que $s'(t)$ é a *taxa de variação* da função $s(t)$ por unidade de variação de t. Analogamente, dizemos que a aceleração $a(t) = v'(t)$ representa a taxa de variação da velocidade $v(t)$ por unidade de tempo.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Assim, a *taxa de variação média* de y com relação a x é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

A *taxa de variação instantânea* é definida como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 37: Seja V o volume de um cubo de x cm de aresta.

(a) Calcule a razão da variação média do volume quando x varia de 3 cm à $3,1$ cm.

(b) Calcule a razão da variação instantânea do volume por variação em centímetros no comprimento de aresta x, quando $x = 3$ cm.

Solução:

(a) Sabemos que o volume de um cubo é $V = x^3$. Quando x varia de 3 cm à $3,1$ cm, temos que $\Delta x = 0,1$ cm. Então, a razão da variação média do volume $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3,1)-V(3)}{0,1} = 27,91$ cm^3.

(b) A variação instantânea do volume é dada por $V'(x) = 3x^2$.
Em $x = 3$, temos que: $V(3) = 27$ cm^3.

3.14 Taxas Relacionadas

Nos problemas de taxas relacionadas busca-se encontrar a taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras quantidades, cujas taxas de variação são conhecidas.

Exemplo 38: O lado de um quadrado ℓ (em m) está se expandindo segundo a equação $\ell = 2+t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determine a taxa de variação da área deste quadrado em $t = 2\ s$.

Solução:

Sejam:

t : tempo (em s);
ℓ : lado do quadrado (em m);
A : área do quadrado (em m^2).

Sabemos que, a área de um quadrado é

$$A(\ell) = \ell^2.$$

Como ℓ é uma função do tempo, pela regra da cadeia, temos que
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\ell\frac{d\ell}{dt} = 2(2+t^2)\frac{d\ell}{dt}$
$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = (4+2t^2)2t = 4t^3 + 8t.$
Para $t = 2s$, temos que:
$A'(2) = \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=2} \quad \Rightarrow \quad A'(2) = 48\ m^2/s.$

Exemplo 39: Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura do tanque se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de $\frac{1}{2}m/s$. Com que velocidade a área do derramamento de óleo está crescendo quando o raio dele for $20m$?

Solução:

Sejam:

t : tempo (em s);
r : raio (em m);
A : área da circunferência (em m^2).

O óleo está se espalhando em forma circular, a área do derramamento é

$$A(r) = \pi r^2.$$

Como r é está variando com o tempo, pela regra da cadeia, temos que
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \pi r\frac{dr}{dt}.$ (1)
Sabemos que o raio cresce em uma taxa constante de $\frac{1}{2}m/s$, ou seja, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}m/s$.

Substituindo em (1), temos que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi r}{2}.$$

Para o raio $r = 20m$, temos que:
$A'(20) = \left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=20} \quad \Rightarrow \quad A'(20) = 10\pi\ m^2/s.$

Exemplo 40: Uma escada de 510 cm de comprimento está apoiada num muro vertical. Se a extremidade inferior da escada se afasta do muro na razão de 90

cm/s, então com que rapidez está descendo a extremidade superior no instante em que o pé da escada está a 240 cm do muro?

Solução:

Sejam:

x : distância do pé da escada ao muro (em m);
y : distância do topo da escada ao chão (em m);
t : tempo (em s).

Nosso objetivo é determinar $\frac{dy}{dt}$, para $x = 2,4\ m$.
Fazendo um esboço, pelo teorema de Pitágoras, temos que:
$x^2 + y^2 = (5,1)^2$. $\quad (I)$
Como x e y variam no tempo, derivando implicitamente com relação ao tempo (I), temos que:
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$. $\quad (II)$
Por (I), se $x = 2,4\ m$, então $y = 4,5\ m$.
Substituindo em (II), e ainda, lembrando que $\frac{dx}{dt} = 90\ cm/s$, obtém-se

$$\frac{dy}{dt} = -0,48\ m/s.$$

Exemplo 41: Acumula-se areia em monte com a forma de um cone cuja altura é igual ao raio da base. Se o volume da areia cresce a uma taxa de 10 m^3/h, a que razão aumenta à área da base quando a altura do monte é de 4 m.

Solução:

Sejam:

h : altura do monte de areia (em m);
r : raio da base (em m);
A : área da base (em m^2).
V : volume de areia (em m^3).

A área da base corresponde a área de um circulo, isto é,
$A = \pi r^2$.
Pela regra da cadeia, a razão que aumenta à área da base é
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$. $\quad (I)$
Precisamos encontrar uma relação para $\frac{dr}{dt}$.
Como o monte de areia tem a forma de um cone, seu volume é
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. $\quad (II)$
Lembre que, o raio e a altura são iguais.
Assim, substituindo $r = h$ em (II), temos que
$V = \frac{1}{3}\pi r^3$. $\quad (III)$
Aplicando a regra da cadeia em (III), temos que
$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt}$.
Como $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/h$, temos que $\frac{dr}{dt} = \frac{10}{\pi r^2}$.
Substituindo em (I), temos que:
$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{10}{\pi r^2} = \frac{20}{r}$.
Se $h = r = 4$, então

$$\frac{dA}{dt} = 5\ m^2/h.$$

3.15 Exercícios

1. Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ uma curva.

   (a) Determine o coeficiente angular da reta tangente a curva dada, no ponto da abscissa $x = 1$.

   (b) Dê a equação da reta tangente no ponto mencionado.

   (c) Dê os pontos da curva onde a tangente a curva tem inclinação de $60°$.

2. Considere a curva dada por $f(x) = -\sqrt{4x-3}$. Caso exista, escreva a equação da reta tangente a curva, tal que seja paralela a reta $r : x + y = 0$.

3. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ uma curva. Caso exista, escreva a equação da reta normal a curva, tal que seja paralela a reta $r : y = 0$.

4. Seja $f(x) = \frac{x}{x-1}$ uma curva. Se possível, determine, tanto a equação da reta tangente quanto a equação da reta normal a curva no ponto $P\left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

5. Seja $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ uma curva. Dê as coordenadas dos pontos da curva onde a direção desta curva é paralela ao eixo x.

6. Mostre que as tangentes à curva $f(x) = \frac{\pi \sin x}{x}$ em $x = \pi$ e $x = -\pi$, se cortam formando ângulos retos.

7. Seja $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$ uma curva, se existirem determine tanto a equação da reta tangente, quanto a equação da reta normal a esta curva no ponto do ordenada $x = 1$.

8. Seja $x^2 + xy + y^2 = 3$ uma curva, se existir dertermine a(s) equação(s) da(s) reta(s) tangente(s) a esta curva e que seja(m) paralela(s) a reta(s) $r : x + y = 1$.

9. Seja $f(x) = x^2 + \ln(x+1)$ uma curva. Caso exista, determine a equação da reta tangente a esta curva, tal que seja normal a reta $r : 3y + 3x = 6$.

10. Seja $f(x) = \frac{x}{1+x}$ uma curva. Se existir escreva a equação da reta normal a esta curva que seja paralela a reta $r : y + x + 3 = 0$.

11. Se existe, determine as abscissas dos pontos do gráfico de $y = 3x - \cos(2x)$, nos quais a reta tangente a curva é perpendicular a reta $r : 2x + 4y = 5$.

12. Se possível, escreva a equação da reta normal a curva $f(x) = x - 3\sqrt{x}$ e que seja paralela a reta $r : x = 0$.

13. Se existir, escreva a equação da reta normal a curva $(x^2+4)\,y = 4x - x^3$ e que passe na origem do sistema cartesiano.

14. Determine, se existir, a equação de uma reta paralela a reta $r : x + y = 1$ que seja tangente a curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ no ponto $P\,(2, f\,(2))$.

15. Dada a curva $f\,(x) = \sqrt{2x-1}$, se existir, determine a equação da reta normal a curva onde a reta tangente é paralela a reta $r : x + 3y - 7 = 0$.

16. Dada a curva $f\,(x) = \sqrt{x-1}$. Se possível determine a equação da reta normal a curva no ponto em que a reta tangente é paralela à reta $r : x + 2y - 5 = 0$.

17. Dada a curva $f\,(x) = \sqrt[3]{3x+2}$, determine, se possível:

    (a) o(s) ponto(s) da curva onde a direção é paralela a reta $y = 2$;

    (b) a equação da reta tangente a curva no(s) ponto(s) onde a inclinação é $45°$.

18. Dada a curva $f\,(x) = \sqrt{4x-3} - 1$. Caso seja possível determine:

    (a) a direção da curva no(s) ponto(s) em que esta intercepta o eixo das ordenadas;

    (b) a equação da reta normal a curva no(s) ponto(s) em que esta reta seja a reta $r : 3x - 6y - 2 = 0$.

19. Seja $f\,(x) = \frac{1}{5\sqrt{5x-1}}$ uma curva. Se existir, determine a equação da reta tangente a curva que também seja perpendicular a reta $r : -2x - 2y + 3 = 0$.

20. Se existir, escreva a equação da reta normal a curva $f\,(x) = \frac{x}{x+7}$ que seja paralela a reta $r : y + 7x = 0$.

21. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, na origem, são perpendiculares.

22. A reta $x = a$ intercepta a curva $y = \frac{x^3}{3} + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor(es) de a as retas tangentes a essas curvas são paralelas? Encontre a(s) equação(ões) da(s) referida(s) reta(s).

23. Determine a equação da reta normal à curva $C : xy^2 + y^3 = 2x - 2y + 2$ no ponto em que abcissa e ordenada tem o mesmo valor.

24. Verifique se a função definida parametricamente por $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \ln(\cos t) \end{cases}$, para todo $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, satisfaz a equação $\frac{d^2y}{dx^2} + e^y \frac{dy}{dx} = 0$.

25. Caso exista, escreva na forma mais simples a derivada das seguintes funções:

a. $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = 3a\cos t \end{cases}$;

b. $\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right) \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right) \end{cases}$;

c. $\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right) \\ y = a\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$;

d. $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$;

e. $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$;

f. $\begin{cases} x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\ y = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \end{cases}$;

g. $\begin{cases} x = \frac{3}{2}at \\ y = \frac{a\left(1-t^2\right)}{1+t^2} \end{cases}$;

26. Em cada caso, verifique se a função dada é derivável nos pontos referidos:

a. $f\left(x\right) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x \leq -4 \\ -x-2, \text{ se } x > -4 \end{cases}$;

b. $f\left(x\right) = \begin{cases} 3-2x, \text{ se } x < 2 \\ 3x-7, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$;

c. $f\left(x\right) = \left|x-3\right|$;

d. $f\left(x\right) = 1 - \left|\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right|$;

e. $f\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, \text{ se } x < 1 \\ 1-x^2, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$.

27. Escreva, caso seja passível, a derivada na forma mais simples:

1. $f\left(x\right) = \frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$;
2. $f\left(x\right) = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$;
3. $f\left(x\right) = \ln\left(\sin^2 x\right)$;
4. $f\left(x\right) = 3^{\mathrm{tg}(nx)}$;
5. $f\left(x\right) = e^{x^x}$;
6. $f\left(x\right) = e^{x\ln x}$;
7. $f\left(x\right) = x^{x^2}$;
8. $f\left(x\right) = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$;
9. $f\left(x\right) = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$;
10. $f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$; $a, b > 0$;
11. $f\left(x\right) = \left(1+4x\right)^3\left(1+2x\right)^4$;
12. $f\left(x\right) = x^{\frac{1}{3}}\left(2x-1\right)^{\frac{4}{3}}\left(3x+1\right)^{\frac{1}{3}}$;
13. $f\left(x\right) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}$;
14. $f\left(x\right) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$;
15. $f\left(x\right) = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x+2)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;
16. $f\left(x\right) = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$;
17. $f\left(x\right) = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$;
18. $f\left(x\right) = \frac{x\left(x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$;
19. $f\left(x\right) = \left(\arcsin x\right)^2$;
20. $f\left(x\right) = \sqrt{a^2-x^2} + \arcsin\frac{x}{2}$;
21. $f\left(x\right) = \arctan\frac{a}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$;
22. $f\left(x\right) = x^5\left(a+3x\right)^3\left(a-2x\right)^2$;
23. $f\left(x\right) = \frac{x^p}{x^m-a^m}$;
24. $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 1$;
25. $\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = x$;
26. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax} = y - x$;
27. $x^3 - y^3 - 3axy = 1$;
28. $y = \cos\left(x+y\right)$;
29. $\cos\left(xy\right) = x$;
30. $\frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)} = 1$;
31. $\frac{b^2x}{a^2y} = 2x$;
32. $\frac{2a}{3(1-y^2)} = yx$;
33. $f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}\right)$;
34. $f\left(x\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$;
35. $f\left(x\right) = \frac{2bx^2-a}{x^3}$;
36. $f\left(x\right) = \left(\frac{6b^2x^2-8abx+16a^2}{15}\right)\sqrt{a+bx}$;

37. $\ln(xy^2) - 2xy + \ln x = 1$;
38. $f(x) = 2^{4x}.e^{\cos x}$;
39. $x^2y = 4a(2a - xy)$;
40. $f(x) = \frac{x^{3(\arg\tan x)\ln\left(x^2+1\right)}}{2}$;
41. $f(x) = xe^x - e^x$;
42. $-ye^{\arctan x} = 2$;
43. $f(x) = x^{\ln x} + \ln(\ln x)$;
44. $x \arcsin y = 1 + x^2$;
45. $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}}\right)^{e^{\sqrt{x}}}$;
46. $f(x) = \arctan x - \frac{1}{3}\arctan\left(\sqrt{3}x\right)$;
47. $x\sqrt{1+2y} + y = x^2$;
48. $f(x) = \left(1 + \tan^4\left(\frac{x}{12}\right)\right)^3$;
49. $f(x) = e^{\ln\sqrt[3]{\sin(3x)}}$;
50. $\ln y - e^{xy} = x$;
51. $f(x) = \left(\arcsin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^3$;
52. $f(x) = x\sqrt{x^2-3} - 3\ln\left(x - 3 + \sqrt{x^2}\right)$;
53. $\sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x}$;
54. $f(x) = a\left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$;
55. $y^2\cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$;
56. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-2x-1}{\sqrt{3}}\right)$;
57. $f(x) = \frac{a^{\ln(x-1)}}{\sqrt{kx-a}}$;
58. $f(x) = \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{4}}$;
59. $f(x) = \frac{2}{5}\left(4 - 3\sqrt[3]{x}\right)$;
60. $y^2 = x^2 + \sin(xy)$;
61. $a\cos^2(x+y) = b$;
62. $f(x) = e^x \arcsin(e^x) + \sqrt{1-e^{2x}}$;
63. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\cos^2 x}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$;
64. $f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x-3)^4(x^2+1)}{(2x+5)^3}}$;
65. $ye^{\arctan x} = \arctan y$;
66. $f(x) = \frac{1}{54}\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2}$;
67. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
68. $f(x) = \sqrt{2}\ln\left(1 - x + \sqrt{2(x^2+1)}\right)$;
69. $f(x) = \frac{2x^2+1}{x\sqrt{1-x^2}}$;
70. $y^2x = \cos(xy)$;
71. $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right)$;
72. $f(x) = \sqrt{\sin^3(3x^2+6x)}$;
73. $xe^{x^2y} - ye^{xy^2} = x$;
74. $x = \ln\left(y\sqrt{\arctan x}\right)$;
75. $f(x) = \frac{\operatorname{cosec}^2(2x)}{e^{\sec\sqrt{x}}}$;
76. $f(x) = e^{\ln e^{\left(x^2+4\right)}}$;
77. $f(x) = \frac{(a-x)e^{\arctan x}}{(1-a^2)\sqrt{1+x^2}}$;
78. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$;
79. $f(x) = \ln\left(e^x\left(x^2+1\right)^2\right)$;
80. $e^{\frac{x-y}{y}} = x$;
81. $e^y + xy = x$;
82. $f(x) = \ln^2(\ln(x^2+3))$;
83. $y + \sqrt[3]{xy} = x^2$;
84. $f(x) = \frac{a^{\ln(x-1)}}{\sqrt{kx-a}}$;
85. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;
86. $\sqrt{xy} + \sqrt{y} = \sqrt{a} + x$;
87. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;
88. $f(x) = \sin^2(\ln(\sqrt{x}) - x)$;
89. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;
90. $f(x) = \frac{2x}{(3x^2-x+1)^2}$;
91. $f(x) = \sqrt{\cos(x^2+3x)}$;
92. $x\cos y + y^2\cos x = 4x$;
93. $f(x) = \ln\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)$;
94. $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{e^x}$;
95. $f(x) = \frac{\cos(e^x+kx)}{\ln(kx)}$;
96. $f(x) = 5^{\frac{2x-2}{\ln(x-1)}}$;
97. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}$;
98. $xy - \ln(yx) = 2$;

99. $2y + \cos y = x$;
100. $f(x) = \sqrt{9x^2 + \sqrt{9 - x^2}}$;
101. $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$;
102. $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;
103. $f(x) = \ln\left(\frac{(x-1)^3 e^x}{(x^2+3x^3)^2}\right)$;
104. $x \sin y - y \cos x = x$;
105. $f(x) = \operatorname{arg\,cosh}\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$;
106. $f(x) = \ln\sqrt{ax^2\left(\tan^2\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)}$;
107. $f(x) = \frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}} + \operatorname{arg\,tanh}\left(\sin\left(x^{-1}\right)\right)$;
108. $f(x) = \frac{x^3}{x+\sqrt{x}}$;
109. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;
110. $f(x) = \sqrt[3]{x - \sqrt{x^5}}$;
111. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 6$;
112. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - xy = 2$;
113. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{\ln\sqrt[3]{x}}$;
114. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \ln\sqrt{x}$;
115. $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$;
116. $x \cos y = \sin(xy)$;
117. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-a}} \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1-a}}$;
118. $xe^{4y} + x\cos y = 3$;
119. $f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}} + e^{2x} \arcsin\left(e^{-2x}\right)$;
120. $f(x) = (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$;
121. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{3x}{x^3+1}\right)$;
122. $f(x) = \frac{x^3 \arcsin x}{3} + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-3x^2}$;
123. $y + \ln\left(x^2 + y^2\right) = 4$;
124. $f(x) = \frac{xe^{2x}}{\ln(3x+1)}$;
125. $f(x) = e^{(\ln x)^{-1}} \ln^2 x$;
126. $\sqrt{x^2 y} + 2y = \sqrt{x}$;
127. $f(x) = \ln\left(\frac{\sin^2\left(x^{-2}\right)}{\sqrt[3]{x} e^{\ln\sqrt[3]{x}}}\right)$;
128. $f(x) = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2} e^{ax}$;
129. $f(x) = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$;
130. $f(x) = \ln\sqrt{(x^2 + 4x + 3)} + \operatorname{arg\,cosh}(x)$;
131. $x^x = e^{y \ln y}$;
132. $f(x) = x^2\sqrt{1 - 5x^3}\,(1 - 2x)^3$;
133. $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$;
134. $\ln\left(xy + \sqrt{y^3}\right) + e^{x+y} = x$;
135. $f(x) = e^{3x}(\cos(3x) - \sin(3x))$;
136. $f(x) = \frac{1}{2}(a + bx)^{\ln(a+bx)}$.

28. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função deriferenciável (derivável) duas vezes e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x + 2\cos(3x))$.

    (a) Calcule $g''(x)$.

    (b) Supondo $f'(2) = 1$ e $f''(2) = 8$, calcule $g''(0)$.

29. Considere a função $g(x) = \cos x . [f(x)]^2$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável (derivável), $f(0) = -1$, $f'(0) = f"(0) = 2$. Calcule $g''(0)$.

30. Considere a função f, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(e^{bx^2} - 1\right)}{5 - 5\cos^2 x}, \text{ se } x < 0 \\ a, \qquad \text{se } x = 0 \\ (x+1)^{(\ln 5)/x}, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.

    Encontre, se possível, o valor das constante a e b para que a função $f(x)$ seja contínua em 0.

31. Calcule aproximadamente o valor de $\log(200, 2)$, sabendo que $\log(200) = 2,30103\ldots$

32. Calcule aproximadamente o valor de:
    a. $\sqrt[4]{17}$; b. $\sqrt[4]{13,9}$; c. $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$;
    d. $\arctan(1,02)$; c. $\arctan(0,83)$;

33. Calcule aproximadamente o valor de $\sin(60°3')$.

34. Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{63,5}$.

35. Determine o valor aproximado de $e^{-0,13}$.

36. Determine aproximadamente $e^{\tan(44°)}$, sabendo que $e\pi \approx 8,5$.

37. Calcule aproximadamente $\operatorname{cotg}(31^o15')$.

38. Se $\log e \simeq 0,4343$, determine o valor aproximado de $\log(9,9)$.

39. Calcule aproximadamente $\ln(2,5)$, sabendo que $\ln 2 \simeq 0,693$ e $\ln 3 \simeq 1,0986$.

40. Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{\ln(2,8)}$. Use a calculadora para obter o valor exato e compare com o valor aproximado. *(Lembre que: $e \approx 2,718$.)*

41. Calcule o valor aproximado de $\pi^{\cos(30'15'')}$.

42. Determine a expressão da derivada *n-ésima* em cada caso:
    a. $f(x) = e^{ax}$; b. $f(x) = \cos x$;
    c. $f(x) = (a+bx)^m$, com $m \in \mathbb{Z}$; d. $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

43. Mostre que a função $y = xe^{-x}$, satisfaz a equação $xy' = (1-x)y$.

44. Seja $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ uma função. Afirma-se que $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. Pergunta-se: é verdadeira a afirmação? Para qualquer que seja sua resposta, justifique-a.

45. Mostre que a função $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ satisfaz a equação $xy' = y(y\ln x - 1)$.

46. Seja $f(x) = x^{\frac{2}{3}} e^{\ln \sqrt[3]{x}}$ uma função. Afirma-se que $f'(x) = \frac{e^{\ln \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$. Pergunta-se é verdadeira a afirmação? Justifique sua resposta.

47. Seja $f(x) = 2\ln e^{(3-x)}$ uma função. Afirma-se que esta função representa uma reta. Pergunta- se: é verdadeira a firmação? Justifique sua resposta.

48. Seja $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ uma função. Afirma-se que $f'(x) = \frac{2}{(e^{2x}+1)^2}$. Pergunta- se: é verdadeira a firmação? Justifique sua resposta.

49. Seja $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$ uma função. Afirma-se que $f'(x) = -\sqrt{4-x^2}$. Pergunta-se: é verdade? Justifique sua resposta.

50. Seja $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ uma função. Mostre que ela satisfaz a equação $xf'(x) = (1+x^2)f(x)$.

51. Seja $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, mostre que sua derivada é $f'(x) = \frac{e^x+2}{(e^{-x}+1)^2}$.

52. Seja $f(x) = e^{e^{\ln x}}$ uma função. Afirma-se que $f'(x) = \frac{e^{\ln x + e^{\ln x}}}{x}$. Pergunta-se: é verdade? Justifique sua resposta.

53. Dê os pontos onde a função $f(x) = |x| + |x+1|$ não é derivável.

54. Um ponto desloca-se sobre a hipérbole $xy = 4$ de tal modo que a velocidade é $\frac{dy}{dt} = \beta$, onde β é uma constante. Mostre que a aceleração da abcissa é $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{8}(\beta^2 x^3)$.

55. Usando princípios da Física pode ser mostrado que, quando um cabo é pendurado entre dois postes, toma a forma de uma curva $y = f(x)$, que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pg}{T}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

onde p é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão do cabo no ponto mais baixo. Determine, se possível, o valor da constante k para que $y = f(x) = k\cosh\left(\frac{pg}{T}x\right)$ seja solução dessa equação diferencial.

56. Seja $y = \sqrt[3]{3x+2}$ a equação do movimento de uma particula, determine:

    (a) a velocidade da partícula quando trancorridos $2s$;

    (b) a aceleração da partícula quando transcorrido $2s$.

57. Na terra você pode facilmente atirar um clipe a 64 cm de altura usando um elástico. Em t segundos depois do disparo, o clipe estará $s = 64t - 16t^2$ em cima de sua mão. Quanto tempo o clipe leva para atingir a altura máxima? A que velocidade ele sai de sua mão?

58. Um carro está a $s = \left(16t^{\frac{3}{2}} - 24t + 16\right)\ km$ a leste de uma parada no instante t horas. Pregunta-se:

    (a) Qual é a velocidade no instante $t = \frac{1}{4}h$ e qual é o sentido que ele se move?

    (b) Onde está o carro quando sua velocidade é nula.

59. Dois corpos têm movimento em uma mesma reta segundo as equações $s_1 = t^3 + 4t^2 + t - 1$ e $s_2 = 2t^3 - 5t^2 + t + 2$. Determine as velocidades e as posições desses dois corpos no instante em que as suas acelerações são iguais. Considere como unidades de s_1 e s_2 o metro e como unidade do tempo t o segundo.

60. Dois pontos partem da origem do eixo x no instante $t = 0$ e se move ao longo desse eixo de acordo com as equações $x_1 = t^2 - 2t$ e $x_2 = 8t - t^2$, x_1 e x_2 onde são medidos em metros e t é medido em segundos, pregunta-se:

    (a) em que instante os dois têm mesma velocidade?

    (b) quais são as velocidades desses dois pontos nos instante em que eles têm a mesma posição.

61. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo y varia com o tempo x segundo a equação $y = \frac{v_0}{c}(1 - e^{-cx})$, $x \geq 0$, onde v_0 e c são constantes positivas. Use a **DEFINIÇÃO** de derivadas para determinar a velocidade da partícula no instante x.

62. Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce a razão de $12,5\ cm/s$. Qual a variação do volume no instante em que o raio é de $15,2\ cm$?

63. Um ponto se move sobre a parte superior da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal maneira que sua abscissa cresce a razão de 5 unidades por segundo. Quando $x = 4$, com que rapidez varia a ordenada?

64. Um corpo é lançado no espaço formando com a horizontal um ângulo α, descreve no ar, por ação da gravidade uma curva cujas equações são $x = v_0 t \cos\alpha$ e $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Sabendo que $\alpha = 60^\circ$ e $v_0 = 50\ m/s$, determine a direção do movimento quando $t = 2s$?

65. Dois carros, um dirigindo-se para leste com velocidade de 77 km/h, o outro dirigindo-se para sul com velocidade de 57 km/h, estão viajando em direção ao encontro das duas rodovias. A que velocidade os carros se aproximam um do outro, no momento em que o primeiro carro estiver à 477 m e o segundo carro estiver à 277 m da intersecção das rodovias?

66. Um tanque de forma cônica invertido tem altura de 8 m, raio da base 2 m. O mesmo se enche de água à razão de 7 $m^3/\min$. Com que velocidade sobe o nível da água quando este se encontra a 4 m de profundidade?

67. Considerando um bloco de madeira de forma cúbica, se é tirada uma placa de $0,47\ cm$ de espessura de cada lado do bloco, e se o bloco tinha originalmente $1,7$ cm de comprimento do lado, qual a razão de variação do volume por causa desse processo?

68. Uma piscina tem 18 m de largura, 28 m de comprimento, 2 m de profundidade em um extremo e 8 m no outro, o fundo tem forma de um plano inclinado. Se a água está sendo bombeada para a piscina à razão de $0,8\ m^3/\min$, com que velocidade se eleva o nível da água no instante em que ele é de $1,8\ m$ na extremidade mais profunda?

69. Um triângulo retângulo inscrito no círculo $x^2 + y^2 = 25$, tem as extremidades da hipotenusa situadas nos pontos $A(5,0)$ e $B(-5,0)$, enquanto que, o terceiro vértice, situado no ponto $P(x,y)$, se move sobre a circunferência com uma velocidade $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\ m/s$. Calcule a velocidade com que a área deste triângulo está variando quando $x = 4\ m$.

70. Em que pontos da parábola $y^2 - 18x = 0$ a ordenada y cresce duas vezes mais depressa que a abscissa x?

71. Uma pipa está a 80 m de altura sobre o nível do solo. Horizontalmente, se a criança que a segura se move a 4 m/s, com que velocidade a criança está soltando a corda quando esta corda medir 100 m.

72. Um ponto se move ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$ de tal modo que a sua abscissa varia a uma velocidade constante de 5 m/s. Qual a velocidade da ordenada no instante em que $x = 10\ m$.

73. Uma piscina tem 10 m de largura, 20 m de comprimento, 1 m de profundidade nas extremidades e 3 m no meio, de modo que o fundo seja formado de dois planos inclinados. A água é bombeada para a piscina à razão de $0,3\ m^3/\min$. Seja h a altura da água na parte mais profunda, com que velocidade estará variando h no instante em que $h = 1\ m$?

74. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de 5 m de raio da base a 10 m de altura. No tempo $t = 0s$, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3/h. Então:

    (a) com que velocidade sobe o nível da água?

    (b) quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

75. Um balão está subindo **verticamente** acima de uma estrada a uma velocidade constante de $\frac{1}{3}m/s$. Quando ele está a $17m$ acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de $5m/s$ passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

76. Uma cidade A é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de uma tempo x, medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia, é aproximadamente dado por $f(x) = 64x - \frac{x^3}{3}$.

    (a) Qual a razão de expansão da epidemia no tempo $x = 4$ dias?

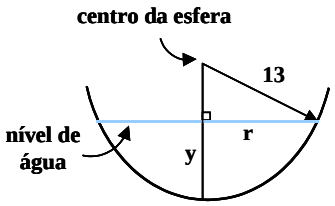
(b) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no quinto dia?

77. A água escoa a uma taxa de $6m^3/\min$ de um reservatório hemisférico com raio de $13m$ (figura abaixo). Responda às questões a seguir, sendo que o volume de água em um recipiente hemisférico de raio r é dado por $V = \frac{\pi}{3}y^2(3r - y)$, quando a água tem y metros de profundidade abaixo.

(a) A que taxa o nível da água variará quando a água tiver $8m$ de profundidade?

(b) Qual será o raio r na superfície da água quando a água tiver y metros de profundidade?

(c) A que taxa o raio r variará quando a água tiver $8m$ de profundidade?



78. Uma quadra de beisebol é um quadrado cujos lados medem $90m$. Suponha que um jogador correndo da segunda para a terceira base, tem uma velocidade de $30m/s$ no instante em que ele esta a $20m$ da terceira base. Qual é a taxa de variação da distância do jogador à base do batedor naquele instante?

79. Sabendo que o volume V de água em um pequeno reservatório durante o degelo da primevera é dado por $V = 5000(x+1)^2$, para x meses e $0 \leq x \leq 3$. Se a taxa de variação de volume em relação ao tempo é a taxa de fluxo para o reservátorio, determine a taxa de fluxo no instante $x = 0$ e $x = 2$. E qual é a taxa de fluxo quando o volume é 10.700 m^3.

80. Uma usina de britagem produz pó de pedra, que ao ser depositado no solo, forma uma pilha cônica onde a altura é aproximadamente igual a $\frac{4}{3}$ do raio da base.

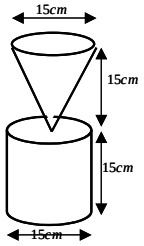
(a) Determine a razão de variação do volume em relação ao raio da base;

(b) Se a raio da base varia a uma taxa de $20cm/s$, qual a razão de variação do volume, quando a raio mede $2m$?

81. O café escoa de um filtro cônico para uma cafeteira cilíndrica a uma taxa de 2.10^{-4} $cm^3/\min$.

(a) A que taxa o nível do café, na cafeteira, aumentará quando a altura de café no filtro for a $5cm$?

(b) A que taxa o nível no filtro diminuirá nesse momento?



82. Uma lâmpada colocada num poste está a $4m$ de altura. Se uma criança de $90cm$ de altura caminha afastando-se do poste à razão de $5m/s$, com que rapidez se alonga sua sombra?

83. Um farol giratório faz uma revolução em $15s$. O farol está a $60m$ do ponto P mais próximo em uma praia retilínea. Determine a razão de variação na qual um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto a $150m$ de P.

84. Um balão está subindo **verticamente** acima de uma estrada a uma velocidade constante de $\frac{1}{3}m/s$. Quando ele está a $17m$ acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de $5m/s$ passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

85. Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro colocado a $500m$ de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\frac{\pi}{4}$, e se o ângulo aumenta à razão de $0,14$ rad/min, a que velocidade o balão sobe nesse momento?

86. Às $13:00$ hs o navio A está a $100km$ ao norte do navio B. O navio A está navegando rumo ao sul a $20km/h$ enquanto o navio B estiver navegando rumo ao leste a $15km/h$. Qual a velocidade de afastamento dos navios às $19:00$ hs?

87. Um cabo de cobre tem diâmetro de $1cm$ à $0°C$. Digamos que seu comprimento seja de $1m$ e não se altera com a variação da temperatura. Sabe-se que seu diâmetro aumenta a uma velocidade de $0,02cm/°C$. Calcule a taxa de variação do volume desse cabo quando a temperatura está a $20°C$.

88. Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 ℓ e depois de um tempo t horas este volume diminuiu $2500t^2$ ℓ, determine:

    (a) o tempo necessário para o esvaziamento da piscina;

    (b) a taxa média de escoamento no intervalo $[2, 5]$;

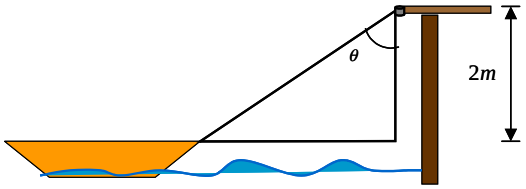
    (c) a taxa de escoamento depois de 2 hs do início do processo.

89. Numa granja de frangos, o abastecimento de ração é automático. A ração está num reservatório que tem a forma de uma pirâmide de base quadrada de $2m$ de lado e altura de $6m$, cujo vértice está voltado para baixo. Se o consumo de ração é de $0,05\ m^3/h$, com que velocidade desce o nível de ração quando este está a $2m$ do vértice? (*Volume de uma pirâmide*: $V = \frac{1}{3}(\text{área da base}) * \text{altura}$)

90. Um bote é puxado por uma corda presa à proa e que passa por uma argola na cais a $2m$ acima da proa. A corda é puxada com uma taxa de $0,6m/s$.

    (a) A que velocidade o bote se aproxima do cais quando $3m$ de corda foram puxados?

    (b) A que taxa o ângulo θ varia neste momento?



Capítulo 4

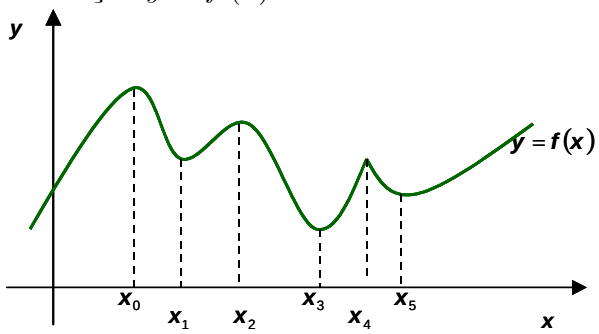
Teoremas sobre as Funções Deriváveis

Objetivos

- Aplicar o teorema de Rolle;
- Interpretar geometricamente o teorema de Rolle;
- Aplicar o teorema do valor médio;
- Interpretar geometricamente do valor médio;
- Aplicar o teorema de Cauchy;
- Calcular limites utilizando a regra de L' Hôpital.

4.1 Máximos e Mínimos

Considere a função $y = f(x)$ como abaixo ilustrada.



Os pontos de abcissas x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são chamados *pontos extremos*. Os valores das ordenadas, $f(x_0)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são chamados de *máximos relativos*; e, $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$ são chamados de *mínimos relativos*.

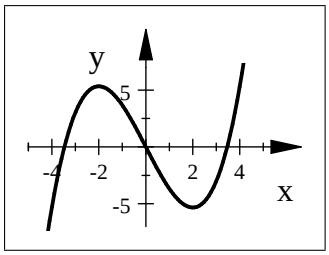
Definição 1: Uma função f tem um *máximo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Definição 2: Uma função f tem um *mínimo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Exemplo 1: A função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ tem um máximo relativo em $c_1 = -2$ e um mínimo relativo em $c_2 = 2$.



Proposição 1: Supondo que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demostração: Supondo qu f tem um ponto de máximos relativo em c e que $f'(c)$ existe. Então, pela definição de derivadas, temos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Como c é um ponto de máximo relativo de f , se x estiver suficientemente próximo de c, temos que

$$f(c) \geq f(x) \quad \Rightarrow \quad f(c) - f(x) \geq 0.$$

Se $x \to c^+$, *então* $x - c \to 0$. *E ainda,* $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. *Assim,*

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad (1)$$

Se $x \to c^-$, *então* $x - c \to 0$. *E ainda,* $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. *Assim,*

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \qquad (2)$$

De (1) *e* (2), *segue que* $f'(c) = 0$.

Geometricamente, está proposição nos afirma que se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem um reta tangente horizontal no ponto $x = c$.

A proposição 1, nos permite concluir que se $f'(c)$, a condição $f'(c) = 0$ é *necessária* para a existência de um extremo relativo em c, mas *não é suficiente*. Em outras palavras, se $f'(c) = 0$, então a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c. Isto pode ser observado nas funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = |x|$. *Verifique!!!*

Definição 3: O ponto $c \in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe é chamado de *ponto crítico* ou *valor crítico*.

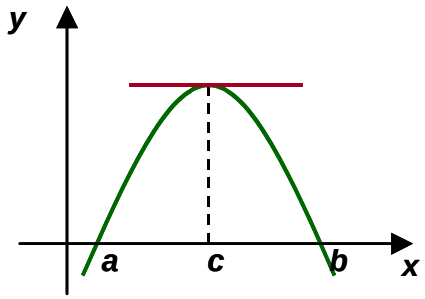
Observe que uma função definida num dado intervalo pode admitir vários pontos extremos. Ao *maior* e ao *menor* valor da função num intervalo denominamos *máximo absoluto* e *mínimo absoluto*, respectivamente.

Proposição 2: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Obs: *Esta demostração será omitida.*

4.2 Teoremas sobre derivadas

O próximo teorema afirma que se o gráfico de uma função deferenciável cruza o eixo x em dois pontos, a e b, então entre eles deve existir ao menos um ponto c onde a reta tangente horizontal. Observe a figura abaixo:



Teorema de Rolle

Seja f uma função tal que

i. f é contínua em $[a,b]$;

ii. f derivável em (a,b);

iii. $f(a) = f(b) = 0$.

Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Demonstração: Consideremos dois casos.

1^o Caso: *Se* $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Então $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in (a,b)$.

Logo, qualquer número entre a e b pode ser escolhido como c.

2^o Caso: *Se* $f(x) \neq 0$, *para algum* $x \in (a,b)$.

Como f é contínua em $[a,b]$, *pela proposição 2, f atinge seu máximo e seu mínimo em* $[a,b]$. *Sendo* $f(x) \neq 0$ *para algum* $x \in (a,b)$, *então um dos extemos será diferente de zero. Como* $f(a) = f(b) = 0$, *esse valor extremo será atingido em algum* $c \in (a,b)$. *E ainda, como f é derivável, pela proposição 1, conclui-se que* $f'(x) = 0$.

Exemplo 2: A função $f(x) = x - x^3$, $\forall x \in [-1,1]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Verifiquemos se as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas:

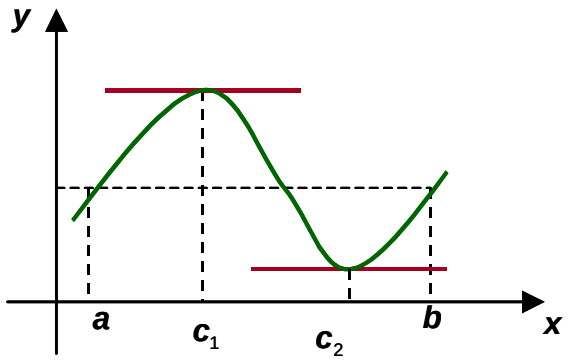
i. f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[-1,1]$;

iii. $f'(x) = 1 - 3x^2$ é definida e contínua em $[-1,1]$. Logo, f é derivável em $(-1,1)$;

iii. $f(-1) = f(1) = 0$;

Como as hipóteses estão satisfeitas, então existe $c \in (-1,1)$ tal que
$f'(c) = 0 \Rightarrow 1 - 3c^2 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1,1)$.

Observação 1: Examinando a interpretação geométrica e considerando nas hipóteses do teorema que se $f(a) = f(b) \neq 0$, então a conclusão do *Teorema de Rolle* contínua sendo válida desde que $f(x)$ não seja derivável nos extremos do intervalo. Teríamos a situação geométrica:



Em cada um dos pontos c_1 e c_2 o coeficiente angular da reta tangente a curva é zero. Portanto, $f'(c) = 0$.

Exemplo 3: A função $f(x) = \cos^2 x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Temos que:

i. f é definida e contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

ii. $f'(x) = -2\sin x \cos x = -2\sin(2x)$ é derivável em $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$;

iii. $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

Observe ainda que, se
$f'(c) = 0 \Rightarrow -2\sin(2c) = 0 \Rightarrow c = \frac{n\pi}{2}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Para $c = 0$, temos que $c \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
Logo, verifica-se o teorema de Rolle.

Observação 2: Se a função$f(x)$ não é derivável em todos os pontos do intervalo, então o teorema pode ser falso, isto é, no intervalo considerado poderá não existir um c tal que $f'(c) = 0$.

Exemplo 4: A função $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $\forall x \in [0, 4]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Verifiquemos se as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas:

i. f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[0, 4]$;

iii. $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$;

ii. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-2)}}$ não é definida para $x = 2 \in (0, 4)$.

Portanto, f não satisfaz o teorema de Rolle sobre o intervalo $[0, 4]$ e como $2 \neq 0$, não existe $c \in (0, 4)$ tal que $f'(c) = 0$.
Logo, não verifica o teorema sobre o intervalo $[0, 4]$.

Exemplo 5: A função $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula nos extremos do intervalo $[-1, 1]$. Demonstre que sua derivada não se reduz a zero em nenhum ponto do segmento $[-1, 1]$.

Solução: Observe que

(i) f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[-1,1]$;

(iii) $f(-1) = f(1) = 0$;

(iii) $f'(x) = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ não é definida para $x = 0 \in (-1,1)$.

Portanto, f não satisfaz o teorema de Rolle sobre o intervalo $[-1,1]$ e como $-4 \neq 0$, não existe $c \in (-1,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Logo, a derivada de f não tem raízes sobre o segmento $[-1,1]$.

Exemplo 6: Comprove que entre as raízes de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ existe também as raízes de sua derivada.

Solução: As raízes de f são 2 e 3. Note ainda que,

(i) f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[2,3]$;

(iii) $f(2) = f(3) = 0$;

(iii) $f'(x) = \frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x+6)^2}}$ é derivável para todo $x \in (2,3)$.

Logo, pelo teorema de Rolle, concluímos que existe um $c \in (2,3)$ tal que $f'(c) = 0$, ou seja, entre 2 e 3 existe também a raiz da derivada.

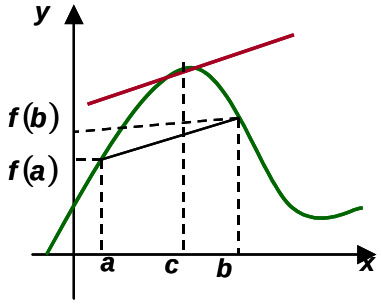
Analisemos agora o primeiro teorema do valor médio para derivadas, ou seja, sobre os incrementos finitos de uma função.

O teorema de Rolle é um caso especial do *Teorema do Valor Médio*, o qual afirma que entre dois pontos quaisquer A e B sobre um gráfico de uma função diferenciável, deve haver pelo menos um lugar onde a reta tangente à curva é paralela à reta secante que passa por A e B.

Notando que a reta secante que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e que a inclinação da reta tangente em c é $f'(c)$. Geometricamente,



Teorema do Valor Médio (ou de Lagrange)

Seja f uma função tal que

i. f é contínua em $[a,b]$;

ii. f derivável em (a,b);

Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração: A equação da reta que passa pelos pontos A e B é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Se $y = h(x)$*, então:*

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Observe que $h(x)$ *é uma função polinomial. Sendo assim,* h *é uma função contínua e diferenciável para todo* x*.*

Defina a função $g(x) = f(x) - h(x)$*. Assim,*

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Esta função representa a distância vertical entre um ponto do gráfico e o ponto correspondente da reta secante.

Note que:

(i) $g(a) = g(b) = 0$*;*

(ii) g *é uma função contínua em* $[a,b]$*;*

(iii) g *é derivável em* (a,b)*;*

Portanto, como a função g *satisfaz as condições do Teorema de Rolle, existe um* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Exemplo 7: Verifique se as funções abaixo verificam o teorema do valor médio:

1. $f(x) = x - x^3$ em $[-2,1]$;

   Solução: Verificando as hipóteses do teorema do valor médio:

   (a) i. f é definida e contínua em $[-2,1]$;
   ii. $f'(x) = 1 - 3x^2$ é definida para todo $x \in (-2,1)$;

   Logo, satisfaz as condições do teorema. Assim, temos que $\exists c \in (-2,1)$ tal que

   $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 1 - 3c^2 = -2 \Rightarrow c = \pm 1$.

   Observe que, apenas $-1 \in (-2,1)$.

2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ sobre $[-1,1]$.

   Solução: Verificando as hipóteses do teorema do valor médio:

(a) i. f é definida e contínua em $[-1,1]$;
ii. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ não é definida em $x = 0 \in (-1,1)$;

Vejamos, no entanto, se verifica o Teorema.

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0.$

Conclusão: não existe $c \in (-1,1)$. Portanto, não verifica o teorema sobre $[-1,1]$.

Exemplo 8: Em que ponto da curva $f(x) = \ln x$ a tangente é paralela a corda que une os pontos $A(1,0)$ e $B(e,1)$.

Solução: Como as hipóteses do Teorema de Lagrange são satisfeitas para $f(x) = \ln x$ sobre $[1,e]$ (*verifique!!!*), temos que

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow c = (e-1) \Rightarrow c \in (1,e).$

Lembre que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos A e B.

Portanto, o ponto em que a tangente a curva é paralela a corda que une os pontos A e B é $P(e-1, \ln(e-1))$.

Exemplo 9: Aplique o Teorema de Lagrange para demonstrar a desigualdade $x > \ln(x+1)$ se $x > 0$.

Solução: Como $x > 0$ tomemos um número c tal que $0 < c < x$. Se $f(x) = \ln(x+1)$ e os extremos do intervalo são $a = 0$ e $b = x$, então:

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)-0}{x-0} \Rightarrow \ln(x+1) = \frac{x}{c+1}.$

Qberve que,

$\frac{x}{c+1} < x$, pois $c > 0 \qquad \Rightarrow \ln(x+1) < x.$

Vejamos agora o *segundo teorema do valor médio para derivadas*, ou seja, o teorema sobre a razão dos incrementos de duas funções.

Teorema de Cauchy

Se f e g são duas funções tais que:

(i) f e g são contínuas em $[a,b]$;

(ii) f e g são diferenciáveis (a,b);

(iii) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Então, existe ao menos um número c, tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Demonstração: Provaremos inicialmente que $g(b) - g(a) \neq 0$.

Como g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então pelo teorema do valor médio, $\exists c \in (a,b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Como por hipótese $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ *então*

$$g'(c) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g(b) - g(a) = (b-a)\, g'(c) \neq 0.$$

Portanto, $g(b) - g(a) \neq 0$.

Defina a função $h(x)$ *como*

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right).$$

Note que:

(i) $h(a) = h(b) = 0$;

(ii) h *é uma função contínua em* $[a,b]$;

(iii) h *é derivável em* (a,b);

Portanto, como a função h *satisfaz as condições do Teorema de Rolle, existe um* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$h'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = f'(c) - g'(c)\, \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Observação 3: A interpretação geométrica deste teorema se resume na interpretação geométrica da função $h(x)$ que para tal exige o conhecimento de equações paramétricas, que a este nível ainda não é possível.

Podemos no entanto estabelecer algumas conclusões:

1^a Se a função $g(x) = x$, a conclusão do Teorema de Cauchy se transforma na conclusão do Teorema de Lagrange, pois $g'(x) = 1$, $\forall x \in (a,b)$, $g(b) = b$ e $g(a) = a$. Assim, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Portanto, o Teorema de Lagrange é um caso particular do Teorema de Cauchy.

2^a Se $f(a) = f(b)$, então a conclusão do Teorema do Cauchy se transforma na conclusão do Teorema de Rolle, pois $f(b) - f(a) = 0$. Assim, $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{0}{g(b)-g(a)} \Rightarrow f'(c) = 0$. Portanto, o Teorema de Rolle é também um caso particular do Teorema de Cauchy.

Exemplo 10: Verifique se as condições do Teorema de Cauchy são cumpridas para as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x^3 - 1$ sobre o intervalo $[1,2]$.

Solução: Verificando as hipóteses do teorema de Cauchy:

(i) f e g são contínuas sobre $[1,2]$;

(ii) $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3x^2$ são definidas sobre $(1,2)$;

(iii) $g'(x) \neq 0$ sobre $(1,2)$

Logo, f e g satisfazem as condições do teorema. Assim:
$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2c}{3c^2} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad 9c^2 - 14c = 0$
$\Rightarrow \; c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{14}{9}$.
Como $c_2 \in (1,2)$, as funções f e g verificam o Teorema de Cauchy.

4.3 Regras de L' Hôpital

Regra de L'Hôpital para indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Teorema: Se f e g são duas funções que satisfazem o teorema de Cauchy e se reduzem a zero em ponto $x = x_0$, isto é, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e para todo $x \neq x_0$, $g'(x) \neq 0$, então se existir o $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existirá o $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e mais,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Escolhendo no interior de um número $x_0 \neq a$ e aplicando o Teorema de Cauchy sobre o intervalo $[x_0, x]$, temos que:

$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$, *onde* $c \in (x_0, x)$ *e* $[x_0, x] \subset [a, b]$.

Por hipótese do teorema, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, *isto implica que:*

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (1)

Se $x \to x_0$, *então* $c \to x_0$ *pois* $x_0 < c < x$ *e se existe* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *então existirá o* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Assim, de (1), *obtemos que:*

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Portanto,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podemos concluir então, pelo *Teorema de L'Hôpital*, que para levantar a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ basta derivar o numerador e o denominador, e estas derivadas serão o numerador e o denominador de uma nova função cujo valor no ponto de indeterminação da função inicial é o limite desta quando o argumento tende ao ponto de indeterminação.

Exemplo 11: Calcule os limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

   Solução: Observe que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$

2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$.

   Solução: Observe que $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$

Observação 4: Se $f'(c)=0$ e $g'(c)=0$, isto é, $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=0$ e se as funções f' e g' satisfazem as condições impostas às funções f e g segundo a hipótese de teorema, então este teorema pode ser aplicado para a razão $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ e nos dará como conclusão que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}.$$

Exemplo 12: Calcule $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.
Solução: Observe que $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}$.
Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$.
Aplicando novamente a regra de L'Hôpital, temos que:
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}$
Novamente a regra de L'Hôpital, temos que:
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

Observação 5: O processo descrito pelo Teorema de L'Hôpital pode ser repetido quantas vezes se fizer necessário, desde que respeitadas as condições do teorema. Para o caso geral, $f^n(x)$ e $g^n(x)$, não demonstraremos aqui, pois exige o conhecimento da Fórmula de Taylor com resíduo para $f(x)$ e $g(x)$.

Observação 6: O Teorema de L'Hôpital pode ser aplicado quando $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ e quando $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ e se o que se quer é o $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, desde que exista o $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Para tanto, basta fazer uma mudança de variável. Definindo $x=\frac{1}{y}$. Se $x\to\infty$, então $y\to0$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to0}\frac{-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 13: Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.
Solução: Observe que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$.
Definindo $u=\frac{1}{x}$. Se $x\to\infty$, então $u\to0$. Assim,
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(ky)}{y}=\frac{0}{0}$.
Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:
$\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(ky)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{k\cos(ky)}{1}=k.$

Observação 7: Se $\lim_{x\to x_0} g'(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} f'(x) \neq 0$, então o Teorema de L'Hôpital se aplica para a razão inversa $\frac{g(x)}{f(x)}$, que tende a zero quando $x \to x_0$. Portanto a razão inicial $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenderá ao infinito.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 14: Calcule os limites a seguir.

1. $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n}$;

   Solução: Observe que $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n} = \frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n} = \lim_{x\to a} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{na^{n-1}}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$;

   Solução: Observe que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$.

   Novamente, aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$.

3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$;

   Solução: Temos que $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi - 2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\sec^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$;

   Solução: Temos que $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

Regra de L'Hôpital para indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema: Se f e g são funções contínuas e deriváveis em todos os pontos $x \neq x_0$ (numa vizinhança do ponto x_0) e $g'(x) \neq 0$ para todo x e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ e existir o $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então existirá também o $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e mais,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Omitiremos a demonstração, por ser análoga a demonstração para a regra de L'Hôpital para indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Exemplo 15: Calcule o $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Solução: Temos que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Observação 8: As considerações tecidas nas observações para regra de L'Hôpital para indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ são também verdadeiras aqui no a para indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e ilustraremos apenas com exemplos.

Exemplo 16: Calcule os limites.

1. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan(3x)} = \frac{\infty}{\infty}$;

   Solução: Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan(3x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3\sec^2(3x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(3x)}{3\cos^2 x} = \frac{0}{0}.$

   Novamente, pela regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(3x)}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} = \frac{0}{0}.$

   Pela regra de L'Hôpital novamente, temos que:

   $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(6x)}{\cos(2x)} = 3.$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$;

   Solução: Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$

   Novamente, pela regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$;

Solução: Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$

Observação 9: A regra de L'Hôpital só pode ser aplicada para indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Caso seja ignorada essa condição, chega-se a resultados absurdos.

Veremos a seguir, como as indeterminações da forma $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0 e ∞^0 podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, com o objetivo de aplicar a regra de L'Hôpital para auxiliar no cálculo de limites.

4.4 Aplicações da Regra de L'Hôpital

4.4.1 Forma indeterminada $0.\infty$

Se $f(x)=g(x)\,h(x)$ e o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0.\infty$, então para levantar esta indeterminação rrescrevemos a função como segue

$$f(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}\text{ ou }\ f(x)=\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Desta forma, o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ assume a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 17: Calcule o $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec(3x)\cos(5x))$.

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec(3x)\cos(5x))=0.\infty$.

Reescrevendo a função, temos que:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec(3x)\cos(5x))=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec(3x)}{\frac{1}{\cos(5x)}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}=\frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin(5x)}{-3\sin(3x)}=\frac{5}{3}$.

4.4.2 Forma indeterminada $\infty-\infty$

Se $f(x)=g(x)-h(x)$ e o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty-\infty$, então, através de operação elementares entre as funções $g(x)$ e $h(x)$ é sempre possível transformar o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ numa das formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 18: Calcule o $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\infty-\infty$.

Reescrevendo a função, temos que:
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\frac{0}{0}$.
Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)=0$.

4.4.3 Formas Indeterminadas 1^{∞}, 0^0 e ∞^0

Se $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$ e $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ assume uma das três formas indeterminadas 1^{∞}, 0^0 e ∞^0, então, para qualquer uma destas três indeterminações define-se

$$L=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[g(x)]^{h(x)}.$$

Aplicando-se o logaritmo neperiano a função dada, temos que:

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to x_0}[g(x)]^{h(x)}\right)\quad\Rightarrow\quad\ln L=\lim_{x\to x_0}\left(\ln[g(x)]^{h(x)}\right).$$

Por propriedade de logaritmo neperiano, temos que:

$$\ln L=\lim_{x\to x_0}[h(x)\ln(g(x))]=b.$$

Assim, o limite passa a assumir a forma indeterminada $0.\infty$, que se resolve conforme a primeira aplicação da regra de L'Hôpital vista antriormente. E ainda, como foi aplicado logaritmo na função dada, para determinar a solução final deve-se aplicar a função exponencial (pois é a função inversa do logaritmo) do limite, isto é,

$$L=e^b\quad\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=e^b.$$

Exemplo 19: Determine os limites abaixo.

1. $\lim\limits_{x\to0}x^x=0^0$;

   Solução: Definindo $L=\lim\limits_{x\to0}x^x$.

   Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

   $\ln L=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}x^x\right)=\lim\limits_{x\to0}(\ln(x^x))=\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=0.\infty$.

   Reescrevendo a função, temos que:

   $\ln L=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\ln L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln L = 0.$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

$L = e^0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^x = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 1^{\infty}$;

Solução: Definindo $L = \lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

$\ln L = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(2-x)\right) = \infty.0.$

Reescrevendo a função, temos que:

$\ln L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\ln(2-x)\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

$\Rightarrow\; \ln L = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0}.$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\ln L = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{\pi(2-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{2}{\pi} \;\Rightarrow\; \ln L = \frac{2}{\pi}.$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

$L = e^{\frac{2}{\pi}} \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\frac{2}{\pi}} = \sqrt[\pi]{e^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}(x))^{\sin x} = \infty^0.$

Solução: Definindo $L = \lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}(x))^{\sin x}$.

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

$\ln L = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}(x))^{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x \ln(\operatorname{cotg}(x))) = 0.\infty.$

Reescrevendo a função, temos que:

$\ln L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\operatorname{cotg}(x))}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\operatorname{cotg}(x))}{\operatorname{cossec}(x)}\right) = \frac{\infty}{\infty}.$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\ln L = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{cossec}^2(x)}{\operatorname{cotg}(x)}}{-\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cossec}(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \;\Rightarrow\; \ln L = 0.$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

$L = e^0 \;\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg}(x))^{\sin x} = 1.$

4.5 Exercícios

1. Em cada caso, examine se as funções satisfazem as condições e verificam o Teorema de Rolle.

   (a) $f(x) = 2x^2 + x$ sobre o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

   (b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

   (c) $f(x) = \tan x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$;

   (d) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ sobre o intervalo $[1, 3]$;

   (e) $f(x) = \sin^2 x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$.

2. Sabendo que $f(x) = 4x^3 - 4x + x^2 - 1$ tem raízes -1 e 1, verifique se a derivada tem raiz entre -1 e 1.

3. Em cada caso, examine se as funções satisfazem as condições e verificam o Teorema deo Valor Médio (de Lagrange).

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ sobre o intervalo $[-3, 4]$;

   (b) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ sobre o intervalo $[0, 2]$;

   (c) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

   (d) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ sobre o intervalo $[0, 1]$;

   (e) $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

   (f) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ sobre o intervalo $[0, 1]$.

4. Através do teorema de Rolle é possível afirmar que a função $f(x) = 2 - |3 - x|$ possui um ponto crítico no intervalo $[1, 4]$? Justifique.

5. Em que ponto da curva $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ a reta normal a curva é normal a reta que passa pelos pontos $A(1, -2)$ e $B(0, -1)$?

6. Utilize o Teorema de Lagrange para demonstrar as desigualdades:

   (a) $e^x \geq 1 + x$, para $x \geq 0$;

   (b) $\arctan x < x$, para $x > 0$;

   (c) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$, para $b > a$;

   (d) $|\sin\theta - \sin\alpha| \leq |\theta - \alpha|$, para α e $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Para que valores de a, m e b a função $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x = 0 \\ -x^2 + 3x + a,\ 0 < x < 1 \\ mx + b, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ satisfaz o teorema do valor médio no intervalo $[0, 2]$?

8. Em que ponto da curva $f(x) = x^n$ a tangente a curva é paralela a corda que une os pontos $A(0,0)$ e $B(a, a^n)$?

9. Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

   (a) Usando um dos teoremas estudados, determine o ponto em que a reta normal à curva $y = g(x)$ também é normal a reta que passa pelos pontos $A(-2,0)$ e $B(0,2)$.

   (b) A função $y = f(x) = \sqrt{16 - x^4}.g'(x)$, verifica o teorema de Rolle entre as raízes da função g? Justifique.

10. Seja $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, onde A, B e C são constante reais e $A \neq 0$. Mostre que para qualquer intervalo $[a, b]$, o valor de c cuja existência é garantida pelode Lagrange, é o *ponto médio* do intervalo.

11. Afirma-se que para as funções $f(x) = x^3 + 2$ e $g(x) = x^2 - 1$ sobre o intervalo $[1, 2]$ são verdadeiras as condições do Teorema de Cauchy. Pergunta-se: é verdade? Justifique.

12. Afirma-se que para as funções $g(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ sobre o intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ são verdadeiras as condições do Teorema de Cauchy. Pergunta-se: é verdade? Justifique.

13. Afirma-se que para as funções $p(x) = 3x^2 + 3x - 1$ e $q(x) = x^3 - 4x + 2$ sobre o intervalo $[0, 1]$ são verdadeiras as condições do Teorema de Cauchy. Pergunta-se: é verdade? Justifique.

14. Determine o valor da costante a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4$.

15. Determine todos os valores das constantes a e b para que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{a + \cos(bx)} = -8$.

16. Calcule os limites, aplicando a regra de L'Hôpital, quando possível:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\ln(1+x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2(3x)}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cos\sec x}$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$;
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan(3x)}$;
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(x)}{\operatorname{cotg}(2x)}$;
10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan(3x)}{\tan x}$;
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$;
12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\ln\left(\sin x^2\right)\right]$;
14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{x}\frac{\tan(\pi x)}{2}\right)$;
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\left(\frac{a}{x}\right)\right)$;
16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]$;
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left[(1-\tan x)\sec(2x)\right]$;
18. $\lim\limits_{x\to a}\left[(a^2-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right]$;
19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg}(2x)}{\operatorname{cotg}(3x)}$;
20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$;
21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$;
22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;
23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$;
24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$;
25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$;
26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-4}{x^2}-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)$;
27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}\right)$;
28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{x^2}$;
29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^x$;
30. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;
31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\operatorname{cotg}(x)}$;
32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;
33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+2x\right)^{4x}$;
34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\ln x}$;
35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$;
36. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)$;
37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;
38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$;
39. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$;
40. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;
41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$;
42. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;
43. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$;
44. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{cotg}\left(x\right)\right)^{\tan x}\right]$;
45. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^{-2}}-1}{2\arctan(x^2)-\pi}$;
46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}$;
47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}}{x^2}$;
48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+1)^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}\right)$;
49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-1}\right)$;
50. $\lim\limits_{x\to 4}\left(x-3\right)^{\frac{2x}{x-4}}$;

51. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{2e^x-2}$;

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$;

54. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{2x}{1-x^2}}$;

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]^{x^{-1}}$;

56. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-\frac{x-2}{\tan(x-2)}-\cos\left(x-2\right)\right)$;

57. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\operatorname{cotg}(x)}{x^2}$;

58. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-5}{5-|x|}$;

59. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x^2+4}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{3\tan^3 x\cos x}$;

61. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+1\right)^{x^{-2}}$;

62. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+5}{|x|-5}$;

63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin x)}$;

64. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x}{a-\sqrt{ax}}$;

65. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\ln x}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+x)^x-3^x}{ax^2}$;

67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$;

68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2\left(x\right)\right)$;

69. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$;

70. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+\ln x}{\operatorname{cotg}(x)}$;

71. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$;

Capítulo 5

Análise da Variação das Funções

Objetivos

- Determinar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função;
- Encontrar os pontos críticos;
- Determinar os intervalos em que uma função é côncava e/ou convexa;
- Obter os pontos de inflexão;
- Encontrar os máximos e mínimos relativos;
- Analisar os máximos e mínimos de uma função mediante o teste (ou critério) da primeira derivada;
- Analisar os máximos e mínimos de uma função mediante o teste (ou critério) da segunda derivada;
- Determinar as assíntotas do gráfico de uma função;
- Construir gráficos de funções;
- Aplicar a teoria de máximos e mínimos das funções na resolução de problemas;
- Analisar o gráfico de uma função (máximos e mínimos relativos e absolutos, pontos críticos, pontos de inflexão, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, assíntotas).

5.1 Introdução

O aspecto quantitativo no estudo dos fenômenos da natureza se resume em estabelecer e analisar a dependência funcional entre as grandezas variáveis que tomam parte em cada fenômeno. Se conseguirmos estabelecer esta dependência funcional de modo analítico, isto é, mediante uma ou várias fórmulas, podemos explorar esta dependência servindo-nos dos métodos de análise matemática.

O nosso objetivo é estabelecer um método geral para a análise da variação de funções de uma variável real e construção do seu gráfico.

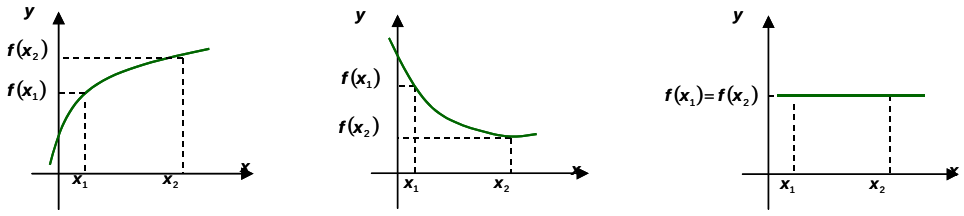
5.2 Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 1: Seja f uma função definida num intervalo I e sejam x_1, $x_2 \in I$.

(i) f é *crescente* em I se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

(ii) f é *decrescente* em I se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

(iii) f é *constante* em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.



f crescente $\qquad$ f decrescente $\qquad$ f constante

Se uma função é só crescente ou só decrescente num intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Com o auxílio do estudo das derivadas podemos aprimorar este conceito de função crescente, decrescente ou nula. O próximo teorema esta baseado no teorema do Valor Médio.

Teorema 1: Seja f uma função contínua sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b).

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$;

(iii) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é constante em $[a, b]$.

Demonstração:

Sejam $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ *com* $x_1 < x_2$. *Como* f *é contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b), *então* f *é contínua em* $[x_1,x_2]$ *e derivável em* (x_1,x_2), *pois* $[x_1,x_2] \subset [a,b]$. *Pelo Teorema do valor médio,* $\exists c \in (x_1,x_2)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Observe que $x_2 - x_1 > 0$, *então:*

(i) *Se* $f'(c) > 0$, *então* $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

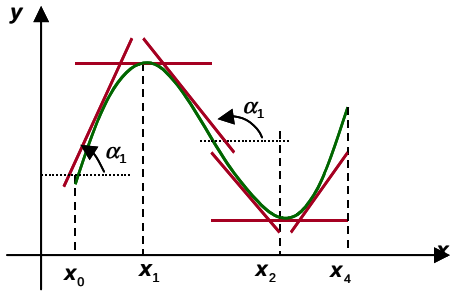
Logo, pela definição 1, f *é crescente em* $[a,b]$.

(ii) *Se* $f'(c) < 0$, *então* $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Portanto, pela definição 1, f *é decrescente em* $[a,b]$.

(iii) *Se* $f'(c) = 0$, *então* $f(x_2) = f(x_1)$. *Dessa forma, pela definição 1,* f *é constante em* $[a,b]$.

Geometricamente, no(s) intervalo(s) em que f é crescente, a incilinação da reta tangente à curva em cada ponto é positiva, pois forma com o eixo x um ângulo agudo α; decrescente, a inclinação da reta tangente à curva em cada ponto é negativa, pois forma com o eixo x um ângulo obtuso α. E ainda, a reta tangente é paralela ao eixo x nos pontos em que a derivada é nula.



Exemplo 1: Determinar os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das funções:

1. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

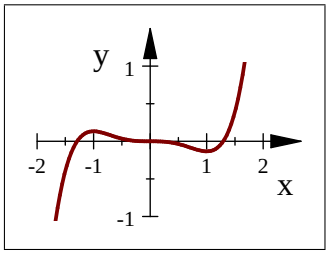
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 1$.

   Os pontos críticos da função são: -1, 0 e 1.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,+\infty)$, pelo teorema anterior, conclui-se que:

   - f é crescente para $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;
   - f é decrescente para $x \in [-1,1]$.

Graficamente, temos que:



2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$;

Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Temos que:

$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow Df' = \mathbb{R} - \{-2\}$.

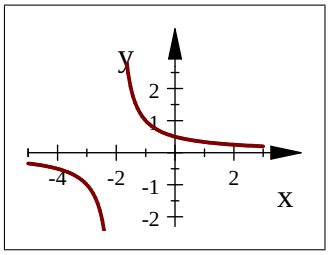
Observe que f' não existe em $x = -2$. Assim,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$ *Absurdo!*

Temos que, f' não existe em $x = -2$. Como $-2 \notin Df$, não pode ser considerado um ponto crítico. Apesar disso, devemos considerá-lo na análise do sinal da derivada.

Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(-2, +\infty)$, conclui-se que f é decrescente para $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Graficamente, temos que:



3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

Solução: O domínio da função f é: $Df = [-1, 1]$.

Temos que:

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow Df' = (-1, 1)$.

Note que f' não está definida em $x = \pm 1$. Assim,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$.

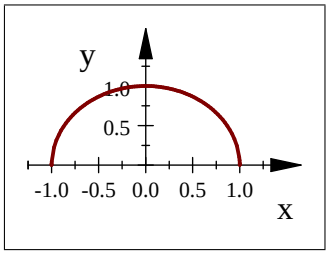
Logo, o único ponto crítico da função é em $x = 0$. Observe que f' não está definida para $x = \pm 1$, mas como -1 e 1 não pertencem ao Df não são pontos críticos.

Analisando o sinal da derivada somente nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, pois fazem parte do domínio da função, conclui-se que:

- f é crescente para $x \in (-1, 0]$;

- f é decrescente para $x \in [0, 1)$.

Graficamente, confirma-se a conclusão acima.



4. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, \text{ se } x \leq 1 \\ -x - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \begin{cases} 4x, \text{ se } x < 1 \\ -1, \text{ se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow Df' = \mathbb{R} - \{1\}$.

- Para $x < 1$, temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$.

O único ponto crítico, neste intervalo, é 0.

Analisando o sinal da derivada somente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, conclui-se que:

- f é crescente para $x \in [0, 1]$;
- f é decrescente para $x \in (-\infty, 0]$.

- Para $x > 1$, temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$ *Absurdo!!!*

Logo, não há ponto crítico neste intervalo.

Como $f'(x) = -1 < 0$ para todo $x > 1$, então f é decrescente para todo $x \in (1, +\infty)$.

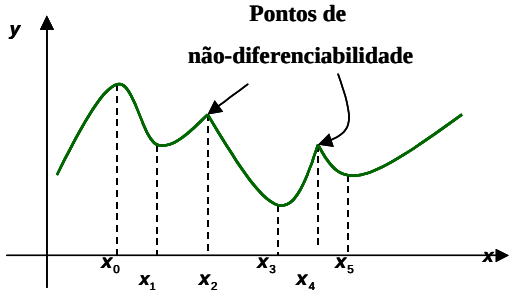
Conclusão:

- f é crescente para $x \in [0, 1]$;
- f é decrescente para $x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

Observação: Como uma função $f(x)$ pode ter valor extremo num ponto no qual a abscissa x não pertença ao seu campo de definição, embora esta abscissa não possa ser considerada como um *valor crítico*, ao estabelecer os intervalos para a análise do crescimento e decrescimento da função $y = f(x)$ estes valores devem ser considerados, pois são extremos destes intervalos. Nos itens 2 e 3, do exemplo 1, esta consideração foi feita.

5.3 Critérios para determinação os extremos de uma função

Os extremos relativos podem ser vistos como pontos de transição, separando regiões onde o gráfico é crescente ou decrescente. Conforme a figura abaixo, os extremos relativos de uma função contínua ocorrem ou em bicos (pontos de não-diferenciabilidade) ou em pontos em que a reta tangente é horizontal.



Os pontos extremos relativos de uma função, se houver, ocorrem em pontos críticos em que f' muda de sinal.

A seguir, veremos alguns teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

Critério da derivada primeira para determinação dos extremos

Teorema 2 (Teste da primeira derivada): Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem máximo relativo em c;

ii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem mínimo relativo em c;

iii. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

iv. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

Demonstração do caso (i):
Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$, então f é crescente em $[a, c]$ (por teorema da seção anterior). Analogamente, concluímos que f é decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b), então f tem um máximo relativo em c.

A demonstração dos casos (ii), (iii) e (iv) é semilar a do caso(i).

Podemos concluir deste teorema que: se ao passar pelo ponto crítico da esquerda para a direita o sinal da primeira derivada muda de mais (+) para menos (-) então, em a função tem um valor máximo e se muda de menos (-) para mais (+) então, em a função tem valor mínimo.

Exemplo 2: Determine os valores extremos da função, se existirem:

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

   Logo, os pontos críticos da função são: -2 e 3.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ e $(3, +\infty)$, conclui-se que:

   - $f\,'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$;
   - $f\,'(x) < 0$ para $x \in (-2, 3)$.

   Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

   - Em $x = -2$, a função f tem um ponto de máximo em $P\left(-2, \frac{22}{3}\right)$;
   - Em $x = 3$, a função f tem um ponto de mínimo em $P\left(3, -\frac{15}{2}\right)$.

2. $f(x) = \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = [-1, 1]$.

   Temos que:

   $f'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow Df' = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

   A função f' não está definida em $x = 0$.

   Temos que,

   - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, mas $\pm 1 \notin (-1, 1)$.
   - $f'(x)$ não está definida em $x = 0$.

   Logo, o único ponto cítico ocorre em $x = 0$.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, conclui-se que:

   - $f\,'(x) > 0$ para $x \in (-1, 0)$;
   - $f\,'(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$.

Pelo teste da primeira derivada conclui-se que, em $x = 0$ a função f tem um ponto de máximo em $P(0,1)$.

3. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$;

Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow Df' = \mathbb{R}^*$.

Assim,

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$.
- $f'(x)$ não está definida em $x = 0$

Logo, os pontos críticos da função ocorrem em $x = 0$ e $x = \frac{2}{5}$.

Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$, conclui-se que:

- $f\,'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$;
- $f\,'(x) < 0$ para $x \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$.

Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

- Em $x = 0$, a função f tem um ponto de máximo em $P(0,0)$;
- Em $x = \frac{2}{5}$, a função f tem um ponto de mínimo em $P\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right)$.

4. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$;

Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = (x-1)(x+1)^2(5x-1) \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

Assim,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = \frac{1}{5}$.

Logo, os pontos críticos da função são: ± 1 e $\frac{1}{5}$.

Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ e $(1, +\infty)$, conclui-se que:

- $f\,'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty)$;
- $f\,'(x) < 0$ para $x \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$.

Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

- Em $x = -1$, a função f tem não tem valor máximo nem mínimo;
- Em $x = \frac{1}{5}$, a função f tem um ponto de máximo em $P\left(\frac{1}{5}, \frac{3456}{3125}\right)$;
- Em $x = 1$, a função f tem um ponto de mínimo em $P(1,0)$.

Roteiro para determinar os valores extremos

1^o Passo: Determinar o campo de definição de f;

2^o Passo: Encontar a primeira derivada;

3^o Passo: Determinar os pontos críticos;

4^o Passo: Analisar o sinal de $f'(x)$;

5^o Passo: Aplicar o teste da primeira derivada.

Critério da derivada segunda para determinação dos extremos

Seja $x = c$ um valor crítico do domínio de $f(x)$ tal que $f'(c) = 0$, se existir a segunda derivada $f''(x)$ e se esta é contínua numa vizinhança de $x = c$ podemos então averiguar se $f(c)$ é um valor máximo ou mínimo relativo de $f(x)$ através da segunda derivada, segundo o teorema seguinte:

Teorema 3 (Teste da segunda derivada): Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e se

i. $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

ii. $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Demonstração do caso (i):

Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então, pela definição de derivada segunda, temos que:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Existe um intervalo aberto I contendo, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \forall x \in I.$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Então, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que, e ,

- *se $x \in A \Rightarrow f'(x) > 0$;*
- *se $x \in B \Rightarrow f'(x) < 0$.*

Pelo teste da primeira derivada, conclui-se que f tem um valor máximo relativo em c.

A demonstração de (ii) é análoga.

Observação: Se $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existir, então o teste da segunda derivada é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo, um mínimo ou nem de máximo nem de mínimo em c. Neste caso, para proceder a análise dos máximos e mínimos devemos recorrer ao critério da primeira derivada.

Exemplo 3: Determine os valores extremos de cada função mediante o critério da segunda derivada.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

   Os pontos críticos da função são: -1 e 3.

   $f''(x) = -6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -12 < 0 \\ f''(3) = 12 > 0 \end{cases}$.

   Pelo teste da segunda derivada, conclui-se que:

   - Em $x = -1$, a função f tem um ponto de máximo em $P(-1, 10)$;
   - Em $x = 3$, a função f tem um ponto de mínimo em $P(3, -22)$.

2. $f(x) = 1 - x^4$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = -4x^3 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

   O único ponto crítico da função é o 0.

   $f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$.

   Logo, o teste da segunda derivada é inconclusivo.

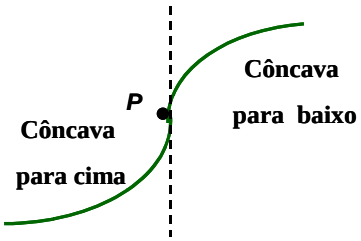
   Neste caso, recorrendo ao critério da derivada primeira, temos que:

   - $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0)$;
   - $f'(x) < 0$ para $x \in (0, +\infty)$.

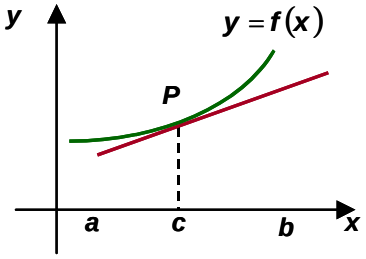
   Conclusão: Pelo teste da primeira derivada, tem-se que em $x = 0$ a função f tem um ponto de máximo em $P(0, 1)$.

5.4 Concavidade

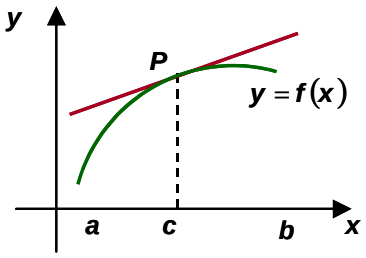
O sinal da derivada de f revele onde o seu gráfico é crescente ou decrescente, ele não revela a direção da curvatura. Por exemplo, na próxima figura, vê-se que ambos os lados do ponto P o gráfico é crescente, mas à esquerda a curvatura está para cima e à direita a curvatura está para baixo. Nos intervalos onde o gráfico de f tem a curvatura para cima dizemos que f é *côncava para cima*, e se a curvatura é para baixo, dizemos que f é *côncava para baixo* naqueles intervalos.



Para funções diferenciáveis,a direção da curva pode ser caracterizada em termos das retas tangentes. Nos intervalos em que f é côncava para cima seu gráfico está acima das retas tangentes. Nos intervalos em que f é côncava para baixo seu gráfico está abaixo das retas tangentes.



f côncava para cima



f côncava para baixo

Definição 2: Seja f for diferenciável num intervalo I então:

i. f é *côncava para cima* se f' for crescente em I;

ii. f é *côncava para baixo* se f' for decrescente em I;

Observação: Por comodidade, um arco côncavo para cima dizemos apenas *côncavo* e um arco côncavo para baixo dizemos apenas *convexo.*

Para obter os intervalos de concavidade e convexidade, isto é, os intervalos em que f'cresce e decresce é através analisando a segunda derivada de f.

Teorema 4: Seja f uma função duas vezes diferanciável em um intervalo aberto $I = (a, b)$. Se:

i. $f''(x_0) > 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de é *côncavo* sobre I;

ii. $f''(x_0) < 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de é *convexo* sobre I.

Demonstração: Omitiremos a demonstração tanto de (i) quanto de (ii), faremos apenas algumas considerações:

1^a *Este teorema nos diz que se em I a segunda derivada é positiva (caso (i)) ou negativa (caso (ii)) exceto em alguns pontos nos quais ela é zero, então a curva $f(x)$ é côncava para o caso (i) ou convexa para o caso (ii).*

2^a *Se ocorrer que $f''(x) = 0$ não só em alguns pontos senão em todo o intervalo I, então $f(x)$ será uma função linear, onde não faz sentido tratar de concavidade e convexidade.*

Exemplo 4: Determine os intervalos de concavidade e/ou convexidade da curva.

1. $f(x) = x^3 - x^2$;

   Solução:

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 2x$;

   $f''(x) = 6x - 2$.

   Assim,

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$.

   Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, conclui-se que:

   - $f''(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo;
   - $f''(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo.

2. $f(x) = e^{-x^2}$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = -2xe^{-x^2}$;

   $f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$.

   Assim,

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x_0^2 - 1\right) \Rightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, conclui-se que:

   - $f''(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;
   - $f''(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo.

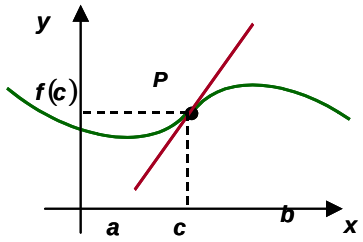
5.5 Pontos de Inflexão

Quando sobre o gráfico de uma função existir um ponto, no qual o sentido de concavidade pode mudar então, a reta tangente atravessa o gráfico neste ponto. Este ponto é chamado *ponto de inflexão*.

Definição 3: Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um *ponto de inflexão*, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das situações ocorra:

i. f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b);

ii. f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).



Estabeleceremos agora uma condição necessária para a existência de pontos de inflexão.

Teorema 5: Seja $f(x)$ uma função diferenciável sobre (a, b) onde $c \in (a, b)$, se $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ e se existe $f''(c)$, então $f''(c) = 0$.

Demonstração:

Do fato de $P(c, f(c))$ ser um ponto de inflexão, existe então um intervalo (a, b) onde $c \in (a, b)$ tal que:

i. *$f'(x)$ é crescente sobre (a, c) e decrescente sobre (c, b), ou*

ii. *$f'(x)$ é decrecente sobre (a, c) e crescente sobre (c, b).*

Do fato que existe $f''(c)$ sabemos que f' será contínua em c e considerendo o caso (i) concluímos que $f'(c)$ é um valor máximo relativo de $f'(x)$ e $f''(c) = 0$.

Agora, considerando o caso (ii) concluímos que $f'(c)$ é um valor mínimo relativo de $f'(x)$ e $f''(c) = 0$.

Estabeleceremos agora uma condição suficiente para a determinação e análise de $f(x)$ quanto aos pontos de inflexão.

Teorema 6: Seja $f(x)$ uma função contínua sobre um conjunto I onde $(a, b) \subseteq I$, se $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existir e se:

i. $f''(x) > 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;

ii. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;

iii. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c, b)$ (ou $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$) então $P(c, f(c))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$.

Demonstração do caso (i):

Como $f''(x) > 0$ para $x \in (a, c)$, pelo teorema 4 (i) o gráfico da curva $f(x)$ é côncavo sobre (a, c) e como $f''(x) < 0$ para $x \in (c, b)$, pelo teorema 4 (ii) o gráfico da curva é convexo sobre (c, b). Assim, o ponto $P(c, f(c))$ onde pela definição 3 é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ sobre (a, b).

A demonstração dos caos (ii) e (iii) é análoga.

Roteiro para determinar os pontos de inflexão do gráfico de f

1^o Passo: Determinar $f''(x)$;

2^o Passo: Determinar c tal que $f''(c) = 0$ e/ou $f''(c)$ não exista;

4^o Passo: Analisar o sinal de $f''(x)$ conforme o teorema 6.

Exemplo 4: Determine os intervalos de concavidade e/ou convexidade bem como os pontos de inflexão da curva.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;

   Solução:

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$;

   $f''(x) = 6x - 12$.

   Determinando os possíveis pontos de inflexão:

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 12 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$.

   Analisando os intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, conclui-se que:

   - $f''(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 2) \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo;
   - $f''(x) > 0$, $\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo.

   Portanto, como há mudança de concavidade em $x = 2$, este ponto é um ponto de inflexão.

2. $f(x) = \ln x$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}_+^*$.

   Temos que:

   $f'(x) = \frac{1}{x}$;

   $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}_+^*$.

   Determinando os possíveis pontos de inflexão:

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$. *Absurdo!*

Como $f''(x_0) = 0$ não ocorre para nenhum valor de x, então o único ponto a ser analisado é o ponto em que f'' não está definida, ou seja, $x = 0$.

Como $f''(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ então o gráfico de f é côncavo.

Portanto, como não há mudança de concavidade em $x = 0$ então não existe ponto de inflexão.

3. $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$;

Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R} - \{1\}$.

Determinando os possíveis pontos de inflexão:

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow -2 = 0$. *Absurdo!*

Como $f''(x_0) = 0$ não ocorre para nenhum valor de x, então o único ponto a ser analisado é o ponto $x = 1$ pois neste ponto f'' não está definida.

Analisando os intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$, conclui-se que:

- $f''(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;
- $f''(x) < 0$, $\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo.

Portanto, como há mudança de concavidade em $x = 1$, o ponto $P(1, 0)$ é um ponto de inflexão.

4. $f(x) = \sin x$;

Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \cos x$;

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}$.

Determinando os possíveis pontos de inflexão:

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

Analisando alguns intervalos, temos que:

$\vdots$

- Se $-2\pi < x < -\pi$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo;
- Se $-\pi < x < 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;
- Se $0 < x < \pi$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo;
- Se $\pi < x < 2\pi \ldots$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;

$\vdots$

Como há mudança de concavidade em $\ldots -\pi,\ 0,\ \pi,\ \ldots$, os pontos $P_1(-\pi, 0)$, $P_2(0,0)$, $P_3(\pi, 0)\ldots$ são pontos de inflexão.

Portanto, cada ponto de f onde $x = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$ é um ponto de inflexão.

5. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+12}$;

Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \frac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$;

$f''(x) = \frac{24x\left(36-x^2\right)}{(x^2+12)^3} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}$.

Determinando os possíveis pontos de inflexão:

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{24x\left(36-x^2\right)}{(x^2+12)^3} = 0 \Rightarrow 24x(36-x^2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 6$.

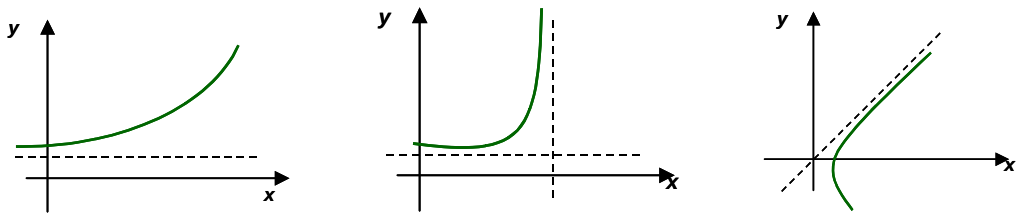
Analisando os intervalos, temos que:

- $\forall x \in (-\infty, -6)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;
- $\forall x \in (-6, 0)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo;
- $\forall x \in (0, 6)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo;
- $\forall x \in (6, +\infty)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é convexo

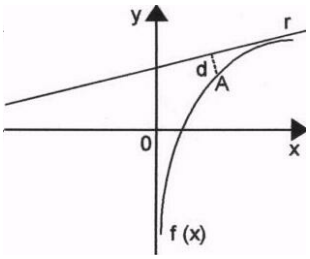
Portanto, como há mudança de concavidade em -6, 0 e 6 os pontos $P_1\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$, $P_2(0,0)$ e $P_3\left(6, \frac{9}{2}\right)$ são pontos de inflexão.

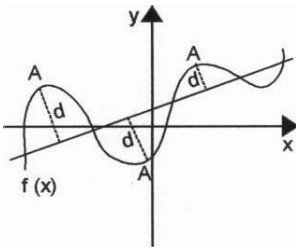
5.6 Assíntotas do gráfico de uma função

Em aplicações práticas, encontramos com muita freqüência gráficos que se aproximam de uma reta à medida que x cresce ou decresce. Essas retas são chamadas de *assíntotas*. Veja alguns exemplos:



Definição 4: Seja $y = f(x)$ uma função, $A(x, f(x)$ um ponto do gráfico de $f(x)$ e r uma reta, quando a distância d entre a reta e o ponto A tende a zero enquanto o ponto A tende ao infinito, esta reta r é dita *assíntota da curva*.





As assíntotas podem ser classificadas como *assíntotas verticais* e *oblíquas*, como veremos a seguir.

5.6.1 Assíntotas Verticais

Definição 5: A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

ii. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

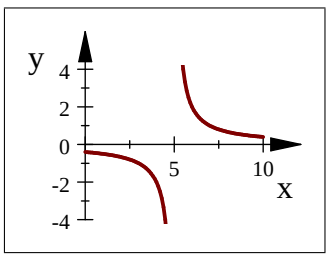
iv. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemplo 4: Determine, se existir(em), as assíntotas verticais de cada função:

1. $f(x) = \frac{2}{x-5}$

   Solução: Geometricamente, observe que:

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty.$$



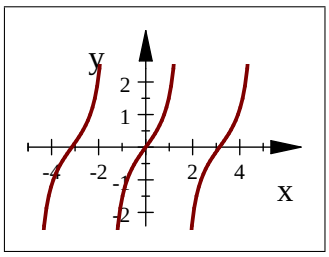
   Portanto, pela definição 5, segue que a reta $x = 5$ é uma assíntota vertical.

2. $f(x) = \tan x$.

   Solução:

As assíntotas verticais da função $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ correspondem as retas $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois nestes pontos $\cos x \neq 0$. Geometricamente, observe que:

$$\lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty.$$



5.6.2 Assíntota Oblíquas

Definição 6: A curva $f(x)$ tem uma *assíntota oblíqua*, cuja equação é da forma $y = kx + b$, onde os valores dos coeficientes k e b, se existirem os limites:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Observações:

i. Se um dos limites acima não existir, então a curva não tem assíntota oblíqua.

ii. Se $k = 0$ e b existir, então a equação da assíntota será $y = b$ e é chamada de *assítota horizontal*.

Exemplo 5: Escreva as equações de todas as assíntotas, em cada caso:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}^*$.

   Candidata a assíntota vertical: $x = 0$.

   Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, pela definição 5, conclui-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical.

   Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

   Verifiquemos se é possível determinar os coeficientes k e b.

   Temos que:

   $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$;

   $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

   Como $k = 0$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = 0$.

   Conclusão:

- assíntota vertical: $x = 0$;
- assíntota horizontal: $y = 0$.

2. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$;

Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}^*$.

Candidata a assíntota vertical: $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, pela definição 5, conclui-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical.

Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

Determinando, se possível, os coeficientes k e b.

Temos que:

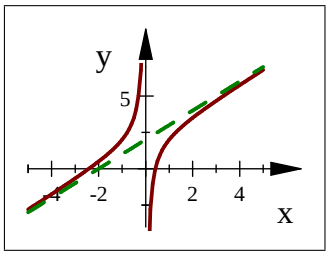
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$.

Como $k = 1$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = x + 2$.

Conclusão:

- assíntota vertical: $x = 0$;
- assíntota oblíqua: $y = x + 2$.



3. $f(x) = e^{-x}\sin x + x$.

Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

Como existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x) = e^{-a}\sin a + a$ entãonão há assíntota vertical, pois não satisfaz as condições da definição 5.

Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

Determinando, se possível, os coeficientes k e b.

Temos que:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\sin x+x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x} \lim\limits_{x\to\infty} \sin x + \lim\limits_{x\to\infty} 1$

$\Rightarrow k = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to\infty} \sin x\right) + 1$

Como a função $\sin x$ é periódica, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ não existe, mas sabemos que $-1 \leq \sin x \leq 1$, ou seja, esta função é limitada. Podemos representar então que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x = \pm m$. Assim, segue que:

- se $x \to +\infty$, então: $k = 1$.
- se $x \to -\infty$, então não existe k, pois $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

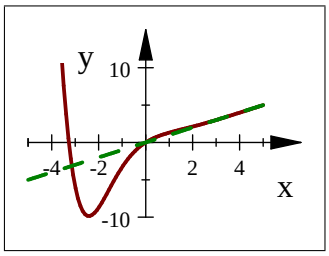
Dessa forma, para $x \to +\infty$, temos que:

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} \sin x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x) = 0.$

Como $k = 1$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = x$.

Conclusão:

- assíntota vertical: $\nexists$;
- assíntota oblíqua: $y = x$.



Esquema Geral Para Analisar Funções e Construir Gráficos

O gráfico de uma função é construído baseado na investigação. Segundo as análises realizadas nos itens anteriores, podemos estabelecer um método prático que o resumimos nos seguintes passos:

1^o Passo: Determinar o campo de definição da função;

2^o Passo: Econtrar os pontos críticos de f;

3^o Passo: Análise dos sinais de f', para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

4^o Passo: Determinar os pontos de máxmos e/ou mínimos, se existirem (*usa-se teste da primeira derivada ou teste da segunda derivada*);

5^o Passo: Calcular os possíveis pontos de inflexão;

6^o Passo: Determinar os intervalos de concavidade, convexidade e pontos de inflexão;

7^o Passo: Determinar as equações de todas as assíntotas;

8^o Passo: Construir o gráfico.

Exemplo 6: Analise e contrua o gráfico de cada uma das funções abaixo:

1. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

Solução: 1) Domínio: $\mathbb{R}$;

2) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Observe que, f' está definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$

3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

- f é crescente $\forall x \in [-1, 1]$;
- f é decrecente $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

- f tem um ponto de mínimo em $P_1\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;
- f tem um ponto de máximo em $P_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^3}$;

Note que, f'' está definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x_0\left(x_0^2-3\right)}{\left(1+x_0^2\right)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 0 \quad \text{ou} \quad x_o = \pm\sqrt{3}.$

6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f é côncava $\forall x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$;
- f é convexa $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

Dessa análise, conclui-se que os pontos $A_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $A_2(0, 0)$ e $A_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ são pontos de inflexão de f.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (4x^3 - x^5 + 1) = 4a^3 - a^5 + 1$

Logo, não há assíntotas verticais.

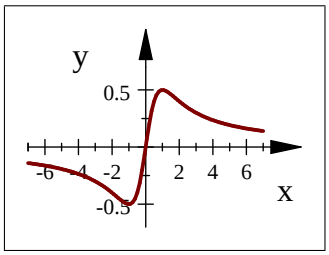
- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0;$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 0x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$

Portanto, $y = 0$ é assíntota oblíqua.

8) Construção do gráfico:



2. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$;

Solução: 1) Domínio: $\mathbb{R}$;

2) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$;

Domínio de f': $Df' = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$ e $x_2 = 4$.

3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

- f é crescente $\forall x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$;
- f é decrecente $\forall x \in [2, 4]$.

4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

- f tem um ponto de máximo em $P_1(2, 13)$;
- f tem um ponto de mínimo em $P_2(4, 9)$.

5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = 6x - 18$;

Domínio de f'': $Df'' = \mathbb{R}$;

$f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x_0 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 3$.

6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f é convexa $\forall x \in (-\infty, 3)$;
- f é côncava $\forall x \in (3, +\infty)$.

Portanto, o pontos $A(3, 11)$ é o ponto de inflexão de f.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^3 - 9a^2 + 24a - 7$.

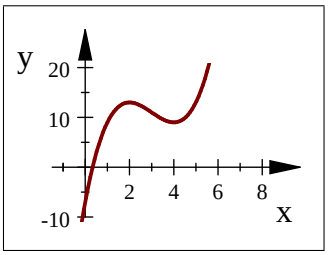
Logo, não há assíntotas verticais.

- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - 9x + 24 - \frac{7}{x}\right) = +\infty$;

Portanto, como não existe k então não há assíntota oblíqua.

8) Construção do gráfico:



3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

1) Domínio: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$;

2) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$.

Observe que, f' não está definida em $x = \pm 1$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Pontos a serem considerados na análise dos sinais de f': $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{3}$.

3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

- f é crescente $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$;
- f é decrecente $\forall x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(-1, \sqrt{3}\right]$.

4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

- f tem um ponto de máximo em $P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$;
- em $x = 0$, f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo;
- f tem um ponto de mínimo em $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Comentário: Observe que, pelo teste da 1^a derivada somos levados a concluir que em $x = \pm 1$, f não tem pontos nem de máximo nem mínimo. Deve-se tomar cuidado com essa conclusão, pois estes pontos cujas abcissas são ± 1 nem fazem parte do domínio da função. Portanto, nem poderiam ser considerados pontos de máximos e/ou mínimos.

5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = \frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$;

Note que, f'' não está definida em $x = \pm 1$.

$$f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x_0\left(9-x_0^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x_0^2-1\right)^7}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 0 \text{ ou } \; x_o = \pm 3.$$

os pontos a serem analisados são: 0, ± 1 e ± 3.

6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f é côncava $\forall x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$;
- f é convexa $\forall x \in (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Logo, os pontos $A_1\left(-3, \frac{3}{2}\right)$, $A_2\left(0, 0\right)$ e $A_3\left(3, \frac{3}{2}\right)$ são pontos de inflexão de f.

Em $x = \pm 1$, apesar do valor da ordenada correspondente não estar definida, pois f não é definida nestes pontos, também há mudança de concavidade. Portanto, também são pontos de inflexão.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais:

As retas candidatas a serem assíntotas verticais são $x = \pm 1$. Verificando se realmente essas retas são assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right) = -\infty \end{cases};$$

$$\lim_{x\to -1} f\left(x\right) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right) = -\infty \end{cases}.$$

Logo, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais.

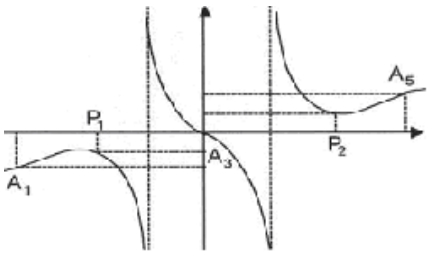
- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0;$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f\left(x\right) - 0x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty.$

Portanto, não é assíntota oblíqua.

8) Construção do gráfico:



5.7 Aplicações da Teoria dos Máximos e Mínimos de Funções na Solução de Problemas

Com o auxílio da teoria dos máximos e mínimos podemos analisar e por conseguinte resolver uma série de problemas referentes a geometria e suas aplicações, sempre que for possível equacionar o fenômeno em estudo, mediante fórmulas matemáticas. Vejamos exemplos nesse sentido.

Exemplo 7: A diferença de dois números é a. Determine esses números para que o seu produto resulte o menor possível.

Solução:

Sejam x e y os números tais que

$$x - y = a \;\Rightarrow\; x = a + y. \qquad (1)$$

Seja P a função produto definida por

$$P = xy. \qquad (2)$$

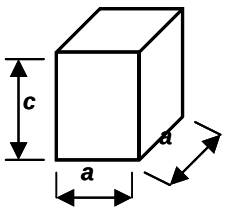
Substituindo (2) em (1), temos que:
$P = (a + y)\, y = y^2 + ay$, com $y \in \mathbb{R}$.
Determinando os pontos críticos:
$P'(y) = 2y + a \Rightarrow \quad P'(y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y + a = 0 \quad \Rightarrow \; y = -\frac{a}{2}$.
Logo, o único ponto crítico é em $y = -\frac{a}{2}$.
Aplicando o teste da segunda derivada: $P''(y) = 2$.
$P''\left(-\frac{a}{2}\right) = 2 < 0$.
Portanto, $y = -\frac{a}{2}$ minimiza o produto.
Substituindo y em (1), conclui-se que:

$$x = \frac{a}{2} \text{ e } y = -\frac{a}{2}.$$

Exemplo 8: Um pacote pode ser enviado pelo reembolso postal desde que a soma de seu comprimento mais o perímetro de sua base não exceda 2 m. Determine as dimensões do pacote de volume máximo que pode ser enviado, se a base é quadrada.

Solução: Sejam

V : volume do pacote (m^3);
a : lado da base (m);
c : comprimento (m).



Objetivo: Determinar as dimensões a e c que minimizam o custo na contrução do tanque.

Sabemos que a soma de seu comprimento mais o perímetro de sua base (que é quadrada) não pode exceder 2 m, ou seja,

$$c + 4a = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2 - 4a. \qquad (1)$$

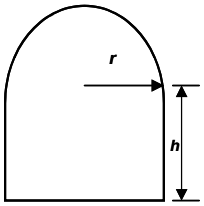
O volume do pacote é
$V = a^2.c \quad \Rightarrow \quad V = a^2(2 - 4a) = 2a^2 - 4a^3$, com $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Determinando os pontos críticos:
$V'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(2 - 4a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{3}$.
Como $0 \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)$, o único ponto crítico é em $a = \frac{1}{3}$.
Aplicando o teste da segunda derivada: $V''(a) = 4a - 12a^2 \quad \Rightarrow V''\left(\frac{1}{3}\right) < 0$.
Portanto, $a = \frac{1}{3}$ maximiza o volume do pacote. Assim, por (1), segue que $c = \frac{2}{3}$.

Exemplo 9: Uma janela consiste de um retângulo com um semicírculo em cima e deve ter um perímetro P. Determine o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.

Solução:

Sejam

P : perímetro da janela;
A : área da janela;
r : raio do semicírculo;
h : altura do retângulo;



Objetivo: Determinar r para que a área da janela seja máxima. Para tanto, devemos determinar r que maximize a área da janela.

A área da janela é

$A =$(área do retângulo) + (área do semicírculo) $\Rightarrow A = 2rh + \frac{\pi r^2}{2}$ (1)

O perímetro da janela é

$P = 2h + 2r + \frac{2\pi r}{2} = 2h + 2r + \pi r \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P - r(2+\pi)}{2}$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos que:

$A = 2r\frac{P-r(2+\pi)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = Pr - \frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 = -\frac{1}{2}r\left(4r - 2P + \pi r\right)$, com $r \in \left[0, \frac{2P}{4+\pi}\right]$.

Como a área é uma função contínua e o intervalo é fechado então existe extremo absoluto neste intervalo.

Determinando os pontos críticos:

$A'(r) = P - \pi r - 4r \Rightarrow \quad V_c'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P - r(4+\pi) = 0 \quad \Rightarrow \; r = \frac{P}{4+\pi}$.

Logo, o único ponto crítico é $r = \frac{P}{4+\pi}$.

Aplicando o teste da segunda derivada: $A''(r) = -\pi - 4$

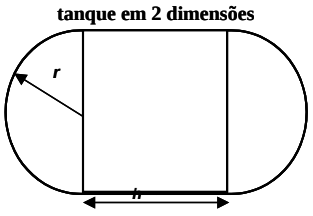
$A''\left(\frac{P}{4+\pi}\right) = -\pi - 4 < 0$.

Portanto, $r = \frac{P}{4+\pi}$ maximiza a área da janela.

Exemplo 10: Deve-se construir um tanque para armazenamento de um gás propano em forma de um cilindro circular reto com dois hemisférios nas extremidades. O custo do metro quadrado dos hemisférios é o dobro do custo da parte cilíndrica. Se a capacidade do tanque deve ser de $12\pi\ m^3$, que dimensões minimizaram o custo da construção?

Solução: Sejam

C : função custo;
r : raio do hemisfério $\equiv$ raio do cilindro;
h : altura do cilindro.



Objetivo: Determinar as dimensões r e h que minimizam o custo na contrução do tanque.

Como o custo está associado com a área lateral, temos que:

$C = 2\,[$área de uma esfera($\equiv$ área de 2 hemisférios)] + (área lateral do cilindro)

$\Rightarrow C = 2\left(4\pi r^2\right) + 2\pi r h = 8\pi r^2 + 2\pi h r.$ (1)

O volume total do tanque é dado por
$V =$ (volume de uma esfera) + (volume de um cilindro)
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$.

Como $V = 12\pi\ m^3$, temos que
$12\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12}{r^2} - \frac{4}{3}r. \qquad (2)$

Substituindo (2) em (1), temos que:
$C = 8\pi r^2 + 2\pi\left(\frac{12}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) r = 24\frac{\pi}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2$, com $r \in (0, +\infty)$.

Determinando os pontos críticos:
$C'(r) = \frac{-24\pi}{r^2} + \frac{32\pi r}{3} \Rightarrow \quad C'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

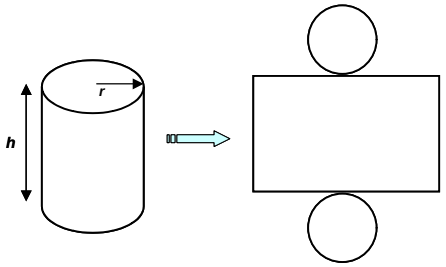
Aplicando o teste da segunda derivada: $C''(r) = \frac{48\pi}{r^3} + \frac{32\pi}{3} \ \Rightarrow\ C''\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right) > 0.$

Portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ minimiza a área da janela. Basta substituir este valor de r (2) para obter h.

Exemplo 11: Dado o volume V de um cilindro, quais devem ser as suas dimensões para que seja mínima a área total?

Solução:
Sejam

P : perímetro da janela;
A : área da janela;
r : raio do semicírculo;
h : altura do retângulo;



Objetivo: Determinar r e h para que a área do cilindro seja mínima.

A área do cilindro é
$A =$(área do retângulo) + (2× área do círculo) $\Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad (1)$
Sabemos que o volume do cilindro é V, assim:
$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad (2)$
Substituindo (2) em (1), temos que:
$A = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$, com $r \in (0, +\infty)$.
Determinando os pontos críticos:
$A'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad A'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$
$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Aplicando o teste da segunda derivada: $A''(r) = 2\left(2\pi + \frac{V}{r^3}\right)$
$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0.$

Portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ maximiza a área da janela.

Logo, as dimensões são

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ e } h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Exemplo 12: A distância percorrida (no vácuo), por um projétil, lançado com uma velocidade v_0 desde uma canhão de artilharia com ângulo de elevação α é dada por $y = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$. Determine α para que y seja máxima.

Solução:

Sabemos que a distância percorrida por um projétil é dada por

$$y = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Consideremos $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Determinando os pontos críticos:

$y'(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g} \Rightarrow y'(\alpha) = 0 \iff \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Aplicando o teste da segunda derivada: $y''(\alpha) = \frac{-4v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v_0^2}{g} < 0$.

Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é o ângulo de elevação cujo alcance será o máximo possível.

Logo, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ temos que $y = \frac{v_0^2}{g}$.

Exemplo 12: Uma estação de rádio fez um levantamento dos hábitos dos ouvintes entre $17hs$ e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as $17hs$ é $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$. Em que instantes, entre $17hs$ e meia-noite, existem *mais e menos* ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes nestes momentos?

Solução:

Objetivo: Determinar x que maximiza e minimiza a função f.

Como a pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as $17hs$ é $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$, temos que $x \in [0, 7]$.

Determinando os valores críticos:

$f'(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 9x + 18) \Rightarrow f\prime(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.

Aplicando o teste da segunda derivada, temos que:

$$f''(x) = -\frac{3}{4}(2x - 9) \Rightarrow \begin{cases} f''(3) > 0 \rightsquigarrow \text{é um ponto de mínimo relativo} \\ f''(6) < 0 \rightsquigarrow \text{é um ponto de máximo relativo} \end{cases}.$$

Como f é uma função conítnua em no intervalo fechado $[0, 7]$, pode ser que os máximos e mínimos estejam nos extremos. Analisando o valor da função nos extremos e nos pontos críticos, temos que:

$f(0) = \frac{240}{8} = 30\%$ $\qquad$ $f(6) = \frac{33}{2} = 16.5\%$

$f(3) = \frac{105}{8} = 13.125\%$ $\qquad$ $f(7) = \frac{121}{8} = 15.125\%$

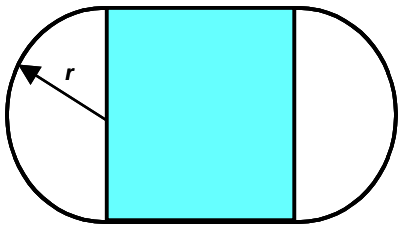
Conclusão:

- Às $17hs$ ($x = 0$), o maior número de adultos está sintonizado na rádio; corresponde a 30% dos ouvintes.
- Às $20hs$ ($x = 3$), o menor número de adultos está sintonizado na rádio; corresponde a 13% dos ouvintes.

33. Determine as dimensões de um cilindro reto de volume $V\ cm^3$, inscrito em uma esfera de raio R, afim de que tenha seu volume o maior possível.

34. Um campo retangular está limitado por uma cerca em três de seus lados e por um córrego reto no quarto lado. Determine as dimensões do campo com área máxima que pode ser cercado com $1.000\ m$ de cerca.

35. Uma pista de atletismo com comprimento total $400m$, consiste em 2 semi-círculos e dois segmentos retos, conforme a figura abaixo. Determine as dimensões da pista de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.



36. Uma folha de papelão quadrada com $16\ cm^2$ é usada para fazer uma caixa aberta, retirando quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados que resulta na caixa com o maior volume possível?

37. Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de $900m$ de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, $3000m$ rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de $R\$5,00$ por metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa $R\$4,00$ o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

38. Quando um pessoa tosse, o raio da traquéia diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Se r_0 é o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traquéia é dada por uma função da forma $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o raio para o qual a velocidade do ar é máxima.

39. Cinqüenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos t anos, a população x desses animais é estimada por $x(t) = 50\frac{t^2+6t+30}{t^2+30}$. Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

40. Uma pesquisa de opinião revela que x meses após anunciar sua candidatura, certo político terá o apoio de $S(x) = \frac{1}{29}(-x^2 + 6x^2 + 63x + 1080)$ % de eleitores, sendo $0 \leq x \leq 12$. Se a eleição estiver marcada para novembro, qual o melhor mês para anunciar a candidatura? Se o político necessita de pelo menos 50% dos votos para vencer, quais são as chances de ser eleito?

41. Considere um trapézio isósceles de área A. Sabendo que α é com um ângulo da base, determine a medida da lateral l para que o perímetro seja mínimo.

42. Determine o volume máximo de um cilindro circular reto que pode ser inscrito em um cone de $12cm$ de altura e $4cm$ de raio da base, se os eixos do cilindro e da base coincidem.

43. Um cilindro circular reto pode ser inscrito numa esfera com raio R. Determine a relação entre a altura e o raio da base do cilindro cuja área de superfície lateral seja máxima.

44. Quando um resistor de R $ohms$ é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E $volts$ e uma resistência de r $ohms$, uma corrente de I $ampères$ atravessa o circuito e dissipa uma potência de P $watts$, sendo $I = \frac{E}{r+R}$ e $P = I^2R$. Supondo que r seja constante, qual o valor de R para o qual a potência dissipada é máxima?

Capítulo 6

Integral Indefinida

Objetivos

- Determinar a primitiva de uma função, mediante a definição;
- Interpretar geometricamente a integral indefinida;
- Aplicar as propriedades relativas à integral indefinida;
- Resolver integrais através de integração imediata;
- Resolver integrais pelo método da integração por partes;
- Resolver integrais de funções trigonométricas;
- Resolver integrais elementares que contém um trinômio quadrado;
- Resolver integrais por substituições trigonométricas;
- Resolver integrais por decomposição em frações parciais.

6.1 Introdução

O estudo desenvolvido neste capítulo visa o problema inverso ao que desenvolvemos no capítulo 3, ou seja, agora será dada uma função e deveremos calcular uma outra função, cuja derivada é igual à função dada. Neste sentido, serão apresentados os métodos mais comuns para que isto possa ser alcançado. Para tanto, precisamos do conceito de primitiva de uma função.

Definição 1: Uma função $F(x)$ é chamada de *primitiva* ou *antiderivada* da função $f(x)$ em um intervalo I se

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Exemplo 1:

(i) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$;

(ii) $F(x) = \cos x$ é uma primitiva de $f(x) = -\sin x$;

(iii) $F(x) = e^{-x}$ é uma primitiva de $f(x) = -e^{-x}$.

Observação 1: Em qualquer um dos exemplos acima podemos perceber que se acrescentarmos uma constante qualquer na função $F(x)$ sua derivada continuará sendo igual a função dada, isto é, ela continuará sendo uma primitiva.

Vejamos algumas proposições neste sentido.

Proposição 1: Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Demonstração: Como $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, pela definição, $F'(x) = f(x)$.

Assim, $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.

Portanto, G é uma primitiva de f.

O teorema 1 nos garantem que para uma função contínua dada não existe uma única primitiva, mas sim, uma infinidade delas.

Proposição 2: Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos do intervalo I, então f é constante em I.

Demonstração: Sejam x, $y \in I$, com $x < y$.

Como f é diferenciável em I, então f é contínua em $[x, y]$ e diferenciável em (x, y).

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Por hipótese, $f'(c) = 0$*, pois* $c \in I$*. Assim, segue que*

$$f(y) - f(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(y) = f(x).$$

Sendo x *e* y *dois pontos quaisquer de* I*, concluímos que* f *é constante em* I*.*

Proposição 3: Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções pimitivas de f no intervalo I, então existe uma constante c tal que $F(x) - G(x) = c$.

Demonstração: Seja $H(x) = F(x) - G(x)$*.*
Como $F(x)$ *e* $G(x)$ *são primitivas de* $f(x)$ *em* I*, então* $F'(x) = G'(x) = f(x)$*,* $\forall x \in I$*. Logo,* $H(x)$ *é derivável em* I *e*

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Pela proposição 2, segue que, existe uma constante c*, tal que* $H(x) = c$*, ou seja,*

$$F(x) - G(x) = c \;\Rightarrow\; F(x) = G(x) + c.$$

Dos teoremas acima podemos escrever que tendo-se determinado uma primitiva $F(x)$ obtém-se outra primitiva qualquer da função dada, somando-se a $F(x)$ uma constante c e a expressão $F(x) + c$ representa o conjunto de todas as funções primitivas para a função $f(x)$ dada.

Com isto podemos estabelecer a definição de integral indefinida.

Definição 2: Se $F(x)$ é a primitiva ou antiderivada de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é definida como sendo a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Na igualdade estabelecida na definição 2, temos que:

- o símbolo $\int$ é chamado sinal de integração;
- $f(x)$ é dita função subintegral ou integrando;
- a expressão $f(x)dx$ é dita elemento de integração;
- a função $F(x)$ é dita, parte funcional da integral indefinida;
- o número c é dito, constante arbitrária da integral indefinida.

Observações 2:

i. A integral indefinida é também conhecida como anti-diferencial.

ii. Na notação da definição 2, o termo dx não tem significado próprio, somente a expressão completa $\int f(x)\,dx = F(x)$ tem sentido.

iii. Quando queremos obter todas as primitivas de uma função $f(x)$ dada, escrevemos $\int f(x)\,dx$.

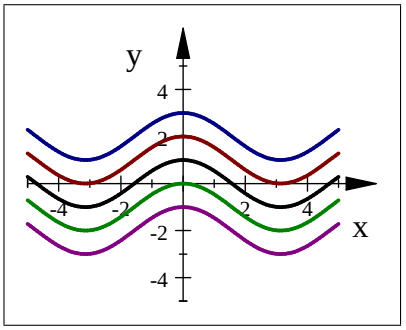
Exemplo 2:

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$;
2. $\int \cos x dx = \sin x + c$;
3. $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$.

Interpretação Geométrica

A integral indefinida, geometricamente, representa uma família de curvas e se obtém cada uma delas mediante o deslocamento de uma curva paralela a si mesma ao longo do eixo das ordenadas. Os gráficos dessa família das primitivas (ou antiderivadas) de f são chamados de *curvas integrais*.

Exemplo 3: O gráfico a seguir representa uma família de curvas da função integrando $f(x) = \cos x$. As curvas integrais abaixo figura apresentada assumiu os valores $c = -2, 1, 0, 1, 2$.



6.2 Propriedades da Integral Indefinida

Proposição 4: Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ e c uma constante qualquer. Então:

i. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$;

ii. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Demonstração:

i. *Como $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ então $cF(x)$ é primitiva de $cf(x)$. Assim, temos que:*

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + k = cF(x) + ck_1 = c(F(x) + k_1) = c\int f(x)\,dx.$$

ii. *Provaremos para a soma, a demonstração para a diferença é análoga.*

Sejam $F(x)$ *e* $G(x)$ *as primitivas das funções* $f(x)$ *e* $g(x)$.
Definindo $H(x) = F(x) + G(x)$ *e* $h(x) = f(x) + g(x)$, *temos que:*
$H'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = h(x)$.
Assim,
$\int h(x)\,dx = H(x) + c = F(x) + G(x) + c_1 + c_2 =$
$= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Observação 3: A proposição (ii) é válida para um número finito de funções, isto é, a integral da soma é igual a soma de integrais.

Resumiremos a seguir algumas propriedades da integral indefinida, cujas demonstrações serão omitidas aqui:

i. $\int d(F(x)) = F(x) + c$, onde $d(F(x))$ representa é a diferencial da função $F(x)$;

ii. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

iii. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;

iv. $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$, onde a é uma constante;

v. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c$, onde b é uma constante;

vi. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$, onde a e b são constantes.

Através das derivadas das funções elementares é possível obter uma tabela de integrais, chamadas de integrais imediatas.

6.3 Tabela de Integrais Imediatas

1. $\int du = u + c$;
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq 1$;
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$;
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
5. $\int e^u du = e^u + c$;
6. $\int \sin u du = -\cos u + c$;
7. $\int \cos u du = \sin u + c$;
8. $\int \mathrm{tg}(u)\,du = \ln|\sec u| + c$;
9. $\int \mathrm{cotg}(u)\,du = \ln|\sin u| + c$;

10. $\int \sec u du = \ln|\sec u + \text{tg}\,(u)| + c$;
11. $\int \text{cossec}(u)\, du = \ln|\text{cossec}\,(u) - \text{cotg}\,(u)| + c$;
12. $\int \sec u.\text{tg}(u)\, du = \sec u + c$;
13. $\int \text{cossec}(u)\,.\text{cotg}(u)\, du = -\text{cossec}(u) + c$;
14. $\int \sec^2 u du = \text{tg}(u) + c$;
15. $\int \text{cossec}^2\,(u)\, du = -\text{cotg}(u) + c$;
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + c$;
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$, $u^2 > a^2$;
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$;
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$;
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + c$;
21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + c$;

A verificação destas integrais pode ser feita segundo a propriedade (ii) *(do resumo de propriedades)*. Vejamos algumas como exemplo.

Exemplo 4:

1. $\int \text{tg}(x)\, dx = \ln|\sec x| + c$;
   Solução: Derivando ambos os lados, temos que:
   $\left(\int \text{tg}\,(x)\, dx\right)' = \text{tg}(x)$;
   $(\ln|\sec x| + c)' = \frac{\sec x.\text{tg}(x)}{\sec x} = \text{tg}(x)$.
   Portanto, vale a integral acima.

2. $\int \frac{du}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$.
   Solução: Derivando ambos os lados, temos que:
   $\left(\int \frac{du}{x^2-a^2}\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$;
   $\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c\right)' = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)' + (c)'$
   $= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{x^2-a^2}$.
   Portanto, vale a integral acima.

Vejamos agora, alguns exemplos usando a tabela e as propriedades.

Exemplo 5: Resolva as integrais indefinidas:

1. $\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$;

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx &= \int 2x^3 dx - \int 3\sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx \\ &= 2\int x^3 dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \tfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

2. $\int \frac{x^4 + 3x^{-\frac{1}{2}} + x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$;

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^4 - 5x^{-\frac{1}{2}} + x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int 3x^{\frac{7}{2}} dx + \int \frac{-5}{x} dx + \int x^{\frac{1}{8}} dx \\ &= 3\int x^{\frac{7}{2}} dx - 5\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{1}{8}} dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{\frac{9}{2}} - 5\ln x + \tfrac{8}{9}x^{\frac{9}{8}} + c.\end{aligned}$$

3. $\int \left(2e^x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{x^7}\right) dx$.

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

$$\begin{aligned}\int \left(2e^x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{x^7}\right) dx &= 2\int e^x dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} dx + 3\int x^{-7} dx \\ &= 2e^x - \int \mathrm{tg}(x)\sec x dx + 3\frac{x^{-6}}{-6} + c \\ &= 2e^x - \sec x - \tfrac{1}{2x^6} + c.\end{aligned}$$

6.4 Técnicas de Integração

Com o objetivo de usar alguma das integrais imediatas, faz-se necessário utilizar alguns métodos para transformar a integral dada em uma integral conhecida. A seguir, estudaremos alguns métodos de integração que irão nos auxiliar neste procedimento.

6.4.1 Integração Por Substituição

O *método da substituição*, também conhecido como troca de variáveis, pode ser motivado examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antiderivação. Com este propósito, suponha que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferenciável. Pela regra da cadeia, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left[F\left(g\left(x\right)\right)\right] = F'\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right).$$

Integrando com relação a x a expressão acima, temos que:

$$\int \frac{d}{dx}\left[F\left(g\left(x\right)\right)\right]dx = F\left(g\left(x\right)\right) + c \;\Rightarrow \int F'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right) + c.$$

Como $F\left(x\right)$ é primitiva de $f\left(x\right)$, temos que:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right) + c.$$

Definindo $u = g\left(x\right)$. Então $u' = g'\left(x\right)dx$. Dessa forma,

$$\int f\left(u\right)du = F\left(u\right) + c.$$

Exemplo 6: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \sqrt{2x-1}dx$;

   Solução: Definindo $u = 2x - 1$. Então $du = 2dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{2x-1}\frac{2}{2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$

   $= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c.$

   Voltando para a variável x, obtemos que:

   $\int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{3}\left(2x-1\right)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{\left(2x-1\right)^3} + c.$

2. $\int \frac{3x}{x^2+1}dx$;

   Solução: Definindo $u = x^2 + 1$. Então $du = 2xdx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln\left|u\right| + c.$

   Retornando para a variável x, obtemos que:

   $\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$

Este método é um dos mais importantes para o cálculo de integrais indefinidas. O sucesso desta integração depende da habilidade para escolher a substituição adequada. A seguir, apresentamos um roteiro para realizar o integração, usando o método da substituição.

Roteiro para integração por substituição

Passo 1: Escolha $u = g\left(x\right)$;

Passo 2: Calcule $\frac{du}{dx} = g'\left(x\right)$;

Passo 3: Substitua $u = g\left(x\right)$ e $du = g'\left(x\right)dx$;

Passo 4: Calcule a integral resultante;

Passo 5: Substitua u por $g(x)$ novamente.

Exemplo 7: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \frac{2x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx$;

   Solução: Definindo $u = 7 - 2x^5$. Então $du = -10x^4dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx = -\frac{2}{10}\int \frac{-10x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$

   $= -\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{3}{10}u^{\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{10}(7-2x^5)^{\frac{2}{3}} + c.$

2. $\int \frac{x^3dx}{e^{2x^4}}$;

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

   $\int \frac{x^3dx}{e^{2x^4}} = \int x^3e^{-2x^4}dx$

   Definindo $u = -2x^4$. Então, $du = -8x^3dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int x^3e^{-2x^4}dx = -\frac{1}{8}\int e^{-2x^4}(-8x^3)\,dx = -\frac{1}{8}\int e^u du$

   $= -\frac{1}{8}e^u + c = -\frac{1}{8}e^{-2x^4} + c.$

3. $\int \sin^2(3x+5)\cos(3x+5)\,dx$;

   Solução: Definindo $u = \sin(3x+5)$. Então, $du = 3\cos(3x+5)\,dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int \sin^2(3x+5)\cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\int u^2du$

   $= \frac{1}{9}u^3 + c = \frac{1}{9}\sin^3(3x+5) + c.$

4. $\int \frac{x\sqrt{1+\mathrm{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)}dx$

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

   $\int \frac{x\sqrt{1+\mathrm{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)}dx = \int x\mathrm{cossec}^2(x^2+1)\sqrt{1+\mathrm{cotg}(x^2+1)}dx$

   Definindo $u = 1+\mathrm{cotg}(x^2+1)$. Então $du = -2x\mathrm{cossec}^2(x^2+1)\,dx$

   Pelo método da substituição, temos que:

   $\int \frac{x\sqrt{1+\mathrm{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du =$

   $= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}(1+\mathrm{cotg}(x^2+1))^{\frac{3}{2}} + c.$

Observação 4: Se diz *Integração por Decomposição*, ao método por meio do qual a integral dada se apresenta em forma de soma de integrais.

Exemplo 7: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \frac{4x+2}{2x-1}dx$;

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:
   $\int \frac{4x+2}{2x-1}dx = \int \left(2 + \frac{4}{2x-1}\right)dx = 2\int dx + 4\int \frac{dx}{2x-1}$
   Definindo $u = 2x-1$. Então $du = 2dx$. Dessa forma,
   $\int \frac{4x+2}{2x-1}dx = 2\int dx + 2\int \frac{du}{u} = 2x + 2\ln|u| + c$
   $= 2x + 2\ln|2x-1| + c$.

2. $\int 3^x \left(\sin\left(3^x\right) + \cos\left(3^x\right)\right)dx$.

   Solução: Definindo $u = 3^x$, temos que $du = 3^x \ln 3 dx$. Assim,
   $\int 3^x \left(\sin\left(3^x\right) + \cos\left(3^x\right)\right)dx = \frac{1}{\ln 3}\int \left(\sin\left(3^x\right) + \cos\left(3^x\right)\right)3^x \ln 3 dx$
   $= \frac{1}{\ln 3}\int (\sin u + \cos u)\, du = \frac{1}{\ln 3}\int \sin u du + \frac{1}{\ln 3}\int \cos u du$
   $= \frac{1}{\ln 3}\sin\left(3^x\right) - \frac{1}{\ln 3}\cos\left(3^x\right) + c$

6.4.2 Integração Por Partes

A técnica de integração por partes é a formulação antiderivada da fórmula para diferenciação do produto de duas funções.

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis, então pela regra do produto, temos que:

$$\frac{d}{dx}\left[\, u(x).v(x)\right] = u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x).$$

Integrando com relação a x, temos que:
$\int \frac{d}{dx}\left[\, u(x).v(x)\right]dx = \int u(x)\, v'(x)\, dx + \int v(x)\, u'(x)\, dx$
$\Rightarrow u(x).v(x) = \int u(x)\, v'(x)\, dx + \int v(x)\, u'(x)\, dx$
$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx.$
Da definição de diferenciais, lembre que

$$dv = v'(x)\, dx \text{ e } du = u'(x)\, dx.$$

Assim,

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

é chamada de *fórmula de integração por partes.*

Exemplo 8: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \ln x dx$;

   Solução: Escolhendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$.

   Pela integração por partes, temos que:
   $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$

   Observação 5: No exemplo acima, quando calculamos a função v, desprezamos a constante k, isto é:
   $$\int dv = \int dx \;\Rightarrow\; v = x + k,$$
   uma vez que interessa somente uma função primitiva e não o conjunto todo. Neste caso é comum dizer que escolhemos a constante $k = 0$.

2. $\int x \sin x dx$;

   Solução: Definindo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$.

   Pela integração por partes, temos que:
   $\int x \sin x dx = x \cos x + \int \cos x dx = \sin x + x \cos x + c.$

3. $\int \arcsin x dx$;

   Solução: Definindo $\begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$.

   Pela integração por partes, temos que:
   $\int x \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

   Por substituição trigonométrica, fazendo $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, temos que:
   $$\begin{aligned} \int x \arcsin x dx &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= x \arcsin x + \sqrt{u} + c \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \end{aligned}$$

4. $\int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$

   Solução: Definindo
   $$\begin{cases} u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \;\Rightarrow\; v = \sqrt{1+x^2} \end{cases},$$

   Pela integração por partes, temos que:
   $$\begin{aligned} \int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \sqrt{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + c. \end{aligned}$$

O problema na integração por partes está em saber qual a expressão subintegral que se toma como u e qual a que se toma por dv. Recomenda-se substituir por dv aquela diferencial para a qual é conhecida a integral ou então, que seja fácil de se calcular.

Há casos em que se pode tomar como dv qualquer uma das funções da expressão subintegral. No entanto, é bom lembrar que, a difenrenciação em uma série de casos, simplifica a expressão, isto é, as derivadas de algumas funções transcendentes são algébricas, é o caso das funções logarítmicas e das funções circulares inversas.

Portanto, nas integrais do tipo:

1^o Caso: $\int p(x)\,(\text{função transcendental})\,dx$, onde é um polinômio real em x, para realizar a integração por partes, é necessário fazer a seguinte escolha

$$\begin{cases} u = \text{função transcendental} \\ dv = p(x)\,dx \end{cases}.$$

2^o Caso: $\int p(x)\,(\text{função circular})\,dx$, onde é um polinômio real em x, para aplicar o método da integração por partes, definimos

$$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = (\text{função circular }) dx \end{cases}.$$

Nestes dois casos, as funções transcendente ou as funçoes circulares têm derivadas não algébrica.

Exemplo 9: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int e^x \cos x dx$;

   Solução: Neste caso, as duas funções da expressão subintegral são transcendentes cujas derivadas não são algébricas.

   Escolhendo $\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$.

   Pela integração por partes, temos que:

   $$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{(I)} \qquad (*)$$

   Para resolver a integral (I) devemos aplicar novamente a integração por partes.

   Definindo $\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$.

   Substituindo em $(*)$, temos que:

   $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right)$

   $\Rightarrow 2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + k$

$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c.$

Neste exemplo, podemos notar que, ao aplicarmos pela segunda vez a integração por partes, o método nos levou a uma igualdade com a integral dada, o que possibilitou a sua resolução. Poderíamos, no início, ter escolhido qualquer uma das funções subintegrais como u e o resultado se manteria.

2. $\int xe^{5x}dx$;

Solução: Definindo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{5x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x} \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$\int xe^{5x}dx = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} + c.$

3. $\int x \arcsin x dx$;

Solução: Definindo $\begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-x^2+\mathbf{1}-\mathbf{1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\underbrace{\int \sqrt{1-x^2}dx}_{(I)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Resolvendo, por prtes, a integral (I): $\begin{cases} u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+\mathbf{1}-\mathbf{1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \qquad (2)$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right) - \frac{1}{2}\arcsin x + c \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{2(\ln x)^4 + \frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx$

Solução: Definindo $u = \ln x$, temos que $x = e^u$ e $dx = e^u du$.

Assim, pelo método da substituição, temos que:

$$\int \frac{2(\ln x)^4+\frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx = \int \frac{2(\ln x)^4+5(\ln x)^2}{7(\ln x)^2} = \int \frac{2u^4+5u^2}{7u^2}e^u du = \int \left(\frac{2}{7}u^2+\frac{5}{7}\right)e^u du$$

$$= \frac{2}{7}\underbrace{\int u^2 e^u du}_{(I)} + \frac{5}{7}\int e^u du \qquad (1)$$

Resolvendo a integral (I):

Definindo

$$\begin{cases} t = u^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2udu \\ \int dv = \int e^u du \ \Rightarrow \quad v = e^u \end{cases},$$

pela integração por partes, temos que:

$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - 2\int ue^u du$

Definindo

$$\begin{cases} w = u \quad \Rightarrow \quad dw = du \\ \int dv = \int e^u du \ \Rightarrow \quad v = e^u \end{cases},$$

e, novamente, usando a integração por partes, temos que:

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - 2\left(ue^u - \int e^u du\right) = 2e^u + u^2 e^u - 2ue^u \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\int \frac{2(\ln x)^4+\frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx = \frac{9}{7}e^u + \frac{2}{7}u^2 e^u - \frac{4}{7}ue^u + c$$

$$= \frac{2}{7}x\ln^2 x - \frac{4}{7}x\ln x + \frac{9}{7}x + c.$$

6.5 Integração de FunçõesTrigonométricas

6.5.1 Integrais do tipo $\int \sin^n x dx$ e $\int \cos^n x dx$, onde n é um número inteiro ímpar

Com o objetivo de facilitar a utilização do método da substituição na integração, utilizam-se as identidade trigonométrica

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightsquigarrow$ se n for ímpar;
- $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases} \rightsquigarrow$ se n for par.

Exemplo 10:

1. $\int \sin^3 x dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

   $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

   $= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$

2. $\int \sin^2 x dx$;

   Solução: Temos que:

   $\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

   $= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

3. $\int \cos^4 x dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

   $\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx$

   $= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx$

   $= \frac{x}{4} + c_1 + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_2 + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

   $= \frac{x}{4} + c_1 + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_2 + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx$

   $= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$

6.5.2 Integrais do tipo $\int \sin^m x \cos^n x dx$, onde m ou n é um número inteiro positivo ímpar

Neste caso, quando m **ou** n é um número inteiro positivo ímpar não nos importamos com o que o outro possa ser. Por exemplo, se m não é impar escrevemos

$$\sin^m x = \sin^{m-1} x \sin x,$$

onde $m-1$ é par. Portanto, é uma potência de $\sin^2 x$ e pode ser expressa em potências de $\cos^2 x$ pela substituição

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

e a integral será

$$\int (\text{soma dos termos envolvendo } \cos x) \sin x dx$$

e como $\sin x = -(\cos x)'$ cada termo é da forma $u^n du$, sendo $u = \cos x$.
O procedimento é análogo se n for ímpar.

Exemplo 11: Calcule as integrais:

1. $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int \sin^{10} x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sin^{10} x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx \\ &= \int \sin^{10} x \cos x dx - \int \sin^{12} x \cos x dx\end{aligned}$$

   Definindo $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

   Assim, pelo método da substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int u^{10} du - \int u^{12} du = \tfrac{1}{11} u^{11} - \tfrac{1}{13} u^{13} + c \\ &= \tfrac{1}{11} \sin^{11} x - \tfrac{1}{13} \sin^{13} x + c.\end{aligned}$$

2. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \cos^6 x \sin x dx - 2 \int \cos^4 x \sin x dx + \int \sin x \cos^2 x dx\end{aligned}$$

   Definindo $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= -\int u^6 du + 2 \int u^4 du - \int u^2 du \\ &= -\tfrac{1}{7} u^7 + \tfrac{2}{5} u^5 - \tfrac{1}{3} u^3 \\ &= -\tfrac{1}{7} \cos^7 x + \tfrac{2}{5} \cos^5 x - \tfrac{1}{3} \cos^3 x + c.\end{aligned}$$

6.5.3 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes

As integrais do tipo $\int \sin(mx) \cos(nx) dx$, $\int \sin(mx) \sin(nx) dx$ e $\int \cos(mx) \cos(nx) dx$, onde $m \neq n$, são resolvidas utilizando-se as fórmulas relacionadas à adição de arcos:

i. $\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]$;

ii. $\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$;

iii. $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$.

Exemplo 12: Calcule as integrais:

1. $\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx$;

   Solução: Usando as fórmulas de arcos, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int (\sin(6x)+\sin(-2x))\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sin(6x)\,dx - \tfrac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{12}\cos(6x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x) + c.\end{aligned}$$

2. $\int \cos(4x)\cos(3x)\,dx$;

   Solução: Usando as fórmulas de arcos, temos que:

$$\begin{aligned}\int \cos(4x)\cos(3x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int (\cos(7x)+\cos(-x))\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int \cos(7x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int \cos x dx\\ &= \tfrac{1}{14}\sin(7x) + \tfrac{1}{2}\sin x + c.\end{aligned}$$

6.5.4 Integrais do tipo $\int \mathbf{tg}^n x dx$ e $\int \mathbf{cotg}^n x dx$, onde n é inteiro positivo

Essas integrais se resolvem mediante sucessivas aplicações das identidades trigonométricas

$$\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \text{ e } \mathrm{cotg}^2 x = \mathrm{cossec}^2 x - 1,$$

que tem por finalidade obter integrais da forma $\int \mathrm{tg}^m x \sec^2 x dx$ e $\int \mathrm{cotg}^m x \mathrm{cossec}^2 x dx$, que são calculadas pelo método da substituição.

Exemplo 13: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3 x dx &= \int \mathrm{tg}^2(x).\mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \int \sec^2 x.\mathrm{tg}(x)\,dx - \int \mathrm{tg}(x)\,dx\end{aligned}$$

   Definindo $u = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow du = \sec^2 x dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3 x dx &= \int u du - \int \mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \tfrac{u^2}{2} - \ln|\sec x| + c\\ &= \tfrac{\mathrm{tg}^2(x)}{2} - \ln|\sec x| + c.\end{aligned}$$

2. $\int \mathrm{cotg}^4 x dx$.

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{cotg}^4 x dx &= \int \mathrm{cotg}^2(x)\mathrm{cotg}^2(x)\,dx\\ &= \int \mathrm{cotg}^2(x).(\mathrm{cossec}^2 x - 1)\,dx\end{aligned}$$

$$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int \text{cotg}^2(x)\,dx$$
$$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int (\text{cossec}^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int \text{cossec}^2 x dx + \int dx$$

Definindo $u = \text{cotg}(x) \Rightarrow du = -\text{cossec}^2 x dx$. Assim,

$$\int \text{cotg}^4 x dx = -\int u^2 du - \int \text{cossec}^2 x dx + \int dx$$
$$= -\frac{u^3}{3} + \text{cotg}(x) + x + c$$
$$= -\frac{\text{cotg}^3(x)}{3} + \text{cotg}(x) + x + c.$$

6.5.5 Integrais do tipo $\int \sec^n x dx$ e $\int \text{cossec}^n x dx$, onde n é um número inteiro positivo par

Nestes casos, basta fazer:

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x \text{ ou } \text{cossec}^n x = \text{cossec}^{n-2} x.\text{cossec}^2 x$$

e utilizar as identidades trigonométricas

$$\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1 \text{ e } \text{cossec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1.$$

Exemplo 14: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \text{cossec}^4(2x)\,dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

   $$\int \text{cossec}^4(2x)\,dx = \int \text{cossec}^2(2x)\text{cossec}^2(2x)\,dx$$
   $$= \int (\text{cotg}^2(2x) + 1)\text{cossec}^2(2x)\,dx$$
   $$= \int \text{cotg}^2(2x)\text{cossec}^2(2x)\,dx + \int \text{cossec}^2(2x)\,dx$$

   Definindo $u = \text{cotg}(2x) \Rightarrow du = -2\text{cossec}^2 x dx$. Assim,

   $$\int \text{cossec}^4(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int u^2 du + \int \text{cossec}^2(2x)\,dx$$
   $$= -\frac{u^3}{6} - \frac{1}{2}\text{cotg}(2x) + c$$
   $$= -\frac{\text{cotg}^3(2x)}{6} - \frac{1}{2}\text{cotg}(2x) + c.$$

2. $\int \sec^3 x dx$.

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

   $$\int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \sec x dx$$

   Definindo $\begin{cases} u = \sec x & \Rightarrow \quad du = \sec x.\text{tg}(x)\,dx \\ dv = \sec^2 x dx & \Rightarrow \quad v = \text{tg}(x) \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \sec x.\mathrm{tg}(x) - \int \mathrm{tg}^2(x)\sec x dx \\ &= \sec x.\mathrm{tg}(x) - \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx \\ &= \sec x.\mathrm{tg}(x) - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ \Rightarrow 2\int \sec^3 x dx &= \sec x.\mathrm{tg}(x) + \int \sec x dx \\ \Rightarrow \int \sec^3 x dx &= \tfrac{1}{2}(\sec x.\mathrm{tg}(x) + \ln|\sec x + \mathrm{tg}(x)|) + c.\end{aligned}$$

Observação 5: Neste caso, sempre que n é número *inteiro positivo ímpar* deveremos usar integração por partes.

6.5.6 Integrais do tipo $\int \mathbf{tg}^m(x)\sec^n x dx$ e $\int \mathbf{cotg}^m(x)\mathbf{cossec}^n(x)\,dx$, onde m e n são inteiros positivos

Quando m for impar **ou** n for *par*, podemos reescrever o integrando para aplicar o método da substituição.

Quando m for *par* **e** n for *ímpar*, a integral deve ser resolvida usando a integração por partes.

Exemplo 15: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \mathrm{tg}^6(x)\sec^4 x dx$;

   Solução: Como n é par, iremos usar a identidade trigonométrica $\sec^2 x = \mathrm{tg}^2 x + 1$.

   $$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^6(x)\sec^4 x dx &= \int \mathrm{tg}^6(x)\sec^2 x \sec^2 x dx \\ &= \int \mathrm{tg}^6(x)(\mathrm{tg}^2 x + 1)\sec^2 x dx \\ &= \int \mathrm{tg}^8(x)\sec^2 x dx + \int \mathrm{tg}^6(x)\sec^2 x dx\end{aligned}$$

   Definindo $u = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow du = \sec^2 x dx$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^6(x)\sec^4 x dx &= \int u^8 du + \int u^6 du = \tfrac{1}{9}u^9 + \tfrac{1}{7}u^7 + c \\ &= \tfrac{1}{9}\mathrm{tg}^9(x) + \tfrac{1}{7}\mathrm{tg}^7(x) + c.\end{aligned}$$

2. $\int \mathrm{tg}^3(x)\sec^3 x dx$;

   Solução: Como m é ímpar, iremos usar a identidade trigonométrica $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

   $$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3(x)\sec^3 x dx &= \int \mathrm{tg}^2(x).\mathrm{tg}(x).\sec^3 x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1).\mathrm{tg}(x).\sec^3 x dx \\ &= \int \mathrm{tg}(x)\sec^5 x dx - \int \mathrm{tg}(x).\sec^3 x dx \\ &= \int \mathrm{tg}(x)\sec x \sec^4 x dx - \int \mathrm{tg}(x).\sec x.\sec^2 x dx\end{aligned}$$

   Definindo $u = \sec x \Rightarrow du = \sec x.\mathrm{tg}(x)\,dx$.

$$\int \text{tg}^3(x)\sec^3 x dx = \int u^4 du - \int u^2 du = \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + c$$
$$= \tfrac{1}{5}\sec^5 x - \tfrac{1}{3}\sec^3 x + c.$$

3. $\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx$;

Solução: Observe que m é par e n é ímpar.

$$\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x dx$$
$$= \underbrace{\int \sec^5 x dx}_{(I)} - \underbrace{\int \sec^3 x dx}_{(II)} \quad (1)$$

Ambas integrais são resolvidas através da integração por partes.

Pelo exemplo 14, item 3, temos que a integral (II) é

$$\int \sec^3 x dx = \tfrac{1}{2}\sec x.\text{tg}(x) + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + tg(x)| + c_1 \quad (2)$$

Resolvendo a integral (I), temos que:

$$\int \sec^5 x dx = \int \sec^3 x.\sec^2 x dx$$

Definindo $\begin{cases} u = \sec^3 x \quad \Rightarrow \quad du = 3\sec^2 x.\sec x.\text{tg}(x)\, dx \\ dv = \sec^2 x dx \ \Rightarrow \quad v = \text{tg}(x) \end{cases}$.

Por partes, temos que:

$$\int \sec^5 x dx = \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^2 x.\sec x.\text{tg}^2(x)\, dx$$
$$= \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^2 x.\sec x.(\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^5 x dx + 3\int \sec^3 x dx$$
$$\Rightarrow 4\int \sec^5 x dx = \text{tg}(x)\sec^3 x + 3\int \sec^3 x dx$$
$$\Rightarrow \int \sec^5 x dx = \tfrac{1}{4}\ \text{tg}(x)\sec^3 x + \tfrac{3}{4}\int \sec^3 x dx + c_2 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos que:

$$\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx = \tfrac{1}{4}\tan x\sec^3 x - \tfrac{1}{8}\sec x.\text{tg}(x) - \tfrac{1}{8}\ln|\sec x + \tan(x)| + k.$$

6.6 Integrais Elementares que Contém um Trinômio Quadrado

6.6.1 Integrais do tipo $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$, onde a, b, c, m e $n \in \mathbb{R}$

Consideremos duas situações:

1º Caso: Se $m = 0$ e $n \neq 0$.

Neste caso, temos que:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = n\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Pelo método de completar quadrados, transformamos o trinômio numa soma ou diferença de quadrados. Assim,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Definindo $d^2 = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ e $t = x+\frac{b}{2a}$, a integral toma a forma

$$n\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{n}{a}\int \frac{dx}{t^2+d^2},$$

que está na tabela de integrais imediatas.

Exemplo 16: Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.
Solução: Pelo método de completar quadrados, temos que:
$2x^2-5x+7 = 2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{31}{16}\right)$.
Assim,
$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{31}{16}}$.
Definindo $u = x-\frac{5}{2} \Rightarrow du = dx$.
Pelo método da subsstituição, temos que:
$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{31}}\text{arctg}\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right)+c.$

2^o Caso: Se $m \neq 0$ e n qualquer.

Neste caso, procuramos obter no numerador a derivada do trinômio do denominador, com o objetivo de simplificar a integral dada. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{(I)} + \left(n-\tfrac{mb}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{(II)}\end{aligned}$$

A integral (II) resolve-se conforme o caso anterior. A integral (I), resolve-se pelo método da substituição.

Definindo $u = ax^2+bx+c \Rightarrow du = (2a+b)\,xdx$, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{m}{2a}\int \frac{du}{u}+\left(n-\tfrac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\ &= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+c_1+\left(n-\tfrac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.\end{aligned}$$

Exemplo 17: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$.
Solução: Pelo método de completar quadrados, temos que:
$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-1}$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x^2-x-1| + c_1 - \tfrac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2-x-1}}_{(I)}. \qquad (1)$$

Resolvendo a equação (I):
Completando quadrados, temos que:
$\int \frac{dx}{x^2-x-1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$
Definindo $t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx$.
Pelo método da substituição, temos que:
$\int \frac{dx}{x^2-x-1} = \int \frac{dt}{t^2-\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{u-\frac{\sqrt{5}}{2}}{u+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c_2$

Retornando em (1) segue que:
$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{\sqrt{5}}{10}\ln\frac{\left|2x-1-\sqrt{5}\right|}{\left|2x-1+\sqrt{5}\right|} + c.$

6.6.2 Integrais do tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$

Utilizando o método de completar quadrados no denominador, reduz-se a integral acima em uma das seguintes integrais da tabela:

(i) se $a > 0$, então $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm d^2}}$;

(ii) se $a < 0$, então $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{du}{\sqrt{d^2-u^2}}$.

Exemplo 18: Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.
Solução: Pelo método de completar quadrados, temos que:
$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}.$
Definindo $u = x - \frac{3}{4} \Rightarrow du = dx$. Então,
$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{25}{16}-u^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\tfrac{4}{5}u + c$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + c.$

6.6.3 Integrais do tipo $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, onde a, b, c, m e $n \in \mathbb{R}$

Usando o método de completar quadrados, podemos escrever a integral acima como:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}_{(I)} + \left(n - \tfrac{mb}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}_{(II)},$$

onde a primeira integral se resolve por substituição e a segunda integral se resolve conforme o caso anterior.

Exemplo 19: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.
Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\end{aligned}$$

Definindo $\begin{cases} u = x^2+2x+2 \Rightarrow du = (2x+2)\,dx \\ t = x+1 \;\Rightarrow\; dt = dx \end{cases}$.
Pelo método da substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \sqrt{u} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + c \\ &= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + c.\end{aligned}$$

6.6.4 Integrais do tipo $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, onde a, b, c, m e $n \in \mathbb{R}$

Utilizando a substituição $u = \frac{1}{mx+n}$, esta integral se resolve conforme último caso estudado.

Exemplo 19: Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.
Solução: Definindo $u = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{du}{u^2}$, temos que:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{(1-u)^2+u^2}{u^2}}} = -\int \frac{du}{\frac{u}{|u|}\sqrt{2u^2-2u+1}}$$

- Se $u > 0$, temos que:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{2u^2-2u+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-u+\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

Definindo $t = u - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2+1}\right| + c \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|2u-1+\sqrt{4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right| + c \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|-\frac{x-1}{x+1}+\sqrt{2\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\right| + c\end{aligned}$$

Como $u > 0$ então $x > 1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$.
Logo,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + c.$$

- Se $u < 0$, por desenvolvimento análogo ao anterior, obtemos que:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u^2-2u+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-1-2\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + k.$$

6.6.5 Integrais do tipo $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

As integrais deste tipo, completando o quadrado do trinômio de segundo grau, se reduzem a uma das integrais seguintes:

(i) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$;

(ii) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$.

Exemplo 20: Calcule a integral indefinida $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$.
Solução: Completando quadrados, temos que:
$\int \sqrt{1-2x-x^2}dx = \int \sqrt{2-(x+1)^2}dx$
Fazendo $u = x+1 \Rightarrow du = dx$, temos que:
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-2x-x^2}dx = \int \sqrt{2-u^2}du &= \frac{u\sqrt{2-u^2}}{2} + \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c \\ &= \frac{x+1\sqrt{1-2x-x^2}}{2} + \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.\end{aligned}$$

6.7 Integrais Por Substituição Trigonométrica

Se o integrando contém uma expressão da forma

$$\sqrt{a^2-u^2},\ \sqrt{u^2+a^2} \text{ ou } \sqrt{u^2-a^2},$$

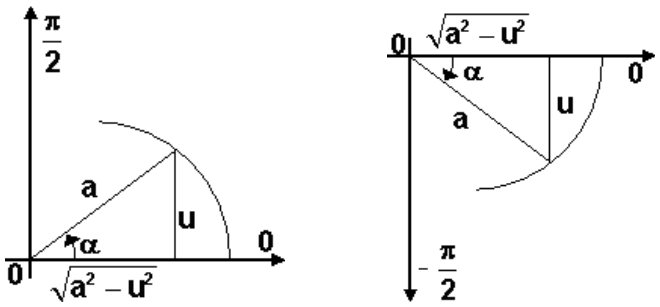
onde $a > 0$, por meio de uma substituição trigonométrica podemos transformá-la numa integral envolvendo funções trigonométricas.

Analisemos cada um dos casos cujas formas foram citadas acima.

1^o Caso: O integrando contém a expressão $\sqrt{a^2-u^2}$ com $a > 0$.

Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\sin\theta$. Então, $du = a\cos\theta d\theta$ e supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos que:
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-u^2} &= \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)} \\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta} \\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$
Como $\sin\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)$.
Graficamente, temos que:

Se $u \geq 0$: Se $u < 0$:



2^o Caso: O integrando contém a expressão $\sqrt{a^2+u^2}$ com $a > 0$.

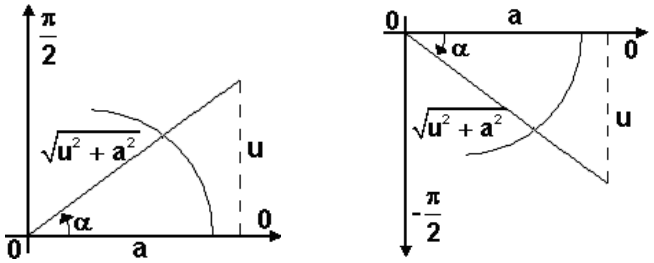
Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\text{tg}\theta$. Então, $du = a\sec^2\theta d\theta$ e supondo que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+u^2} &= \sqrt{a^2+a^2\text{tg}^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2\left(1+\text{tg}^2\theta\right)} \\ &= \sqrt{a^2\sec^2\theta} \\ &= a\sec\theta.\end{aligned}$$

Como $\text{tg}\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$.

Graficamente, temos que:

Se $u \geq 0$: Se $u < 0$:



3^o Caso: O integrando contém a expressão $\sqrt{u^2-a^2}$ com $a > 0$.

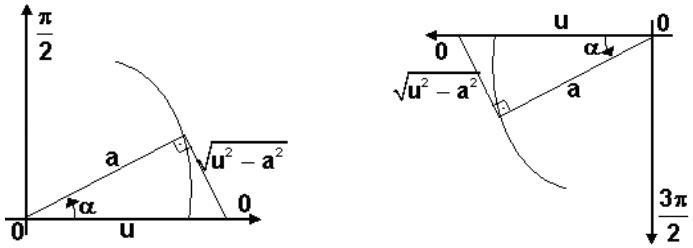
Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\sec\theta$. Então, $du = a\sec\theta.\text{tg}\theta d\theta$ e supondo que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2\left(\sec^2\theta - 1\right)} \\ &= \sqrt{a^2\text{tg}^2\theta} \\ &= a\text{tg}\theta.\end{aligned}$$

Como $\sec\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \text{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right)$.

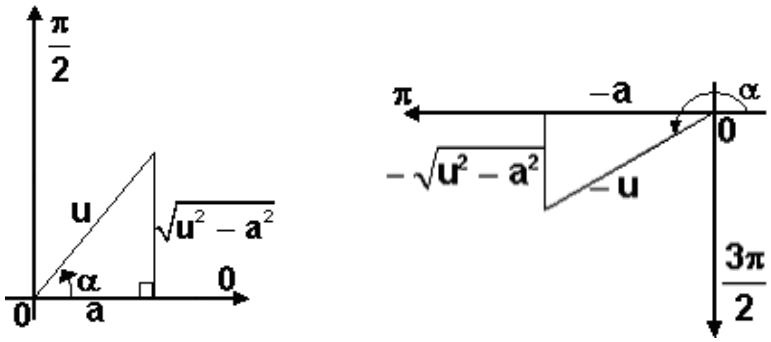
Graficamente, temos que:

Se $u \geq a$: Se $u \leq -a$:



Ou ainda, podemos representar como:

Se $u \geq a$: Se $u \leq -a$:



Exemplo 21: Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

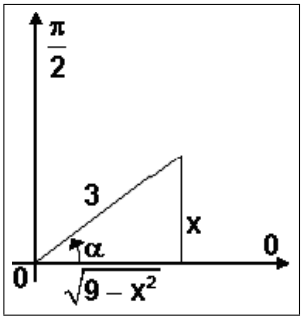
   Solução: Definindo $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta d\theta$.

   Temos que: $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\cos\theta)^2} = 3\cos\theta$.

   Assim,

   $$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}.3\cos\theta d\theta = \int \text{cotg}^2\theta d\theta \\ &= \int (\text{cossec}^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= \int \text{cossec}^2\theta d\theta - \int d\theta \\ &= -\text{cotg}\theta - \theta + c. \qquad (*)\end{aligned}$$

   Devemos retornar a variável x. Para isso, observe que:

   $$\begin{cases} x = 3\sin\theta \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \\ \text{cotg}(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \end{cases}.$$

   Substiuindo em $(*)$, temos que:

   $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c.$

2. $\int \sqrt{x^2+5}dx$;

Solução: Definindo $x = \sqrt{5}\text{tg}\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5}\sec^2\theta d\theta$.

Temos que: $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5\left(1+\text{tg}^2\theta\right)} = \sqrt{5}\sec\theta$.

Assim,

$\int \sqrt{x^2+5}dx = \int \sqrt{5}\sec\theta.\sqrt{5}\sec^2\theta d\theta = 5\int \sec^3\theta d\theta$

Integrando por partes, usando resultado do exemplo 14, item 2, temos que:

$\int \sqrt{x^2+5}dx = \frac{5}{2}\text{tg}\theta\sec\theta + \frac{5}{2}\ln\left|\text{tg}\theta+\sec\theta\right| + c. \qquad (\#)$

Devemos retornar a variável x. Para isso, observe que:

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}\text{tg}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Substiuindo em $(\#)$, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+5}dx &= \frac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| - \frac{5}{2}\ln\sqrt{5} + c \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| + k.\end{aligned}$$

3. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$;

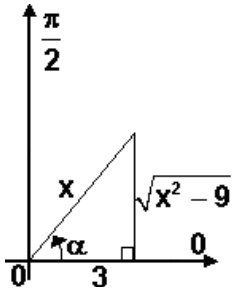
Solução: Definindo $x = 3\sec\theta \Rightarrow dx = 3\sec\theta\text{tg}\theta d\theta$.

Temos que: $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{(3\sec\theta)^2 - 9} = 3\text{tg}\theta$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta.\text{tg}\theta d\theta}{27\sec^3\theta.3\text{tg}\theta}.d\theta = \frac{1}{27}\int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} \\ &= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{27}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{54}\int d\theta + \frac{1}{54}\int \cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{108}\sin(2\theta) + c \\ &= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{54}\sin\theta\cos\theta + c. \qquad (++)\end{aligned}$$

Observe que:



- Se $x > 3 \Rightarrow \theta = \text{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$;
- Se $x < 3 \Rightarrow \theta = 2\pi - \text{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$;
- $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$;
- $\cos\theta = \frac{3}{x}$.

.

Substiuindo em $(++)$, temos que:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \begin{cases} \frac{1}{54}\text{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{54}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c, \text{ se } x > 3 \\ \frac{\pi}{27} - \frac{1}{54}\text{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{54}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c, \text{ se } x < 3 \end{cases}.$$

Ou:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \begin{cases} \frac{1}{54}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{54}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c, \text{ se } x > 3 \\ -\frac{1}{54}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{54}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + k, \text{ se } x < 3 \end{cases}.$$

4. $\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx$;

Solução: Definindo $u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5dx$, temos que:

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = 125\int \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}du$

Por substituição trigonométrica,

$$\begin{cases} u = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad du = 2\cos\theta d\theta \\ \sqrt{4-u^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta \end{cases}.$$

Assim,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = 125\int \frac{2\cos\theta}{16\sin^4\theta}2\cos\theta d\theta = \frac{125}{4}\int \operatorname{cotg}^2\theta.\operatorname{cossec}^2\theta d\theta.$

Se $v = \operatorname{cotg}\theta$, então $dv = -\operatorname{cossec}^2\theta d\theta$. Dessa forma,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = -\frac{125}{4}\int v^2 dv = -\frac{125}{12}v^3 + c = -\frac{125}{12}\operatorname{cotg}^3\theta + c$

Do triângulo retângulo, temos que:

$\sin\theta = \frac{u}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-u^2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\sqrt{4-u^2}}{u}.$

Logo,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = -\frac{125}{12}\left(\frac{\sqrt{4-u^2}}{u}\right)^3 + c = -\frac{\left(4-25x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12x^3} + c.$

6.8 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Toda função racional pode ser representada na forma de uma fração racional, isto é, como a razão de dois polinômios da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_mx^m}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n}.$$

Se o grau do polinômio do numerador é menor que o grau do polinômio do denominador a fração é dita *própria*, do contrário é dita *imprópria*.

No caso das impróprias, ao dividir o numerador pelo denominador, segundo divisão de polinômios, pode-se representar a fração dada como a soma de um polinômio e de uma fração própria. Assim:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)},$$

onde $M(x)$ é um polinômio e $\frac{N(x)}{Q(x)}$ é uma fração própria.

Como a primeira parcela, $M(x)$, é um polinômio, integrá-lo, é simples. Vejamos o caso da segunda parcela, $\frac{N(x)}{Q(x)}$, que é uma fração própria, conforme o próximo método a ser apresentado.

6.8.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

Neste método é útil escrever $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ como uma soma de *frações parciais*. Os denominadores destas frações são obtidas fatorando-se o polinômio $q(x)$ em um produto de fatores lineares e ou quadráticos. Às vezes isto pode não ser fácil, porém há um teorema que nos diz que:

"Qualquer polinômio com coeficiente reais pode ser expresso como um produto de fatores lineares e ou quadráticos, de tal forma que cada um dos fatores tenha coeficientes reais."

Depois de feita a fatoração, o método para determinar as frações parciais depende da natureza desses fatores.

Vamos considerar vários casos, para tanto, tomemos o polinômio $q(x)$ de grau n cujo coeficiente de termo x^n é 1, caso contrário, seremos obrigados a dividir tanto o numerador quanto o denominador por este coeficiente.

1^o Caso: Os fatores de $q(x)$ são todos lineares e distintos.

Neste caso, podemos escrever $q(x)$ da forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

onde os a_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ são números reais distintos.

A função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ pode ser decomposta em frações mais simples, da forma:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n},$$

onde A_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes a serem determinadas.

É comum dizer, neste caso, que estas frações racionais possuem o denominador com raízes reais e simples.

Exemplo 22: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$.
Solução: Note que:
$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx$
Decompondo em frações parciais, temos que
$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$,
que é uma identidade para todo x real exceto 0, -1 e 2.

$\Rightarrow x - 1 = (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A.$

Por comparação, tem-se que:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A + B - 2C = 1 \\ -2A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{6} \\ C = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Assim,
$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + c\\ &= \frac{1}{6}\left(3\ln|x| - \frac{4}{3}\ln|x+1| + \ln|x-2|\right) + c\\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{x+1}\right| + c.\end{aligned}$$

2º Caso: Os fatores de $q(x)$ são todos lineares e alguns se repetem.

Admitindo que $(x-a_1)$ seja um fator que se repete r vezes, correspondente a este fator, existe a soma de r frações parciais do tipo:

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^r} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a_1)},$$

onde A_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes a serem determinadas.

Neste caso dizemos que as frações parciais possuem denominadores com raízes reais múltiplas.

Exemplo 23: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx$.

Solução: Decompondo em frações parciais, temos que:
$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2}$,
que é uma identidade para todo x real exceto 0 e 2. Assim,

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^3+Bx(x-2)^3+Cx^2+Dx^2(x-2)+Ex^2(x-2)^2}{x^2(x-2)^3}$$

$$\Rightarrow x^3-1 = (B+E)x^4+(A-6B+D-4E)x^3+(-6A+12B+C-2D+4E)x^2+(12A-8B)x-8A.$$

Por comparação, tem-se que:

$$\begin{cases} B+E=0\\ A-6B+D-4E=1\\ -6A+12B+C-2D+4E=0\\ 12A-8B=0\\ -8A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{8}\\ B=\frac{3}{16}\\ C=-\frac{7}{4}\\ D=\frac{5}{4}\\ E=-\frac{3}{16} \end{cases}.$$

Assim,
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2}\\ &= \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{3}{16}\ln|x-2| - \frac{5}{4(x-2)} + \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{1}{8x} + c\\ &= \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{11x^2-31x+4}{8x(x-2)^2} + c.\end{aligned}$$

3º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos e os fatores quadráticos não se repetem.

A fração parcial correspondente a cada fator quadrático ax^2+bx+c no denominador é da forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

onde, o fator quadrático não pode ser decomposto num produto e fatores lineares. Do contrário teríamos os casos anteriores.

Exemplo 23: Calcule as integrais indefinidas.

1. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$;

   Solução: Decompondo em frações parciais, temos que:

   $\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C\left(x^2+2x+2\right)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

   $\Rightarrow x^2-2x+3 = (A+C)\,x^2 + (B-A+2C)\,x + (2C-B).$

   Por comparação, tem-se que:

   $$\begin{cases} A+C=1 \\ B-A+2C=-2 \\ 2C-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{9}{5} \\ B=\frac{7}{5} \\ C=-\frac{4}{5} \end{cases}.$$

   Assim,

   $$\begin{aligned}
   \int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx &= \int \frac{\frac{9}{5}x+\frac{7}{5}}{x^2+2x+2}dx - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
   &= \int \frac{\frac{9}{10}(2x+2)-\frac{2}{5}}{x^2+2x+2}dx - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
   &= \frac{9}{10}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
   &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1| + c \\
   &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\text{arctg}(x+1) - \frac{4}{5}\ln|x-1| + c \\
   &= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\left(x^2+2x+2\right)^9}{(x-1)^4}\right| - \frac{2}{5}\text{arctg}(x+1) + c.
   \end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

   $\int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)(e^x-1)} = \int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx$

   Definindo $u = e^x$, temos que $x = \ln u$ e $dx = \frac{1}{u}du$. Assim,

   $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \frac{u}{(u^2+1)(u-1)}.\frac{1}{u}du = \int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)}$

   Decompondo em frações parciais, temos que:

   $\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1} = \frac{(Au+B)(u-1)+C\left(u^2+1\right)}{(u^2+1)(u-1)}$

   $\Rightarrow 1 = C - B + Au^2 + Cu^2 - Au + Bu$

   Por comparação, temos que:

   $$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B \\ B+C=0 \\ -B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

   Assim,

$$\int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+1}du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln|u^2+1| - \frac{1}{2}\arctan u + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln|e^{2x}+1| - \frac{1}{2}\arctan(e^x) + c.$$

4º Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos e alguns fatores quadráticos se repetem.

Se o fator quadrático ax^2+bx+c se repete r vezes, então, correspondente a este fator teremos uma soma das r seguintes frações parciais:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^r} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^{r-1}},$$

onde A_i e B_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes a serem determinadas.

O fator quadrático ax^2+bx+c não pode ser decomposto num produto de fatores lineares.

Exemplo 24: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

Solução: Decompondo em frações parciais, temos que:

Decompondo em frações parciais, temos que

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} = \frac{Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+4x+5\right)}{(x^2+4x+5)^2},$$

$$\Rightarrow x^2+x+1 = Cx^3 + (4C+D)x^2 + (A+5C+4D)x + (B+5D).$$

Por comparação, tem-se que:

$$\begin{cases} C = 0 \\ 4C+D = 1 \\ A+5C+4D = 1 \\ B+5D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = -4 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \underbrace{\int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx}_{(II)} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+5}}_{(I)} \qquad (\#)$$

Resolvendo a integral (I):

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2) + c_1. \qquad (1)$$

Resolvendo a integral (I):

$$\int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx = -3\int \frac{x}{(x^2+4x+5)^2}dx + 4\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$$
$$= -\frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx + 2\int \frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2}$$

Definindo $\begin{cases} y = x^2+4x+5 \Rightarrow du = (2x+4)dx \\ z = x+2 \Rightarrow dz = dx \end{cases}$.

Pelo método da substituição, temos que:

$$\int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2} + 2\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$
$$= -\frac{3}{2}\int y^{-2}dy + 2\int \frac{\mathbf{z^2}+1-\mathbf{z^2}}{(z^2+1)^2}dz$$

$$= -\tfrac{3}{2}\int y^{-2}dy + 2\int \tfrac{dz}{z^2+1} - 2\int \tfrac{z^2}{(z^2+1)^2}dz$$
$$= \tfrac{3}{2y} + 2\text{arctg}(z) + c_2 - 2\underbrace{\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz}_{(III)} \qquad (2)$$

Resolvendo, por partes, a integral (III):

Definindo $\begin{cases} u = z \;\Rightarrow\; du = dz \\ dv = \frac{z}{(z^2+1)^2}dz \Rightarrow\; v = -\frac{1}{2(z^2+1)} \end{cases}$.

Assim,

$$\int \tfrac{z^2}{(z^2+1)^2}dz = -\tfrac{z}{2(z^2+1)} + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dz}{z^2+1}$$
$$= -\tfrac{z}{2(z^2+1)} + \tfrac{1}{2}\arctan z + c_3 \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2), temos que:

$$\int \tfrac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx = \tfrac{3}{2y} + \text{arctg}(z) + \tfrac{z}{z^2+1} + c_4. \qquad (4)$$

Substituindo (1) e (4) em (#), temos que:

$$\int \tfrac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \tfrac{3}{2y} + 2.\text{arctg}(z) + \tfrac{z}{z^2+1} + k$$
$$= \tfrac{3}{2(x^2+4x+5\ )} + 2.\text{arctg}(z) + \tfrac{x+2}{(x+2)^2+1} + k$$
$$= \tfrac{2x+7}{2(x^2+4x+5)} + 2.\text{arctg}(x+2) + \tfrac{x+2}{(x+2)^2+1} + k.$$

6.9 Integração de Algumas Funções Irracionais

As integrais irracionais aqui estudadas, mediante substituições de vatiáveis correspondentes, se reduzem à integrais de funções racionais que são perfeitamente integráveis.

Vejamos alguns casos:

1^{o}Caso: Integrais do tipo $\int R\left(x,\, x^{\frac{m}{n}},\, \ldots,\, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$ indica que com as grandezas x, $x^{\frac{m}{n}}$, $\ldots$, $x^{\frac{r}{s}}$ se executam, somente, operações racionais.

Considerando como n o denominador comum das frações $\frac{m}{n}$, $\ldots$, $\frac{r}{s}$, e fazendo a substituição

$$x = u^n \;\Rightarrow\; dx = nu^{n-1}du,$$

cada potência fracionária de x pode ser expressa por uma potência inteira de u e por conseguinte, o integrando se transformará em uma função racional de u.

2^o Caso: Integrais do tipo Integrais do tipo $\int R\left[x,\, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\, \ldots\right]dx$, onde R é uma função racional e p_1, p_2, q_1 e q_2 são números inteiros.

Estas integrais se simplificam, mediante a substituição

$$\frac{ax+b}{cx+d} = u^n,$$

onde n é o mínimo multiplo comum dos números q_1, q_2, ..., ou seja, o denominador comum das frações $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ...

Exemplo 25: Calcule as integrais indefinidas.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$;

   Solução: Fazendo a mudança de variável:

   $x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3du$,

   temos que:

   $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx = \int \frac{u^2}{u^3+1}.4u^3du = 4\int \frac{u^5}{u^3+1}du.$$
   $$= \int u^2du - \int \frac{u^2}{u^3+1}du$$

   Escolhendo $t = u^3 + 1 \Rightarrow dt = 3u^2du$.

   Pelo método da substituição, temos que:

   $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx = \int u^2du - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}$$
   $$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{3}\ln|t| + c$$
   $$= \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + c.$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

   Solução: Fazendo a mudança de variável:

   $2x - 1 = u^4 \Rightarrow dx = 2u^3du$,

   temos que:

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2u^3}{u^2-u}du = \int \frac{2u^2}{u-1}du$$
   $$= 2\int \left(u + 1 + \frac{1}{u-1}\right)du$$
   $$= 2\int udu + 2\int du + \int \frac{du}{u-1} = 2u + \ln(u-1) + u^2$$
   $$= u^2 + 2u + \ln(u-1) + c$$
   $$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + c.$$

.

6.10 Exercícios

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int a^{nx}dx$;
2. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$;
3. $\int x\sqrt{x-1}dx$;
4. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$;
5. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$;
6. $\int \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{2+\cos\left(\frac{x}{3}\right)}dx$;
7. $\int \frac{dx}{\cos x}$;
8. $\int \frac{dx}{\sin x}$;
9. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx$;
10. $\int \frac{dx}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$;
11. $\int \frac{x+4}{4x^2+5}dx$;
12. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;
13. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$;
14. $\int e^{x+e}dx$;
15. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$;
16. $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$;
17. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$;
18. $\int \sin^4(ax)\,dx$;
19. $\int \sin(3x)\sin(2x)\,dx$;
20. $\int \left(\sin^2 x+\cos x\right)^2 dx$;
21. $\int (2-\sin x)^2 dx$;
22. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$;
23. $\int \mathrm{cotg}^3(2x)\,dx$;
24. $\int \mathrm{cotg}^3(2x)\mathrm{cossec}(2x)\,dx$;
25. $\int \tan^3 x\sec^4 x dx$;
26. $\int x^2\cos x dx$;
27. $\int x^3\cos x dx$;
28. $\int x^3 e^x dx$;
29. $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$;
30. $\int \cos^2 x dx$;
31. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$;
32. $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$;
33. $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx$;
34. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx$;
35. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}dx$;
36. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$;
37. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3}dx$;
38. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$;
39. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;
40. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$;
41. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$;
42. $\int \frac{dx}{(6-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
43. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$;
44. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}$;
45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;
46. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$;
47. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$;
48. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$;
49. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$;
50. $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}dx$;
51. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$;
52. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$;
53. $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}dx$;
54. $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)}dx$;
55. $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$;
56. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$;
57. $\int \frac{\ln x}{x+4x\ln^2 x}dx$;
58. $\int \frac{2x-1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$;
59. $\int x\cos(3x-2)\,dx$;
60. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$;
61. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$;
62. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$;
63. $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$;
64. $\int \frac{\sqrt{x^7}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$;
65. $\int x\sec^2 x dx$;
66. $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;
67. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{1-6x-x^2}}dx$;
68. $\int \frac{x^4-x^3-2}{x^3+x^2+x+1}dx$;

69. $\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} \right) dx;$

70. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx;$

71. $\int x^n \ln(2x^3)\, dx,\ n \in \mathbb{N};$

72. $\int \frac{\sec^2 x}{(\tan^2 x+9)^{\frac{3}{2}}} dx;$

73. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+2}};$

74. $\int \left(\frac{3e^{-2x}+2e^{-x}-2}{e^{-3x}-1} \right) dx;$

75. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx;$

76. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{x^2} dx;$

77. $\int (x-1)\, x^2 x dx;$

78. $\int \cos(\ln x)\, dx;$

79. $\int \frac{2e^x+1}{e^x+2-\frac{5}{e^x}} dx;$

80. $\int \frac{x}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx;$

81. $\int \frac{x^2-x-4}{(x^2+4)(2x-1)} dx;$

82. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} dx;$

83. $\int e^{3x} \cos(4x)\, dx;$

84. $\int \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$

85. $\int \frac{x^3-10x+8}{(x^2-2x+4)^2} dx;$

86. $\int \cos x \sin x \sqrt{1-\sin^4 x} dx;$

87. $\int \sqrt{1+e^x} dx;$

88. $\int \left(\frac{\ln^2 x}{x} + \sqrt{x}\ln x \right) dx;$

89. $\int x^3\sqrt{x^2+3} dx;$

90. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx;$

91. $\int \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)} dx;$

92. $\int \frac{e^x}{\cos(e^x+3)} dx;$

93. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx;$

94. $\int \tan^2 x \sec^3 x dx;$

95. $\int \frac{x^3+3x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)} dx;$

96. $\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}} dx;$

97. $\int \frac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx;$

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1};$

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$

100. $\int x(\ln x)^2\, dx;$

101. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} dx;$

102. $\int \frac{x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx;$

103. $\int \frac{3x^2-x+4}{x(x^3+2x^2+2x)} dx;$

104. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x} dx;$

105. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx;$

106. $\int e^x \mathrm{cotg}^3(e^x) \mathrm{cosec}^4(e^x)\, dx;$

107. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx;$

108. $\int \frac{x^2+2x+6}{x^3-x^2+2x} dx;$

109. $\int \frac{e^{4x}}{(1+3e^{4x})^2} dx;$

110. $\int \frac{dx}{1+e^{-x}};$

111. $\int \frac{x^2\ln^3\left(1+x^3\right)}{1+x^3} dx;$

112. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$

113. $\int \sin^4(e^{2x}) \cos(e^{2x})\, e^{2x} dx;$

114. $\int \frac{x^3}{(4+x^2)^2} dx;$

115. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} dx;$

116. $\int \frac{3-3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx;$

117. $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx;$

118. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}} dx;$

119. $\int \frac{\ln x}{x} dx;$

120. $\int \frac{4}{4x^2-20x+32} dx;$

121. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-9}\right)^3};$

122. $\int \frac{\left(2x^3+x+1\right)}{(x^2-x)(x^2+1)} dx;$

123. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}};$

124. $\int [\ln(\cos x)]^2 \tan x dx;$

125. $\int \frac{dx}{(x^2+4x-5)^2};$

126. $\int \frac{2x^3+x+1}{(x^2-x)(x^2+1)} dx;$

127. $\int \frac{x^5+9x^3+1}{x^3+9x} dx;$

128. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{1+2x}};$

129. $\int \frac{x^3+3x-1}{(x-1)(x^4+x^2)} dx;$

130. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+\sqrt{x+1}}};$

131. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}};$

132. $\int \frac{\left(x^2-2\right)}{x(x^3-x^2+2x)} dx;$

133. $\int \frac{\sqrt[x]{\pi}}{x^2} dx;$

134. $\int \ln(x^2+1)\, dx;$

135. $\int \frac{x^3+4}{x(x^2+4)(x-1)}dx$;

136. $\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx$;

137. $\int \arcsin(2x)\,dx$;

138. $\int \frac{\left(4-5x^3\right)}{(x-1)(x^3+2x)}dx$;

139. $\int \frac{e^{\sec^2 x}\tan x}{\cos^2 x}dx$;

140. $\int \frac{7dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

141. $\int \frac{x^3-3x-9}{x^4+9x^2}dx$;

142. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$;

143. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

144. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3-1}dx$;

144. $\int \frac{\ln[\ln(\ln x)]}{x\ln x}dx$;

145. $\int \frac{2dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}$;

146. $\int \frac{2x^3-x+1}{x(x^2+1)^2}dx$;

147. $\int \frac{x\tan^3\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx$;

148. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}$;

150. $\int \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x+3}}dx$;

151. $\int \frac{2x^2-4}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$;

152. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}dx$;

153. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

154. $\int \sin(\ln x)\,dx$;

155. $\int \frac{2x^2-x+2}{x^2(x-1)(x^2+2)}dx$;

156. $\int \frac{\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(4x)}-\sqrt[3]{\operatorname{cotg}(4x)}\right)}{\sqrt{\operatorname{cotg}(4x)}}\operatorname{cossec}^2(4x)\,dx$;

157. $\int \frac{dx}{x^2\operatorname{cossec}^8\left(\frac{2}{x}\right)\sec^3\left(\frac{2}{x}\right)}$

158. $\int e^{-2x}\cos^2\left(3e^{-x}\right)dx$

159. $\int \frac{\operatorname{tg}(x)\sec x}{\cos^2 x+9}dx$

160. $\int \frac{\sqrt{\ln^2 x-2\ln x+10}}{x}dx$

161. $\int \sin(4x)\,e^{\cos^2 x}dx$

162. $\int \frac{\left(3\cos^2 x-2\right)\sin x}{\cos^3 x-\cos^2 x+\cos x-1}dx$

163. $\int \frac{\pi^{5x}+9\pi^{3x}+1}{\pi^{3x}+9\pi^x}dx$

164. $\int 3^x\left(\sin\left(3^x\right)+\cos\left(3^x\right)\right)^2dx$

165. $\int \frac{x^4\sqrt{1+\operatorname{tg}(3x^5)}}{\cos^2(3x^5)}dx$

166. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\ln(1+e^x)\,dx$

167. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x\left(2\sqrt[3]{x^2}+1\right)}dx$;

168. $\int \frac{tg^3x}{\cos^2 x}.e^{\sec^2 x-1}dx$.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte.* Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 6^a ed.., 2000.

[2] FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 6^a ed. rev. e ampl., 2006.

[3] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo. Editora HARBRA ltda, 3^a ed., 1994.

[4] NOLLI, Dario. *Apostila utilizada nos semestres anteriores a 2007/2.* (base desta).

[5] PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* Moscu, Editorial Mir, 4^a ed., 1977.

[6] SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo. Makron Books Ltda, 2^a ed., 1994.

[7] THOMAS, G. E. *Cálculo.* São Paulo. Pearson Addison Wesley, São Paulo, vol. 1, 10^a ed, 2002.

[8] KÜHLKAMP, N. *Cálculo 1.* Florianópolis. Editora UFSC, 3^a ed. rev. e ampl. 2006.