1. INTEGRAl DEFINIDA

Integrais definidas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Definir integral inferior e integral superior;

2. Calcular o valor da integral definida por definição;

3. Aplicar o teorema fundamental do cálculo e suas propriedades;

4. Calcular integral definida por substituição de variáveis;

5. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias;

6. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias de funções descontinuas;

7. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas retangulares;

8. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas polares;

9. Calcular volume de um sólido de revolução;

10. Calcular o comprimento de um arco em coordenadas retangulares, paramétricas e polares;

11. Calcular a superfície de um sólido de revolução.

12. Resolver problemas através da integral nas áreas de física, produção, economia entre outras aplicações.

12. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

1.1. Introdução

Neste capítulo estudaremos a integral definida. Uma das principais aplicações da integral definida encontra-se em problemas que envolvem cálculo de área e volumes. Por exemplo, seja $f : [a, b] :\to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Nosso propósito é determinar a área delimitada pela curva $y = f(x)$ e pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme figura 1.1

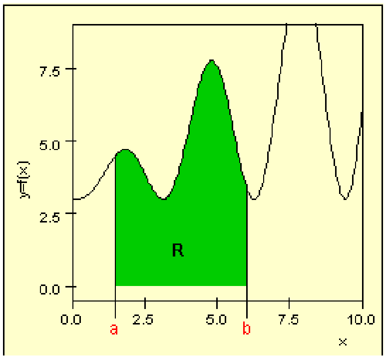


Figura 1.1: área da região R

Como você acha que poderíamos calcular a área da região?

Estimando o valor da área R: Sabemos como calcular a área de um retângulo (base x altura). Vamos considerar neste caso, $a = 2$ e $b = 6$ e dividir o intervalo $[2, 6]$, por exemplo, em 2 subintervalos de comprimento $x = 2$. Denotamos os extremos destes subintervalos por x_i, onde $0 \leq i \leq 2$. Veja que, neste caso, $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$. Na figura 1.2, considere os retângulos de largura x e altura $M_i = Max\{f(x_{i-1}), f(xi)\}$.

A área é dada pela soma dos dois retângulos. Como a base é a mesma podemos dizer que a área é dada pelo $\sum\limits_{i=0}^{i=2} M_i \Delta x$, onde $M_i = Max\{f(x_{i-1}), f(xi)\}$ e $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Você acha que podemos comparar a área da região R representada pela figura 1.1 e a região formada pelos retângulos da figura 1.2. ? A diferença é muito grande? O que aconteceria com esta diferença se dividissemos este intervalo em $n = 3, 4, 5, 6....$?

A definição formal de integral envolve a soma de muitos termos pequenos (diferenciais), com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação.

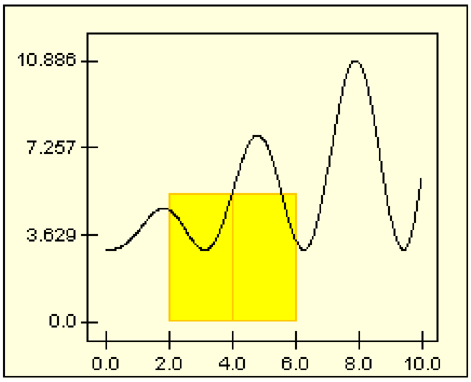


Figura 1.2: Estimativa da área por retângulo

Assim há uma conexão entre o cálculo integral e diferencial, onde o Teorema Fundamental do Cálculo (que veremos ainda neste cápitulo) relaciona a integral com a derivada. As integrais estão envolvidas em inúmeras situações: usando a taxa (derivada) podemos obter a quantidade (integral) de óleo que vaza de um tanque durante um certo tempo; utilizando a leitura do velocímetro de um ônibus espacial é possível calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo. Assim, pode usar-se a integral para resolver problemas concernentes a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre uma represa, excedente de consumo e futebol, potência consumida e a energia usada em um intervalo de tempo na cidade de Joinville, etc.

O Cálculo de Área

Ao tentar encontrar a área de uma região que está sob uma curva $s = f(t)$ de a até b, onde a curva s representa a derivada da distância percorrida, isto é, a velocidade de um automóvel ao percorrer uma certa distância durante um certo intervalo de tempo, e a área representará a distância total percorrida pelo automóvel durante este intervalo de tempo. Assim, isso significa uma região D (conforme a figura 1.3) , limitada por uma função $f(t)$ (onde $f(t) \geqslant 0$), retas verticais ao eixo t dos tempos, isto é, $t = t_i = a$ e $t = t_f = b$, onde $t_i = a$ e $t_f = b$ representam o tempo inicial e final respectivamente, e o eixo t

Calcular área de uma região retangular é tarefa simples. Para um retângulo a área é definida como o produto base pela altura. A área de um triângulo é a metade da

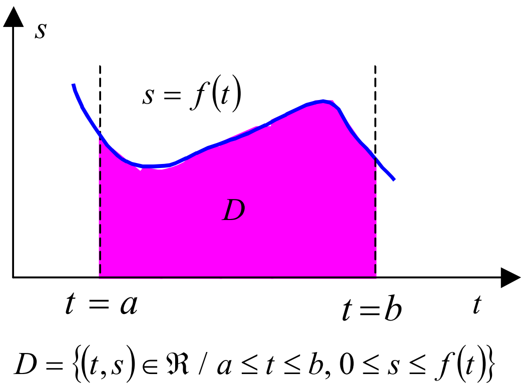


Figura 1.3: Distância de um automóvel

base vezes a altura. A área de um polígono é encontrada dividindo-o. No entanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos. Assim, parte do problema da área é utilizar uma idéia intuitiva do que é a área de uma região. Recordando-se que ao definir uma tangente primeiro aproximando a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomando o limite dessas aproximações, utiliza-se de uma idéia semelhante para obter áreas. Em primeiro lugar aproxima-se a região por retângulos e então toma-se o limite das áreas desses retângulos à medida que se aumenta o número destes, conforme a figura 1.4

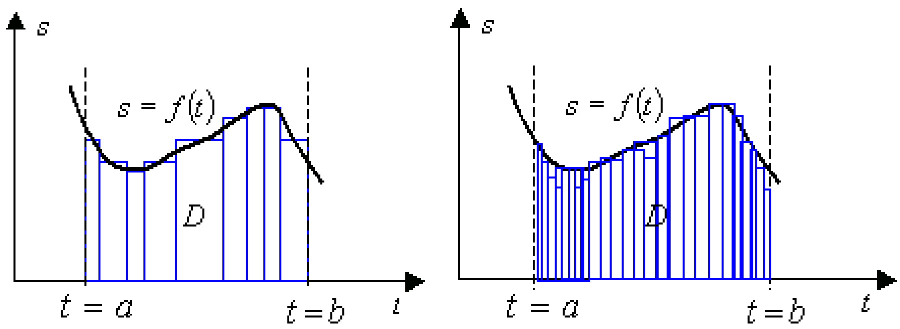


Figura 1.4: Aproximando áreas por n retângulos

E desta forma a área total será dada pela soma das área retangulares onde as bases $\to 0 \Rightarrow \Delta t \to 0$ quando o número de retângulo $\to \infty \Rightarrow n \to \infty$. Você consegue formalizar, matematicamente, este resultado?

Para dar início ao processo veremos algumas definições que auxiliam na compreensão.

Partição

Definição 1.1. *: Seja $[a, b]$ um intervalo. Denominamos partição de $[a, b]$ ao conjunto ordenado de pontos*

$$P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_i ...., x_n]$$

tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$$

que dividem $[a, b]$ em n-subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{i-1}, x_i] .... [x_{n-1}, x_n]$$

denominados intervalos da partição.

Além disso, podemos escrever

$$\begin{array}{lll}
|[x_0, x_1]| & = x_1 - x_0 & = \Delta x_1 \\
|[x_1, x_2]| & = x_2 - x_1 & = \Delta x_2 \\
|[x_2, x_3]| & = x_3 - x_2 & = \Delta x_3 \\
. & . & . \\
|[x_{i-1}, x_i]| & = x_i - x_{i-1} & = \Delta x_i \\
. & . & . \\
|[x_{n-1}, x_n]| & = x_n - x_{n-1} & = \Delta x_n
\end{array}$$

Consideremos o intervalo $[1, 15]$. O conjunto de pontos

$$P = [1, 2, 4, 8, 12, 15] \text{ é uma partição do } [1, 15].$$

Os intervalos dessa partição são:

$$[1, 2], [2, 4], [4, 8], [8, 12] e [12, 15].$$

Naturalmente, temos:

$$1 = x_0 < 2 = x_1 < 4 = x_2 < 8 = x_3 < 12 = x_4 < 15 = x_5.$$

Sejam $[a, b]$ um intervalo,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i ...., x_n\}$$

e

$$Q = [x_0, x_1, x_2, ...y_{0..}, x_i...., x_n]$$

duas partições de $[a, b]$. Dizemos que a partição Q é um refinamento da partição P se $P \subset Q$.

Exemplo 1.2. *Consideremos o intervalo* $[1, 15]$. *Os conjuntos de pontos* $P = [1, 2, 4, 8, 12, 15]$ *e* $Q = [1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 15]$ *são duas partições de* $[1, 15]$ *tais que* $P \subset Q$. *Então* Q *é um refinamento de* P.

1.2. Integral Superior

Iniciaremos nosso estudo pela integral superior. Consideraremos uma função $f : [a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado $[a, b]$ e limitada nesse intervalo. Isto é, existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Definição 1.3. *Seja* $f : [a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja* $P = [x_0, x_1, x_2, ..., x_i...., x_n]$ *tais que* $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ *uma partição de* $[a, b]$. *Seja* M_i *o valor supremo de* f *no intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, 3, ...n$. *Denominamos soma superior em relação à partição* P *da função* f *e denotaremos por* $\overline{S}(f, P)$ *à expressão:*

$$\overline{S}(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + .. + M_n(x_n - x_{n-1})$$

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Exemplo 1.4. *Considere a função* $f : [0, 2] :\rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = xsenx$. *Na figura 1.5 podemos ver o gráfico de uma soma superior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e de uma soma superior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos), conforme ilustra a figura 3.3*

Note que aumentando o número de pontos da partição, uniformemente distribuidos, a soma superior $\overline{S}(f, P)$ se aproxima da área sob o gráfico de $f(x) = xsenx$ no intervalo $[0, 2]$.

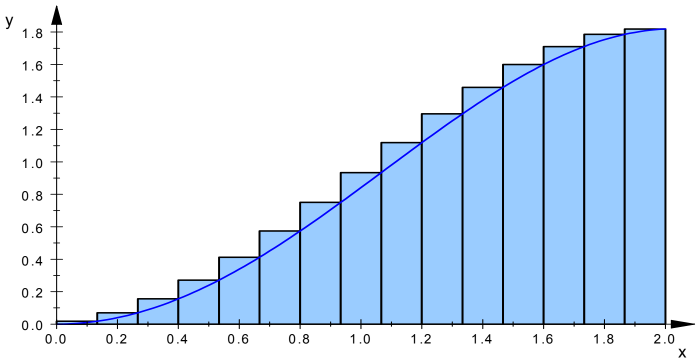


Figura 1.5: Soma superior, $\overline{S}(f,P)$, P com 15 pontos. $A = 1,863ua$

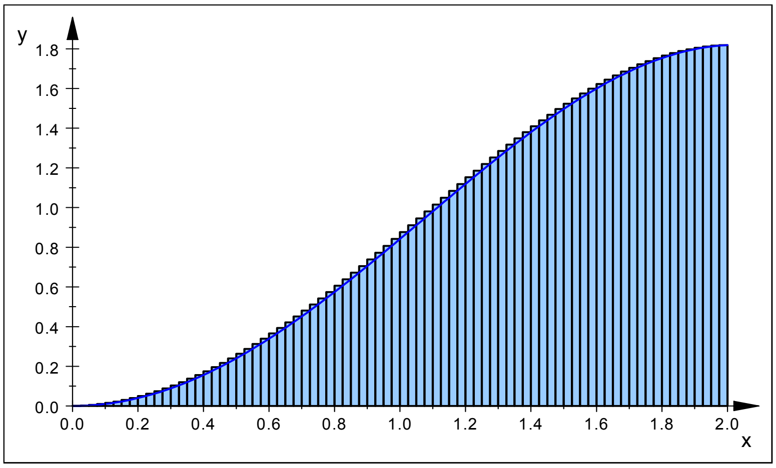


Figura 1.6: Soma superior, $\overline{S}(f,P)$, P com 80 pontos. $A = 1,746ua$

1.3. Integral Inferior

Definição 1.5. *Seja* $f : [a,b] :\to \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i...., x_n\}$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$$

uma partição de $[a,b]$. *Seja* m_i *o valor ínfimo de* f *no intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *para* $i = 1, 2, 3, ...n$. *Denominamos soma inferior em relação à partição* P *da função* f *e deno-*

taremos por $\underline{S}(f,P)$ *à expressão:*

$$\underline{S}(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + .. + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Exemplo 1.6. *Considere a função* $f : [0,2] :\to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = xsenx$. *Na figura 1.7 podemos ver o gráfico de uma soma inferior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e na figura 1.8 de uma soma inferior referente a uma partição com maior número de pontos (84 pontos).*

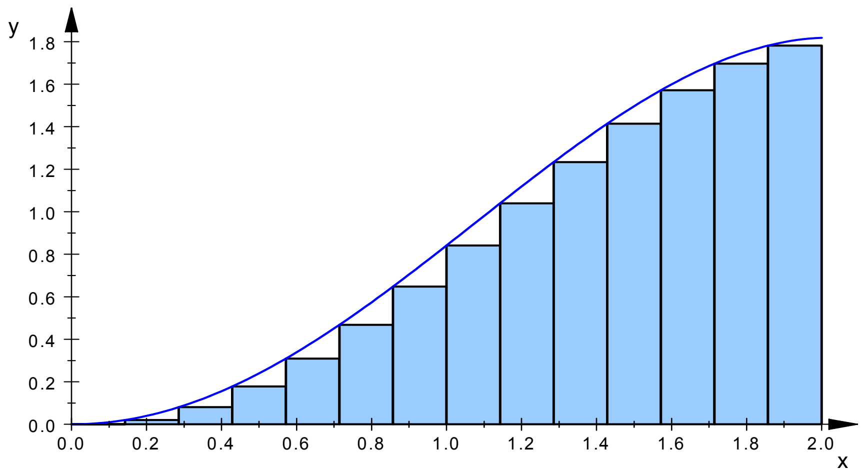


Figura 1.7: Gráfico de $\underline{S}(f,P)$, P com 15 pontos. $A = 1,642$

Note que aumentando o número de pontos de $[a,b]$ a soma inferior $\underline{S}(f,P)$ se aproxima da área sob o gráfico de $f(x) = xsenx$ no intervalo $[0,2]$.

1.4. Função Integrável

Definição 1.7. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* f *é integrável quando*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,P) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P)$$

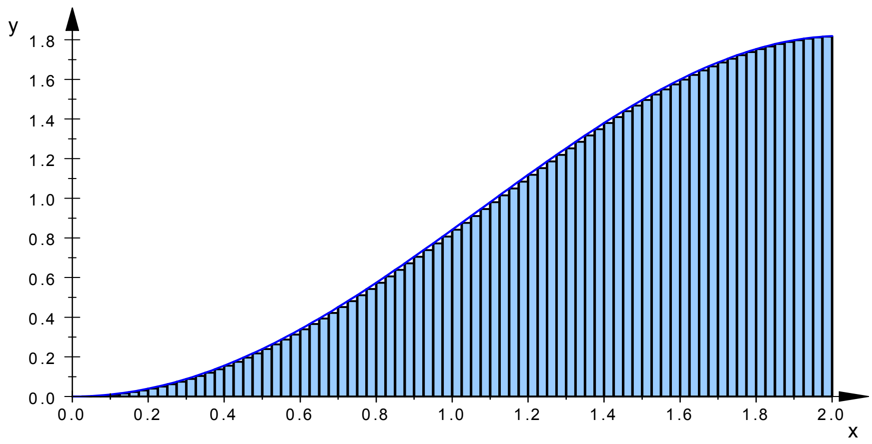


Figura 1.8: Gráfico de $\underline{S}(f, P)$, P com 84 pontos. $A = 1,718$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nesse caso, denotamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\chi)(x_i - x_{i-1}) \text{ onde } \chi \in [x_i - x_{i-1}]$$

.

Observação 1. *Para calcular integrais definidas por definição serão usadas as seguintes somas*

i. $\underbrace{1+1+1+.......1}_{n-vezes} = n$

ii. $1+2+3+......+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$

iii. $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iv. $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

v. $1^4+2^4+3^4+...+n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Exemplo 1.8. *Usando a definição de soma superior, encontre a área delimitada pelas curvas* $y = x^2 + 1$, $x = 0, x = 4$ *e* $y = 0$ *(sabendo que a função é integrável).*

Solução:

Tomamos então uma partição $P \in \; 0 \leq x \leq 4$. Seja $P(x_o, x_1, x_2, ...x_n)$, conforme ilustra a figura 1.9

$x^2 + 1$

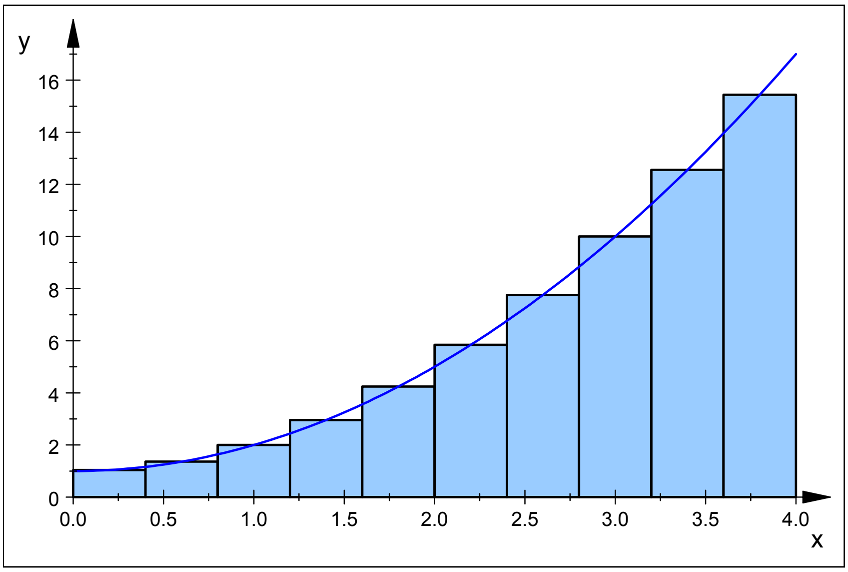


Figura 1.9: Soma superior

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$ e, portanto $\Delta x = \frac{4-(0)}{n} = \frac{4}{n}$de modo que podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ $x_o = 0$ $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x, x_3 = 3\Delta x......, x_n = n\Delta x$

Seja $M_i = f(x_{i)}$ o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ Então a soma superior

$$
\begin{aligned}
& \overline{S}(f,P) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + ... + M_n\Delta x \\
= \;& f(\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + f(3\Delta x)\Delta x + ... + f(nx)\Delta x \\
= \;& \Delta x[((\Delta x)^2+1) + ((2\Delta x)^2+1) + ((3\Delta x)^2+1) + ... + ((n\Delta x)^2+1) \\
= \;& \Delta x[1 + (\Delta x)^2 + (1+4\Delta x^2) + (1+9\Delta x^2) + ... + ((1+n^2\Delta x^2) \\
= \;& \Delta x[n + \Delta x^2(1+2^2+3^2+...n^2)] \\
= \;& \Delta x[n + \Delta x^2(\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})] \\
= \;& \frac{4}{n}[n + \left(\frac{4}{n}\right)^2(\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})] \\
= \;& 4 + \frac{64}{6}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n-1)}{n} \\
= \;& 4 + \frac{64}{6}(1+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

Logo $\int_0^4 (x^2+1)dx = \lim\limits_{n\to\infty} 4 + \frac{64}{6}(1+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = 4 + \frac{64}{3} = \frac{76}{3}$

1.5. Propriedades das Integrais

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, então são válidas as seguintes propriedades:

i. Seja c uma constante então $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

ii. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

iii. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então vale a desigualdade $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

iv. Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

v. Se f for contínua existe $c \in [a,b]$ tal que$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

vi. Seja $c \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

vii. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Observação 2. *Até o momento não exigimos que a função seja contínua. Isso porque a condição de continuidade não é necessária para que uma função seja integrável. Daqui para frente só trabalharemos com funções contínuas. A integrabilidade de funções não contínuas não será objeto de nosso estudo.*

1.6. O Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua integrável. Vamos fixar o limite inferior a e variar o limite superior. Definiremos a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Caso $f(t)$ seja positiva $F(x)$ é numéricamente igual a área do trapezóide curvilíneo.

Teorema 1.9. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é primitiva da função f. Isto é*
$F'(x) = f(x)$. . Veja na figura 1.10.

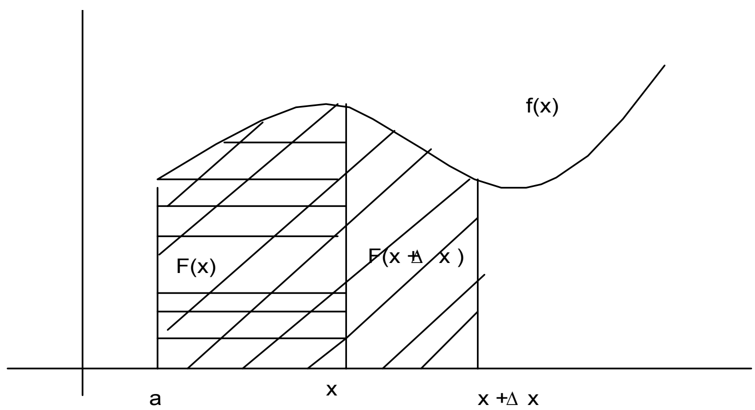


Figura 1.10: demonstração gráfica

Demonstração**:** Usaremos a definição de derivada para demonstrar o teorema.

$$
\begin{aligned}
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[F(x+\Delta x) - F(x)] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[\textstyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x}[\textstyle\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x} \textstyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\
&\quad \text{pela propriedade V} \\
&\quad \text{tem-se } \textstyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x, \text{ portanto,} \\
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\
&\quad \text{como } c \in [x, x+\Delta x] \\
&\quad \text{se } \Delta x \to 0 \text{ então } c \to x. \text{ Logo,} \\
F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} &= f(x) \text{ ou seja} \\
& F'(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

Uma consequência desse teorema é o corolário que segue:

Corolário 1.10. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f *for contínua no intervalo* $[a, b]$, *então* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivável em* (a, b) *e*

$$F'(x) = f(x)$$

A função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é denominada primitiva de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pelo teorema 1.9 toda função contínua num intervalo $[a, b]$ possui primitiva em $[a, b]$.

Teorema 1.11. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma contínua em* $[a, b]$, *tal que para todo* $x \in [a, b]$ *existe* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivável em* (a, b) *com* $F'(x) = f(x)$ *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Como

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

segue que

$$F(x) = F(x) - 0 \text{ ou } F(x) = F(x) - F(a)$$

de modo que

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a,b]$. Tomando $x = b$ tem-se :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

Trocando t por x vem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

A notação usual é

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b.$$

O teorema fundamental do cálculo permite que sejam determinadas as integrais definidas das funções contínuas em intervalos fechados sem usar o método visto para encontrar somas superiores e inferiores.

Exemplo 1.12. *Utilizando o teorema fundamental do cálculo, encontrar a área sob o gráfico de* $f : [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$

Solução: Uma representação gráfica da função pode ser vista na figura 1.11

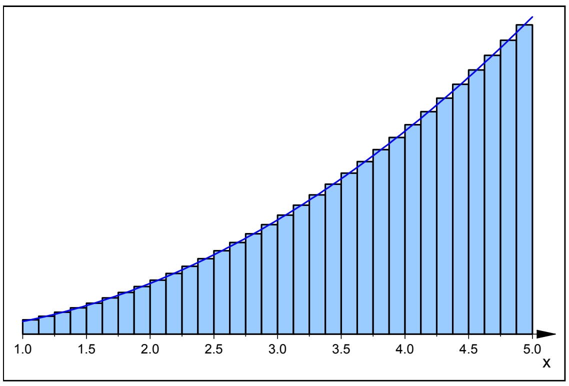


Figura 1.11: função quadrática

Pelo teorema $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$, temos:

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,|_1^5 = \frac{124}{3}$$

:

Exemplo 1.13. *Calcule a área compreendida entre o eixo do x e a curva* $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$ *no intervalo de* $[-2, 4]$.

Solução: Uma representação gráfica pode ser visualizada na figura **??**

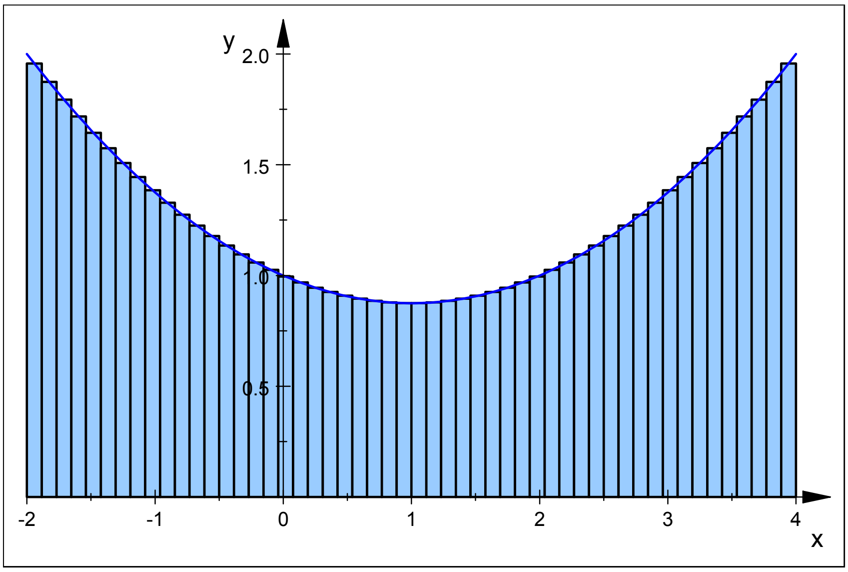


Figura 1.12:

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

tem-se

$$= \frac{1}{8}\int_{-2}^{4}((x^2 - 2x + 8)dx$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 8x] \upharpoonleft_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{4^3}{3} - 2\frac{4^2}{2} + 8(4) - (\frac{(-2)^3}{3} - 2\frac{(-2)^2}{2} + 8(-2))]$$

$$= \frac{1}{8}[\frac{64}{3} - 16 + 32 + \frac{8}{3} + 4 + 16]$$

$$= \frac{1}{8}(60) = \frac{15}{2}ua$$

Exemplo 1.14. *Encontre o valor da área delimitada pelas curvas* $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ *e* $y = 2x + 8$

Solução: Inicialmente vamos fazer uma representação gráfica, conforme ilustra a figura 1.13

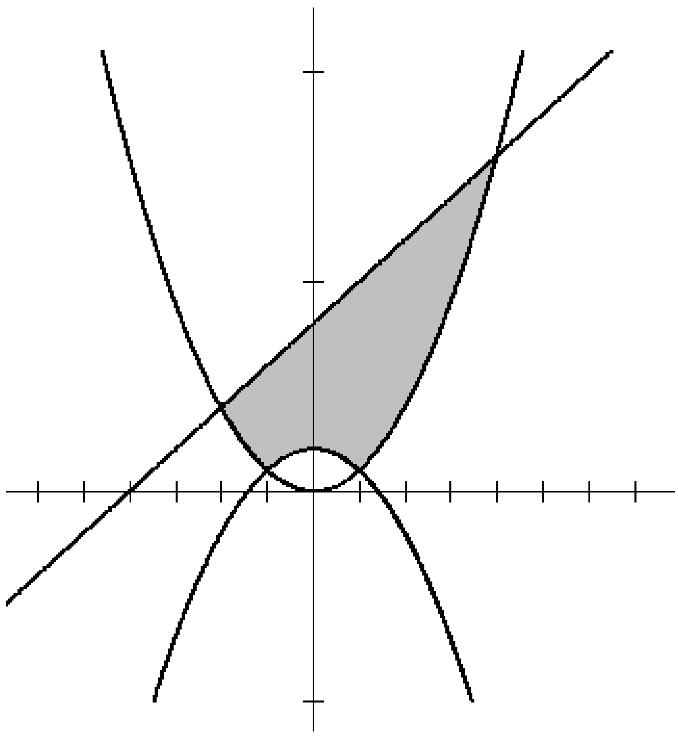


Figura 1.13: Área delimitada

Na sequência vamos encontrar as interseções das curvas

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$, Solução é: $[x = 4, y = 16]\,, [x = -2, y = 4]$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$, Solução é: $[x = 1, y = 1]\,, [x = -1, y = 1]$

Vamos dividir a área em três partes

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{-1} [(2x+8)-(x^2)]dx = \int_{-2}^{-1} (2x+8-x^2)dx = \frac{8}{3} \\
A_2 &= \int_{-1}^{1} [(2x+8-(2-x^2)]dx = \int_{-1}^{1} (2x+6+x^2)dx = \frac{38}{3} \\
A_3 &= \int_{1}^{4} (2x+8-x^2)dx = 18 \\
\text{logo } A &= A_1+A_2+A_3 = \frac{8}{3}+\frac{38}{3}+18 = \frac{100}{3}
\end{aligned}
$$

Fórmulas Clássicas de Resolver Integal (Revisão)

Observação 3. *Vamos relembrar do cálculo I, algumas fórmulas clássicas do cálculo integral que permitem resolver uma série de problemas que envolvem o cálculo da integral.*

i. Mudança de variável

Teorema 1.15. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que g' é integrável e $g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$ e, além disso $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Demonstração: Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com g' integrável e $g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$ com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então f possui uma primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

Por outro lado, pela regra da cadeia temos

$$(F\circ g)'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)$$

para todo $t \in [\alpha,\beta]$, consequentemente,

$$(F\circ g)(t) : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$$

é uma primitiva da função integrável $f(g(t))\,g'(t)$. Portanto,obtém-se:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Exemplo 1.16. *Calcular a integral definida* $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ *usando o teorema 1.15*

Solução: Primeiro vamos encontrar a função $g(t)$.

Seja $t^2 = x - 1$, então podemos escrever $x = t^2 + 1$ e assim obtemos $g(t) = t^2 + 1$. A derivada de g é $g'(t) = 2t$.

Vamos determinar os valores de α e β. Sendo $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$ vem

$$\begin{array}{rcl} g(\alpha) = a & e & g(\beta) = b \\ \alpha^2 + 1 = 1 & & \beta^2 + 1 = 5 \\ \alpha^2 = 0 & & \beta^2 = 4 \\ \text{donde vem } \alpha = 0 & e & \beta = 2 \end{array}$$

Na sequência determinaremos $f(g(t))$. Como $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ vem

$$\begin{array}{rcll} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} & ou & f(g(t)) = \frac{\sqrt{g(t)-1}}{g(t)} & \text{donde vem} \\ f(g(t)) = \frac{\sqrt{t^2+1-1}}{t^2+1} & \text{ou seja} & f(g(t)) = \frac{t}{t^2+1} & \end{array}$$

Finalmente, podemos determinar o valor da integral.

$$\begin{aligned}
\text{como} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt \qquad \text{vem} \\
\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx &= \int_0^2 \left(\frac{t}{t^2+1}\right) 2tdt \\
&= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+1}dt \\
&= 2[\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t^2+1}] \\
&= 2[t|_0^2 - arctgt|_0^2] \\
&= 2[2 - (arctg2 - arctg0)] \\
&= 2[2 - arctg2 - 0] \\
&= 4 - 2arctg2
\end{aligned}$$

ii. Integração por partes

Teorema 1.17. *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções que possuem derivadas integráveis então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = fg\,|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{1.1}$$

Na prática, costumamos fazer
$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$
e
$v = g(x) \Rightarrow g'(x)dx$
substituindo em 1.1, vem:

$$\int_a^b udv = uv \mid_a^b - \int_a^b vdu$$

Exemplo 1.18. *Determine o valor da integral* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 xdx$

Solução:
Nesse caso, fazemos:
$u = \sin^2 x \Rightarrow du = 2\sin x \cos xdx$
$dv = senxdx \Rightarrow v = \int senxdx = -\cos x$
Então,
$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 xdx = \sin^2 x(-\cos x) \mid_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x(2\sin x \cos x)dx$
$= -\sin^2 x \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{3}} +2 \mid_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin xdx$
$= (-\sin^2 x \cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3}) \mid_0^{\frac{\pi}{3}}$
$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{24}$

iii. Teorema do valor médio para integrais

O teorema do valor médio para integrais equivale à propriedade V para integrais, isto é:

Se f for contínua existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,[b-a]$

Exemplo 1.19. *Uma vez que* $f(x) = x^2$ *é contínua no intervalo* $[1, 4]$, *o teorema do Valor Médio para Integrais garante exisitir um número* c *em* $\{1, 4]$, *tal que*

$$\begin{aligned}
\int_1^4 x^2dx &= f(c)(4-1) = c^2(3) = 3c^2 \\
&\text{Mas} \\
\int_1^4 x^2dx &= \frac{x^3}{3} \mid_1^4 = 21 \text{ logo} \\
3c^2 &= 21 \text{ ou } c = \pm\sqrt{7} \\
\text{Portanto, } c &= \pm\sqrt{7} \text{ é o número em } [1, 4], \text{ cuja existência está garantida por } \textbf{??}
\end{aligned}$$

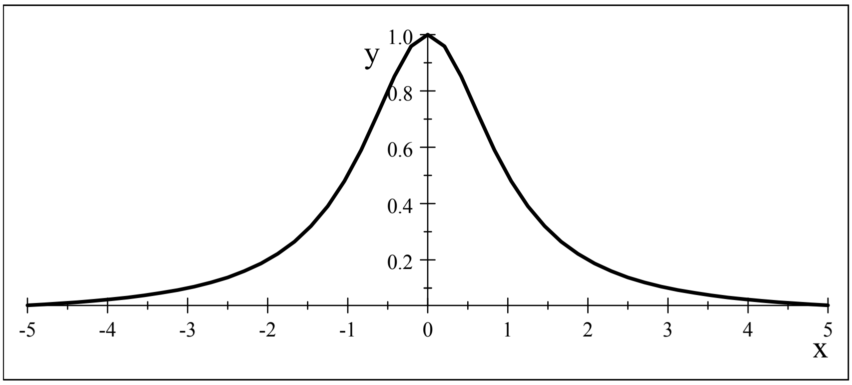
1.7. Integrais Impróprias

Definição 1.20. *Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in [a, \infty)$, então vale a igualdade*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

se o limite $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existir.

Exemplo 1.21. *Encontrar o valor numérico da integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$. Veja o gráfico de f na* **??**



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solução: Pela definição 1.20 temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} arctgx|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} [arctgb - arctg0] \\
&= \lim_{b\to\infty} arctgb \\
&= \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Definição 1.22. *Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, b]$, então vale a igualdade*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

se o limite $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existir.

Exemplo 1.23. *Encontrar o valor numérico da integral* $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.22 temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} arctgx|_{a}^{0} \\
&= \lim_{a\to-\infty} [arctg0 - arctga] \\
&= - \lim_{a\to-\infty} arctga \\
&= -(-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Definição 1.24. *Seja* $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua para todo* $x \in (-\infty, \infty)$, *então vale a igualdade*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

se os limites $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx$ *e* $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$ *existirem.*

Exemplo 1.25. *Encontrar o valor numérico da integral*$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.24 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \tfrac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \tfrac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} arctgx|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty} arctgx|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} arctgx|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty} [arctg0 - arctga] + \lim_{b\to\infty} [arctgb - arctg0] \\
&= - \lim_{a\to-\infty} arctga + \lim_{b\to\infty} arctgb \\
&= -(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

1.8. Integral de uma Função Descontínua num ponto $\mathbf{c} \in [a,b]$

Definição 1.26. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, exceto no ponto $c \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,dx + \lim_{\beta \to c^+} \int_\beta^b f(x)\,dx$$

se os limites $\lim\limits_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,dx$ e $\lim\limits_{\beta \to c^+} \int_\beta^b f(x)\,dx$ existirem.

Exemplo 1.27. *Encontrar o valor numérico da integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.*

Observe a representação gráfica da função f na figura 1.14

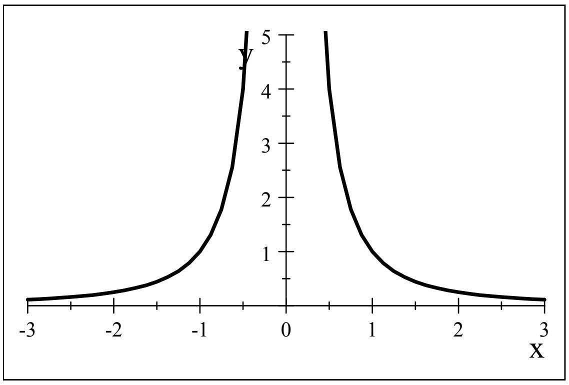


Figura 1.14: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua em todo ponto pertencente ao intervalo $[-1,1]$, exceto em $x = 0$. Logo, pela definição 1.26 temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\alpha \to 0^-} \int_{-1}^{\alpha} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\beta \to 0^+} \int_{\beta}^{1} \frac{dx}{x^2} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\alpha} + \lim_{\beta \to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{\beta}^{1} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^-} \left[-\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{-1}{-1}\right)\right] + \lim_{\beta \to 0^+} \left[-\frac{1}{1} - \left(\frac{-1}{\beta}\right)\right] \\
&= [\infty - 1] + [-1 + \infty] = \infty
\end{aligned}$$

Consequentemente, a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não é integrável no intervalo $[-1,1]$.

Exercícios

1. Encontre, se existir, o valor de cada uma das integrais abaixo

$a) \int_0^1 \left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$	$e) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$	$i) \int_{-\infty}^{1} e^x dx$	$m) \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$
$b) \int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)dx$	$f) \int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$	$j) \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$	$n) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$
$c) \int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx$	$g) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	$k) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$o) \int_0^1 \frac{dx}{x^3}$
$d) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$h) \int_0^{\infty} e^{-x}dx$	$l) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	$p) \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$

2. Dadas as funções $f, g : [1,3] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x+2$ e $g(x) = x^2+x$ encontre $\overline{S}(f,P)$ e $\overline{S}(g,P)$.

3. Dada a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2+2$ encontre $\overline{S}(f,P)$.

4. Seja $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Verifique se $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

5. Seja $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Verifique se$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe.

1.9. Aplicações da Integral Definida

Cálculo da área em coordenadas retangulares

Se a função $f(x)$ for não negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a,b]$, então a área da figura limitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por outro lado, se a função $f(x)$ for negativa, isto é, $f(x) < 0$ no intervalo $[a,b]$, então a área da figura limitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ é dada por

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ ou } A = \int_b^a f(x)\,dx$$

Exemplo 1.28. *Encontrar a área sob o gráfico da função* $f(x) = 2x$ *no intervalo* $[-2,2]$.

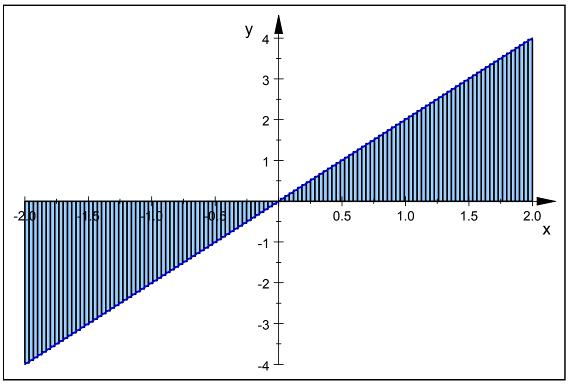


Figura 1.15: $f(x) = 2x$

Solução: a representação gráfica de f pode ser observada na figura 1.15

Essa função tem imagem negativa no intervalo $[-2, 0]$ e não negativa no intevalo $[0, 2]$. Desse modo, devemos proceder como segue:

$$A = \int_{-2}^{2} 2x dx$$

$$= -\int_{-2}^{0} 2x dx + \int_{0}^{2} 2x dx$$

$$= -x^2|_{-2}^{0} + x^2|_{0}^{2}$$

$$= -\left[(0)^2 - (-2)^2\right] + 2^2 - 0^2$$

$$-[-4] + 4 = 8ua$$

Logo, a área sob o gráfico da função $f(x) = 2x$ no intervalo $[-2, 2]$ é 8 unidades de área.

Exemplo 1.29. *Achar a área da região delimitada pelos gráficos de* $y + x^2 = 6$ *e* $y + 2x = 3$

Solução: Vamos inicialmente fazer uma representação gráfica da área delimitada, conforme ilustra a figura 1.16

Encontrando a interseção do sistema $\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$ temos: $6 - x^2 = 3 - 2x \Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ e portanto os pontos de interseção são $P_1 = (-1, 5)$ e $P_2 = (3, -3)$. Portanto a área é igual a área da parábola menos a área da reta no intervalo de [-1,3].

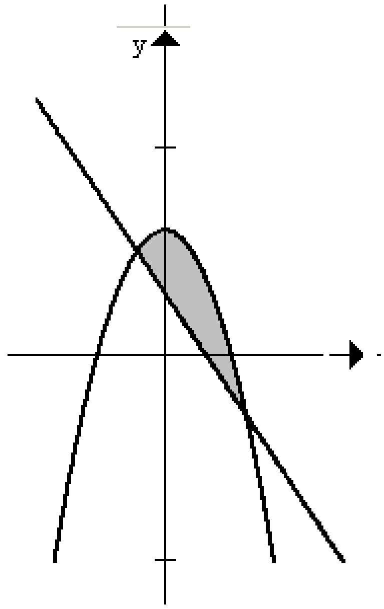


Figura 1.16: área delimitada

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3}[(6-x^2)-(3-2x)]dx \\
&= \int_{-1}^{3}(3-x^2+2x)dx \\
&= 3x - \frac{x^3}{3} + x^2|_{-1}^{3} \\
&= 3.3 - \frac{27}{3} + 9 - (-3 + \frac{1}{3} + 1) = \frac{32}{3} \text{ u.a}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.30. *Calcular a área da região delimitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$*.*

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Portanto, devemos determiná-lo. O intervalo fica determinado se conhecermos os pontos de interseção das curvas. Encontramos tais pontos resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem da igualdade $x^2 = \sqrt{x}$ e os valores de x que tornam a sentença verdadeira são $x = 0$ e $x = 1$, desse modo a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ fica determinada se $x \in [0, 1]$. Graficamente, podem ser observado na seqüência de figuras, a área sob o gráfico de $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ (na figura 1.17), a área sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$

$[0, 1]$ (na figura 1.18), e a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ no intervalo $[0, 1]$ (na figura 1.19). Como podemos observar a área procurada é igual a diferença entre as áreas um e dois. Assim, temos

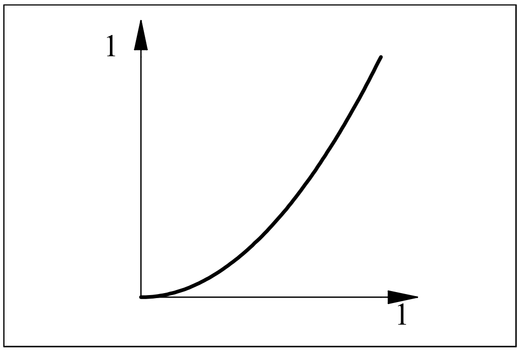


Figura 1.17: Área um

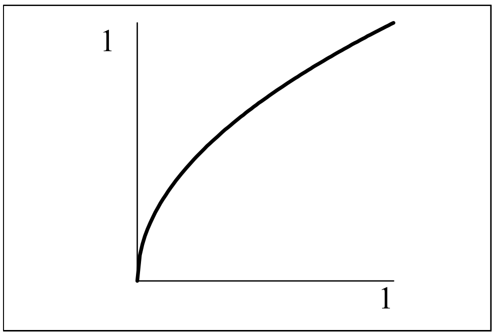


Figura 1.18: Área dois

Área procurada = (área dois) − (área um)
$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx$
$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$
$A = \frac{1}{3}$

Logo, a área procurada é $A = \frac{1}{3}$.

Exemplo 1.31. *Calcule a área da região hachurada*

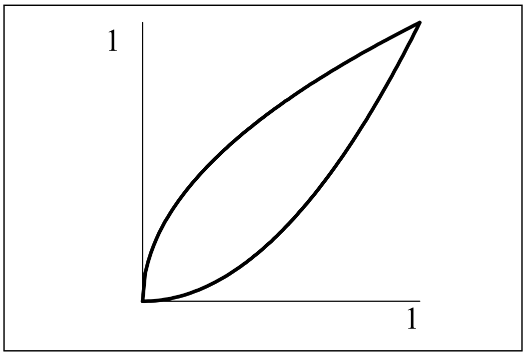
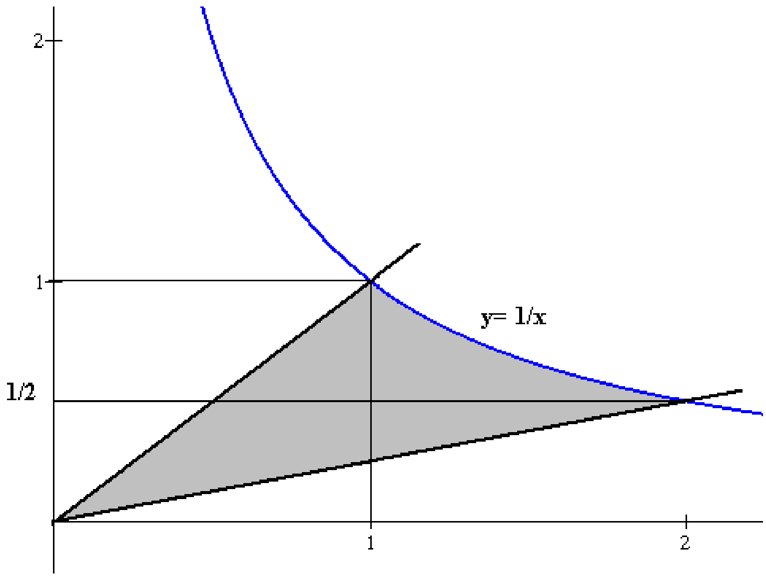


Figura 1.19: Área procurada



Solução:

Primeiro vamos identificar a lei que define as funções lineares presente no gráfico:

Uma reta passa pelos pontos (0,0) e (1,1) e a outra passa pelos pontos $(0,0)$ e $(2,\frac{1}{2})$, portanto as equações das retas são, respectivamente:

$y = x$

$y = \frac{1}{4}x$

Existem várias maneiras de calcular esta área, uma delas está apresentanda na sequência:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (x - \frac{1}{4}x)dx + \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x)dx \\
A &= \frac{3}{4}\int_0^1 (x)dx + \int_1^2 (\frac{1}{x})dx - \frac{1}{4}\int_1^2 xdx \\
A &= \frac{3}{8}x^2 \mid_0^1 + (\ln|x| - \frac{1}{8}x^2) \mid_1^2 \\
A &= \frac{3}{8} + (\ln(2) - \frac{1}{2} - [\ln(1) - \frac{1}{8}]) \\
A &= \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) = \ln(2)
\end{aligned}
$$

Portanto, a área é igual a $A = \ln(2)$ u.a

Área delimitada por curvas escritas em equações paramétricas

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ que delimita uma região R. Se f for escrita em equações paramétricas dadas por exemplo, por $x = r\cos t$ e $y = rsent$, $t \in [\alpha, \beta]$ e podemos escrever $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, e, consequentemente, $a = \phi(\alpha)$ e $b = \psi(\beta)$. Desse modo, obtemos $dx = \phi'(t)dt$ e sendo $y = f(x)$, temos $f(x) = \psi(t)$. Assim, pelo teorema 1.15 vem:

Conforme vimos, a área de uma região retangular é dada por :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b ydx$$

Fazendo a substituição $x = \psi(t)$ temos $dx = \phi'(t)dt$ obtendo em coordenadas paramétricas a fórmula para o cálculo de área como:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt$$

Exemplo 1.32. *Encontrar a área da elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *definida pelas equações paramétricas* $\phi(t) = a\cos t$ *e* $\psi(t) = bsent$.

Solução: As equações paramétricas da elipse são

$$\phi(t) = a\cos t \text{ e } \psi(t) = bsent$$

.Desse modo, temos

$$\phi'(t) = -asentdt$$

Vamos determinar os valores de α e β. Sendo $\phi(\alpha) = 0$ e $\phi(\beta) = a$ vem

$$\phi(\alpha) = 0 \qquad e \quad \phi(\beta) = a$$

$$a\cos\alpha = 0 \qquad a\cos\beta = a$$

$$\cos\alpha = 0 \qquad \cos\beta = 1$$

$$\text{donde vem } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad e \qquad \beta = 0$$

Portanto, desse modo, obteremos a quarta parte da área da elipse. A área total será essa parcial multiplicada por quatro.

$$\begin{array}{lll}
\text{como } \int_a^b f(x)\,dx & = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt & \text{vem} \\
\int_a^b f(x)\,dx & = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 bsent(-asent)dt & \\
 & = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen^2tdt & \\
 & = \frac{4}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt & \\
 & = 2ab\left(t - \frac{1}{2}sen2t\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} & \\
 & = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sen2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) & \\
 & = ab\pi &
\end{array}$$

Logo, a área da elipse é $A = ab\pi$

Exemplo 1.33. *Calcular a área interior a elipse* $E_1 = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ *e exterior a elipse* $E_2 = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

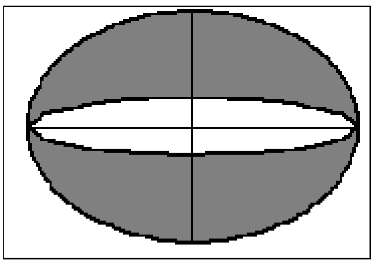


Figura 1.20:

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 [4\sin t(-2\sin t) - \sin t(-2\sin t)]dt$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-8\sin^2 t + 2\sin^2 t)dt$$

$$= -4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin^2 t dt =$$

$$= 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt$$

$$= 12(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\mid_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 12\frac{\pi}{2} = 6\pi u.a$$

Área de um setor cuvilíneo em coordenadas polares

Seja $\rho = f(\theta)$ uma função contínua que descreve uma curva em coordenadas polares no intervalo $[\alpha, \beta]$. Como nosso interesse é determinar a área da região delimitada por $\rho = f(\theta)$ vamos tomar uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, conforme ilustra a figura 1.21

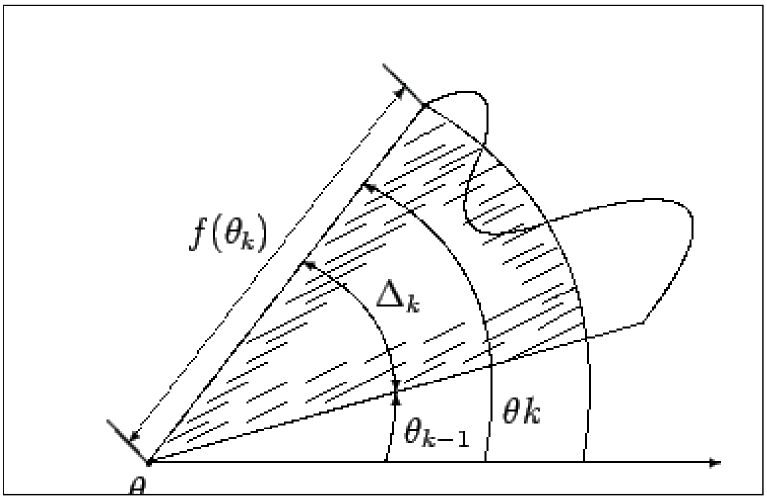


Figura 1.21: Área de um setor

Seja

$$X = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, ...\theta_n\}$$

uma partição de $[\alpha, \beta]$ em que

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < .... < \theta_n = \beta$$

Sejam,

$$\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_{3,} ....\Delta\theta$$

os subarcos da partição. Seja ρ_i o comprimento do raio correspondente a um ângulo $\xi_i \in \Delta\theta$, isto é $\theta_{i-1} \leq \xi_i \leq \theta_i$.

A área do setor circular de raio ρ_i e arco $\Delta\theta_i$ é dada por

$$A_i = \frac{1}{2} (\rho_i)^2 \Delta\theta_i$$

e a área aproximada área da região delimitada por $\rho = f(\theta)$ é dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\rho_i)^2 \Delta\theta_i$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo da partição X, de maior diâmetro. Então se n tende a infinito segue que $|\Delta\theta|$ tende a zero. Desse modo podemos escrever

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\rho_i)^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

ou

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \qquad (1.2)$$

Exemplo 1.34. *Ache a área exterior à cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$ e interior ao círculo $\rho = 1$*

Solução: A figura 1.22 ilustra a área procurada

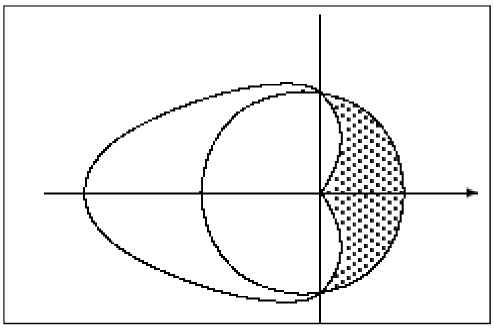


Figura 1.22: Área delimitada

A área é dada por 1.2

$$A = 2\frac{1}{2} \int \cdot_0^{\frac{\pi}{2}} [(1)^2 - (1 - \cos\theta)^2] d\theta$$

$$= \int .^{\frac{\pi}{2}}_{0} (2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int .^{\frac{\pi}{2}}_{0} [2\cos\theta - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)] d\theta$$

$$= 2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{4}$$

Portanto, a área é igual $A = 2 - \frac{\pi}{4}$ u.a

Exemplo 1.35. *Escreva, em coordenadas polares, a integral que calcula a área exterior ao círculo $\rho = 1$ e interior a rosácea $\rho = 2\cos(2\theta)$*

Solução: a figura 1.23 ilustra a área delimitada

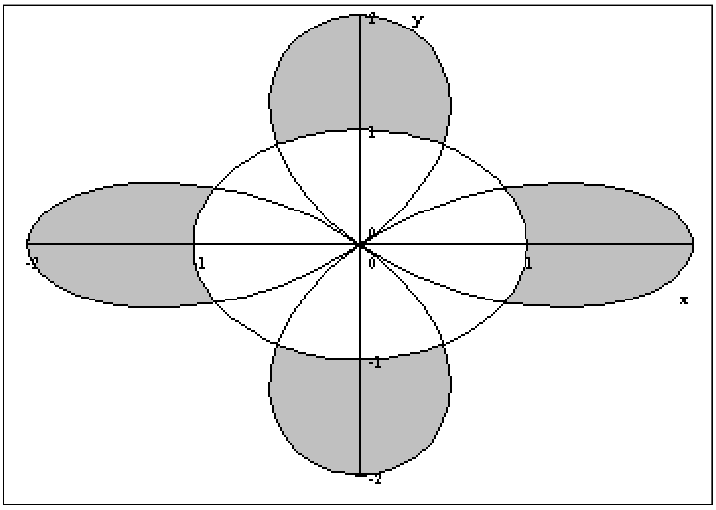


Figura 1.23: Área delimitada

Inicialmente, vamos determinar os pontos de interseção das duas curvas: $\begin{cases} \rho = 2\cos(2\theta) \\ \rho = 1 \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} 2\cos(2\theta) = 1 \\ \cos 2\theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \text{ (no I quad)} \end{cases}$$

Vamos calcular a área no intervalo de $[0, \frac{\pi}{6}]$ e multiplicar por 8, já que as demais são equivalentes. Utilizando a fórmula 1.2

e verificando que a área total é igual a área da rosácea menos a área do círculo obtemos:

$$A = 8.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [(2\cos(2\theta))^2 - (1)^2] d\theta$$

Comprimento de um arco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ cujo gráfico descreve o arco $\widehat{AB}$, conforme ilustra a 1.24

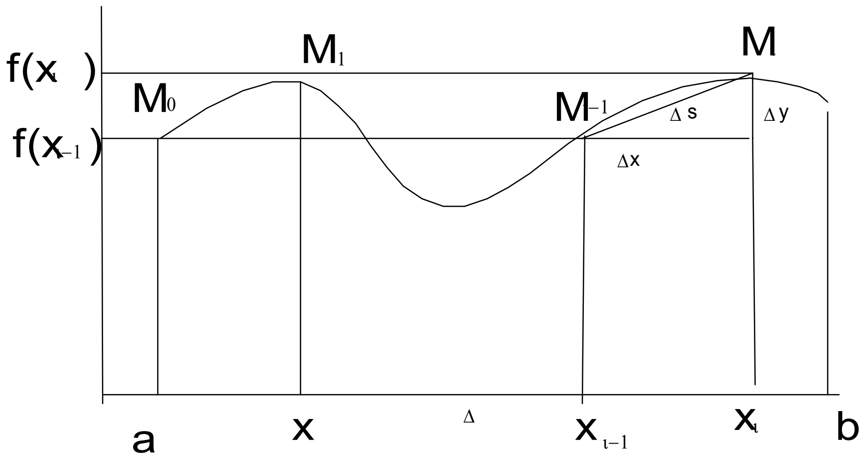


Figura 1.24: Comprimento de arco

Vamos dividir o arco $\widehat{AB}$ em subarcos por meio da partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, ..., M_n\}$$

em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ..... < M_n = B$$

e abscissas são

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n.$$

Tracemos as cordas

$$\overline{M_0M_1}, \overline{M_1M_2}, ..., \overline{M_{i-1}M_i}, ..., \overline{M_{n-1}M_n}$$

e designemos os seus comprimentos por

$$\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_i, ..., \Delta S_n.$$

Obtem-se então a linha poligonal

$$AM_0M_1, ..., M_{n-1}B$$

ao longo do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento aproximado é:

$$l_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_i + ... + \Delta S_n$$

ou

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.(I)$$

Mas ΔS_i é a hipotenusa do triângulo de lados Δx_i e Δy_i. de modo que podemos escrever

$$(\Delta S_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

dividindo tudo por Δx_i vem

$$\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2$$

ou

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

ou seja

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \text{ (II)}$$

Como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ e } \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

segue que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

e pelo teorema de Lagrange, existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

Portanto, obtemos $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$ (III).

Agora substituindo (II) em (I) resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \text{ (IV)}$$

substuindo (III) em (IV)resulta

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

Seja $|\Delta x|$ o intervalo de maior diâmetro de cada partição de $\widehat{AB}$. Então, se $n \to \infty$ segue que $|\Delta x| \to 0$ e $(\xi_i) \to x$. Assim:

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_i\right)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$$

Portanto, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx \tag{1.3}$$

Exemplo 1.36. *Determinar o comprimento do arco na função* $y = \sqrt{x}$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: a figura 1.25 ilustra o comprimento de arco

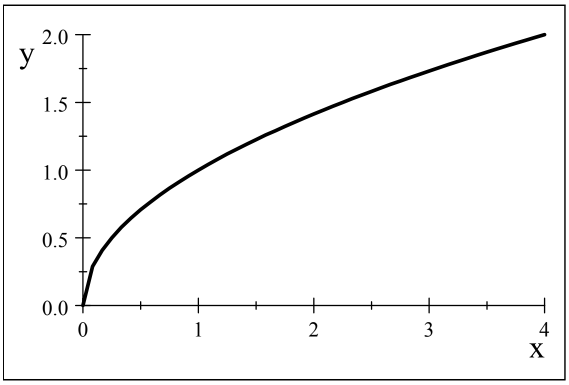


Figura 1.25: $f(x) = \sqrt{x}$

Sendo $y = f\left(x\right) = \sqrt{x}$ temos $f'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, aplicando a fórmula 1.3 vem

$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$
$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx$
$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$
$l = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx$
$l = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}} dx$

tendo $t^2 = x$ temos $dx = 2tdt$, $t \in [0, 2]$.
$l = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt$
a primitiva de $\sqrt{4t^2 + 1}$é tabelada, logo
$l = \frac{1}{2} t\sqrt{4t^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln\left(2t + \sqrt{4t^2 + 1}\right) |_0^2$
Cujo resultado é
$l = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln\left(\sqrt{17} + 4\right)$

Comprimento de um arco em coordenadas paramétricas

Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ para $t \in [\alpha, \beta]$ as equações paramétricas de $y = f(x)$. Então, como $dx = \phi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$ e $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ podemos escrever:

$$f'(x) = \tfrac{dy}{dx}$$
$$f'(x) = \frac{\psi'(t)\,dt}{\phi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Substituindo na fórmula 1.3 vem

$$\begin{aligned}
l &= \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\dfrac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)^2}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \dfrac{(\psi'(t))^2}{(\phi'(t))^2}}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\dfrac{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}{\phi'(t)^2}}\phi'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \dfrac{\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}{\phi'(t)}x'(t)\,dt \\
l &= \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt
\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco em coordenadas paramétricas é dado por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt \tag{1.4}$$

Exemplo 1.37. *Calcular o comprimento de arco da astróide dada por:*

$$\phi(t) = 3\cos^3 t$$

e

$$\psi(t) = 3sen^3 t.$$

Solução: Podemos encontrar o comprimento do subarco no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por quatro. Como $\phi'(t) = -9\cos^2 sent$, $\psi'(t) = 9sen^2 t\cos t$ e $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ substituindo na fórmula 1.4 vem

$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$
$l = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-9\cos^2 tsent)^2 + (9sen^2 t\cos t)^2} dt$
$l = 4 \cdot 9 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 tsen^2 t + sen^4 t\cos^2 t} dt$
$l = 36 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 tsen^2 t\,[\cos^2 t + sen^2]} dt$
$l = 36 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos tsentdt$
$l = 36 \frac{sen^2 t}{2} |_{0}^{\frac{\pi}{2}}$
$l = 18uc$

Portanto, o comprimento é $l = 18$ u.c

Exemplo 1.38. *As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano é dada por :*

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Qual a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$?
Solução:
Aplicando a fórmula 1.4
temos: $\begin{cases} \phi'(t) = 3 \\ \psi'(t) = (3t^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$ logo, teremos:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{3^2 + (3t^{\frac{1}{2}})^2} dt \\ l &= \int_0^1 \sqrt{9 + 9t} dt \\ l &= 3\int_0^1 \sqrt{1+t} dt \\ l &= 3\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \mid_0^1 \\ l &= 2(2)^{\frac{3}{2}} - 2(1)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} - 2 \text{ uc} \end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$ é $l = 4\sqrt{2} - 2$ uc

Comprimento de arco em coordenadas polares

Sejam $\phi(t) = \rho\cos\theta$ e $\psi(t) = \rho sen\theta$ as coordenadas polares da curva $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Então, substituindo ρ por $f(\theta)$ nas equações paramétricas vem

$\phi(\theta) = f(\theta)\cos\theta$ e $\psi(\theta) = f(\theta)\,sen\theta$

donde vem

$\phi'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,sen\theta$ ou $\phi'(\theta) = \rho'\cos\theta - \rho sen\theta$

$\psi'(\theta) = f'(\theta)\,sen\theta + f(\theta)\cos\theta$ ou $\psi'(\theta) = \rho' sen\theta + \rho\cos\theta$

Agora

$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (\rho'\cos\theta - \rho sen\theta)^2 + (\rho' sen\theta + \rho\cos\theta)^2$

Resolvendo os produtos notáveis e simplificando obtemos

$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (\rho')^2 + \rho^2$

Substituindo na equação 1.4 obtemos a fórmula para o cálculo do comprimento de arco em coordenadas polares dada por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\theta \tag{1.5}$$

Exemplo 1.39. *Encontrar o comprimento de arco do cardióide $\rho = a(1+\cos\theta)$.*

Solução: Podemos determinar o comprimento do arco no primeiro e segundo quadrante e multipicar por dois. Como $\rho = a(1+\cos\theta)$ tem-se $\rho' = -asen\theta$. Substituindo na fórmula 1.5 vem

$$
\begin{aligned}
&l = \textstyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\theta \\
&l = 2\textstyle\int_0^\pi \sqrt{(-asen\theta)^2 + (a(1+\cos\theta))^2}\,d\theta \\
&l = 2a\textstyle\int_0^\pi \sqrt{sen^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\,d\theta \\
&l = 2a\textstyle\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\,d\theta \\
&l = 2a\cdot 2\textstyle\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&l = 4a\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\theta|_0^\pi \\
&l = 8a\ uc
\end{aligned}
$$

Logo, o comprimento de arco do cardióide $\rho = a(1+\cos\theta)$ é $l = 8a\ uc$.

Exemplo 1.40. *Mostre, usando coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.*

Solução:

Em paramétrica, a circunferência é representada por:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases}$$

O comprimento de arco em paramétrica é $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
Usando a simetria temos:

$$
\begin{aligned}
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} dt \\
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\
l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r dt \\
l &= 4rt \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r
\end{aligned}
$$

Logo o comprimento da circunferência é $2\pi r$.

1.10. Volume de um sólido de revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$. (ver figura 1.26)

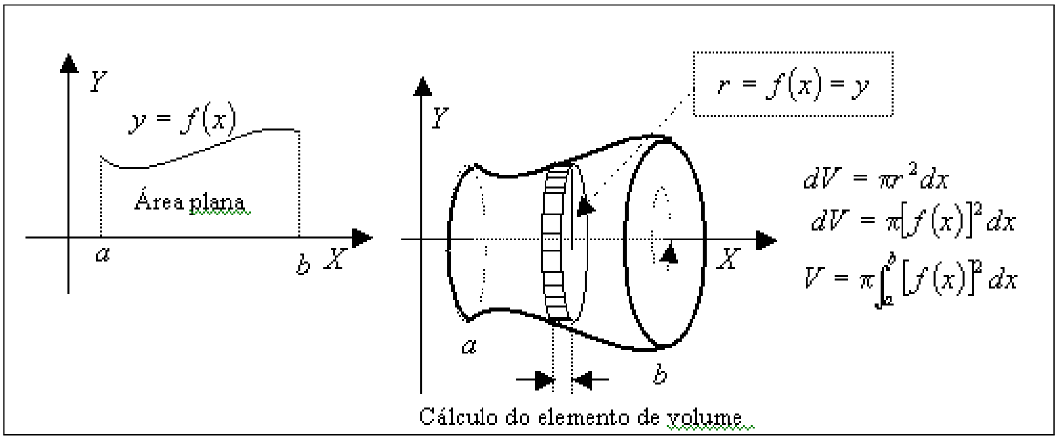


Figura 1.26: Rotação de uma curva em torno do eixo x

Demonstração: Seja

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ e sejam

$$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$$

os subintervalos da partição. Seja $\xi_i \in \Delta x_i$, então o volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ comprimento Δx_i é dado por

$$V_i = \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

e o volume aproximado do sólido será dado pela soma dos volumes dos $n - cilindros$, isto é,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro, então se $n \to \infty$ segue que $|\Delta\theta| \to 0$, $\xi_i \to x$ e o volume V do sólido T será dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Portanto, o volume de um sólido de revolução no intervalo $[a, b]$ é dado pela fórmula:

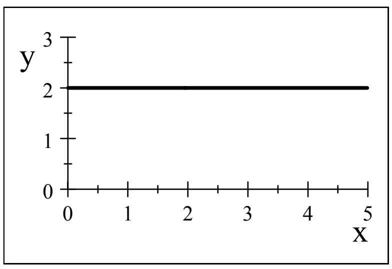
$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \tag{1.6}$$

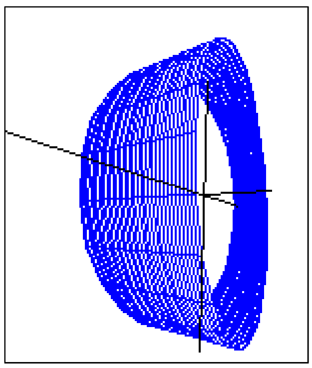
Exemplo 1.41. *A fim de que não haja desperdício de ração e seus animais estejam bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente (conforme figura 1.27) com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a figura abaixo. Determine, usando sólido de revolução, a capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos.*

Vamos encontrar o volume do cilindro e do cone

$$V = V_1 + V_2$$

Vamos rotacionar a reta $y = 2$ em torno do eixo x





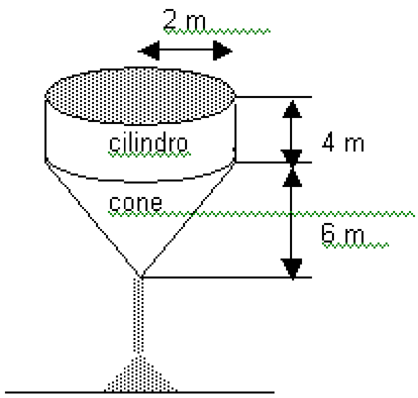
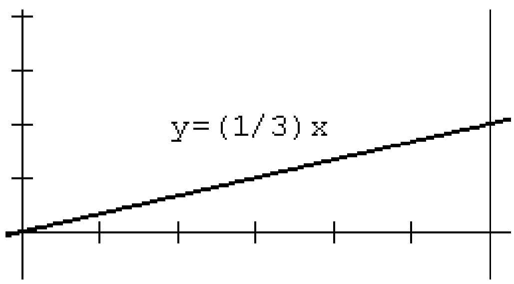
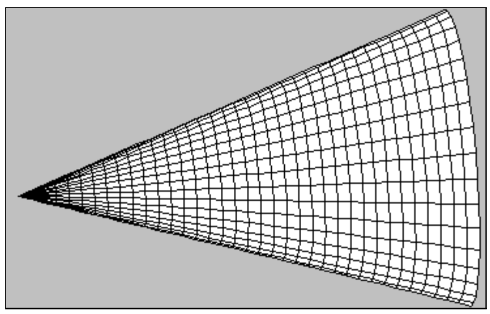


Figura 1.27:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \pi \int_0^4 2^2 dx \\
V_1 &= 4\pi 4 = 16\pi
\end{aligned}
$$

como temos um raio igual a $r = 3$ e $h = 6$ para o cone, obtemos a reta $y = \frac{1}{3}x$ para rotacionar em torno do eixo x





$$
\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{3}x\right)^2 dx \\
V_2 &= \frac{1}{27}\pi x^3 \mid_0^6 = \frac{6^3}{27}\pi = 8\pi \\
\text{portanto o } V &= 16\pi + 8\pi = 24\pi \text{ uv}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.42. *Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $f(x) = x^3$, no intervalo [1,2].*

Resolução : Observe a figura 1.28

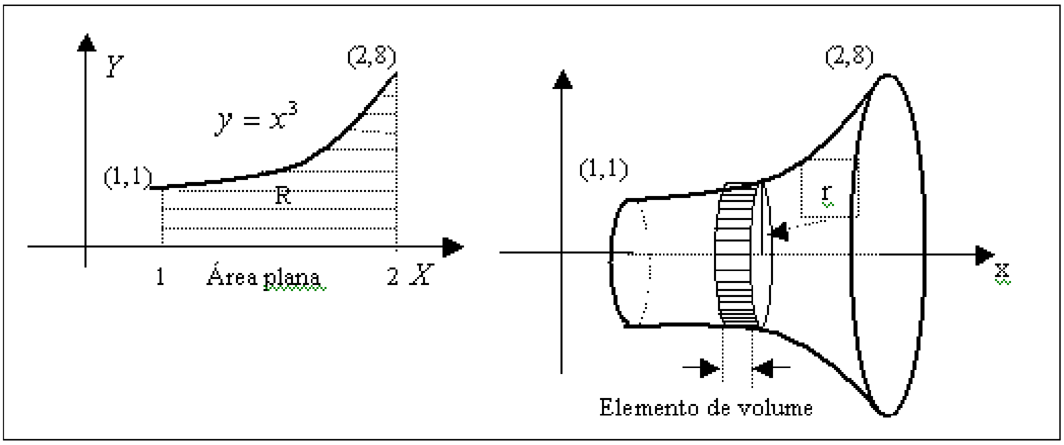


Figura 1.28: fonte:Pilchowski (2004)

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

$$V = \pi \int_1^2 \left[x^3\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^6 dx$$

$$= \pi \frac{x^7}{7} \Big|_1^2$$

$$= \pi[\frac{2^7}{7} - \frac{1}{7}] = \frac{127\pi}{7} u.v$$

Portanto, o volume é $V = \frac{127\pi}{7} u.v$

Exemplo 1.43. *Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x.*

ver figura 1.29

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Portanto, devemos determiná-lo. O intervalo fica determinado se conhecermos os pontos de interseção das curvas. Encontramos tais pontos resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem

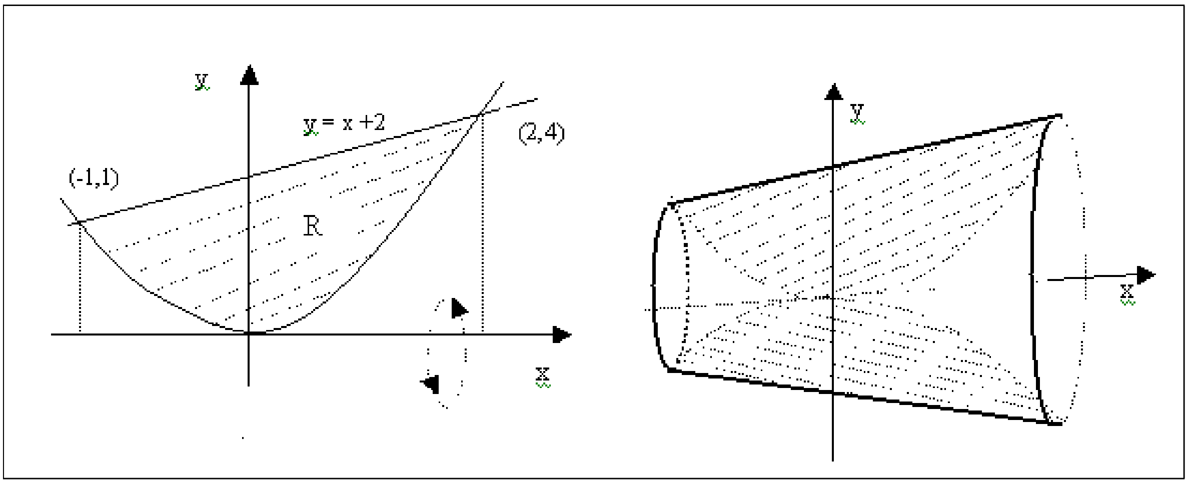


Figura 1.29: fonte:Pilchowski (2004)

da igualdade $x^2 = x + 2$ e os valores de x que tornam a sentença verdadeira são $x = -1$ e $x = 2$.

Aplicado a fórmula 1.6 vem:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} [x+2]^2\, dx - \pi \int_{-1}^{2} [x^2]^2\, dx \\
V &= \pi \left(\int_{-1}^{2} (x^2 + 4x + 6 - [x^4])\, dx \right) \\
V &= \pi \left(\int_{-1}^{2} (-x^2 + 4x + 6 - x^4)\, dx \right) \\
V &= \pi \left(-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x - \tfrac{1}{5}x^5 \right) |_{-1}^{2} \\
V &= \pi \left(\tfrac{72}{5} \right) uv
\end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução gerado pela região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x é

$$V = \frac{72}{5}\pi uv.$$

Exemplo 1.44. *Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva* $(x-2)^2 + y^2 = 1$ *em torno do eixo* y.

Solução: Observe a figura 1.30 que representa a circunferência deslocada da origem.

Isolando a variável x em $(x-2)^2 + y^2 = 1$, vem:

$(x-2)^2 = 1 - y^2$

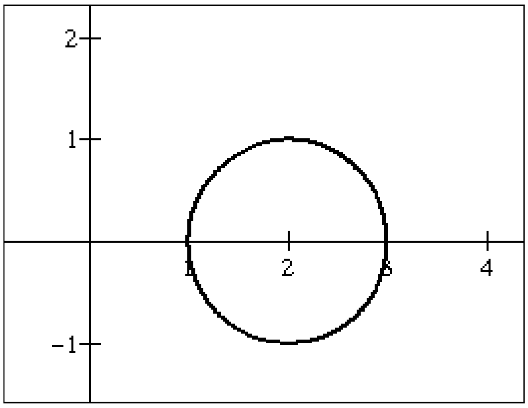


Figura 1.30: $(x-2)^2+y^2=1$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}+2$

Observe que o volume do sólido de revolução é formado pela rotação da curva $x = \sqrt{1-y^2}+2$ em torno do eixo y menos o volume formado pela rotação da curva $x = -\sqrt{1-y^2}+2$. Portanto, o volume é igual a $V = V_1 - V_2$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_a^b [f(y)]^2 dy \\
V &= V_1 - V_2 \\
\text{onde } V_1 &= \pi\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-y^2}+2)^2 dy \text{ e } V_2 = \int_{-1}^{1} (-\sqrt{1-y^2}+2)^2 dy \\
\text{portanto temos } V &= \int_{-1}^{1} [(\sqrt{1-y^2}+2)^2 - (-\sqrt{1-y^2}+2)^2] dy \\
V &= \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2} dy \\
\text{Fazendo } y &= sen\theta \rightarrow dy = \cos\theta do \\
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sqrt{1-sen^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= 4(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= 4(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) \mid_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4(\frac{\pi}{2} - (\frac{-\pi}{2})) = 4\pi
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume é dado por $V = 4\pi$ u.v

Área de um sólido de revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$. Seja a partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, ..., M_n\}$$

do arco $\widehat{AB}$ em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ..... < M_n = B$$

e abscissas são $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. designemos por ΔS_i o comprimento das cordas $\overline{M_{i-1}M_i}$. Cada ΔS_i, rotacionando em torno do eixo x gera um tronco de cone cujo raio da base menor é $f(x_{i-1})$ da base maior é $f(x_i)$. A área em torno do cone é dada aproximadamente pelo produto do comprimento da secção mediana do tronco pela geratriz, conforme ilustra a figura 1.31.

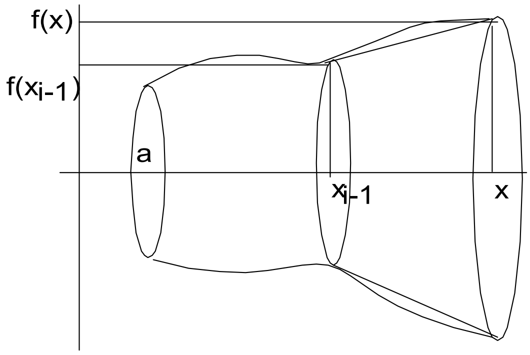


Figura 1.31: Área de um sólido de revolução

Na figura 1.32 podemos observar a área lateral do tronco de cone aberta sobre uma região plana.

Note que podemos formar um retângulo de comprimento r e altura ΔS_i. A área desse retângulo é $A_i = r\Delta S_i$.

Porém,

$$r = \frac{2\pi f(x_i) + 2\pi f(x_{i-1})}{2} = \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})].$$

Portanto, segue que

$$A_i = \pi [f(x_i) + f(x_{i-1})] \Delta S_i$$

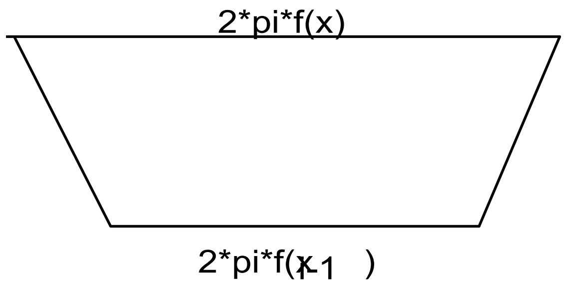


Figura 1.32: Área lateral do tronco de cone

Vimos anteriormente que

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Assim, teremos

$$A_i = \pi\left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Como há n-subdivisões, há n-tronco de cones inscritos no sólido T , de modo que a área total aproximada é dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f\left(x_i\right) + f\left(x_{i-1}\right)\right]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Embora esta soma não seja uma integral porque não está em função de um único ponto ξ_i é possível mostrar que:

$$A = 2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}dx \tag{1.7}$$

Exemplo 1.45. *Determinar a área lateral da figura de revolução gerada pela função* $f\left(x\right) = 2x$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: Aplicando a fórmula 1.7 vem

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
$$A = 2\pi \int_0^4 2x\sqrt{1 + 2^2}dx$$
$$A = 2\pi\sqrt{5}\int_0^4 2xdx$$
$$A = 2\pi\sqrt{5}x^2|_0^4$$
$$A = 32\pi\sqrt{5}ua$$

Portanto, a área lateral da figura de revolução gerada pela função $f(x) = 2x$ no intervalo $[0, 4]$ é $A = 32\pi\sqrt{5}ua$.

Exemplo 1.46. *O disco $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ rotaciona em torno do eixo x dando origem a um sólido. Calcule a área deste sólido.*

Solução: a figura 1.33 ilustra a rotação do disco em torno do eixo x

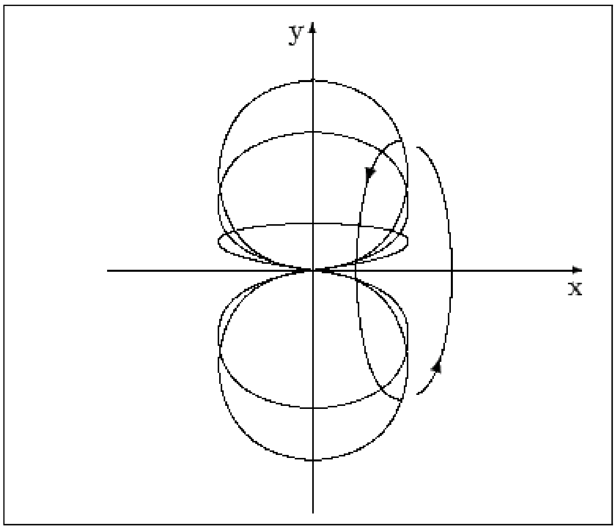


Figura 1.33: Rotação de um disco

Podemos visualizar a superfície como a resultante da rotação de dois arcos descritos a seguir, conforme ilustra a figura 1.34

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 2\pi[\int_{-1}^{1}(1 + \sqrt{1-x^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-1}^{1}(1 - \sqrt{1-x^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx]$$

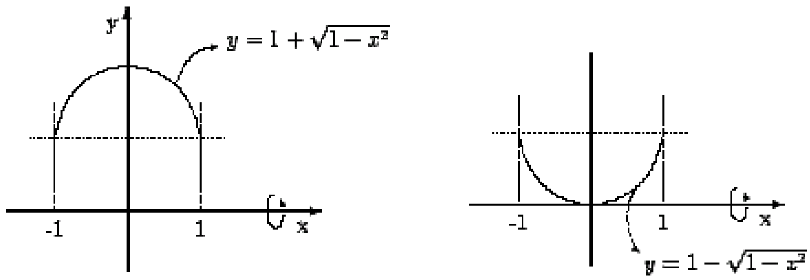


Figura 1.34: rotação dos dois arcos

$$A = 2\pi[\int_{-1}^{1} (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1 + \sqrt{1-x^2} + 1 - \sqrt{1-x^2})dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx = 4\pi \int_{-1}^{1} (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

fazendo $x = \cos\theta \rightarrow dx = -sen\theta d\theta$

temos então:

$$A = 4\pi \int_{\pi}^{0} -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} d\theta$$

$$= 4\pi \int_{0}^{\pi} d\theta = 4\pi^2$$

Portanto, a área é de $4\pi^2 u.a$

1.11. Exercícios Gerais

1. Usando a definição de integral definida encontre o valor numérico expressão $\int_0^4 [4-x^2]dx$

2. Determine o valor das seguintes integrais, se possível.

    1. $\int_1^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}dx$
    2. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+9}}$
    3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$
    4. $\int_0^1 x \sin x dx$
    5. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
    6. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx.$

3. Interpretar graficamente (desenhar e sombrear) a área que a integral abaixo calcula:

$$A = \int_0^2 [(y+6) - (\sqrt{4-y^2})]dy$$

4. Encontre a área da região limitada pelas curvas:

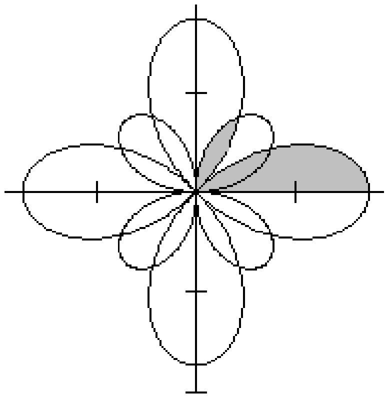
    1. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ $[R = 2\sqrt{2} - 2]$
    2. $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$. $[R = 22u.a]$
    3. $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$. $[R = \frac{125}{6}u.a]$
    4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $[R = \frac{3\pi a^2}{8}]$
    5. $\rho = 2\,(1 + \sin\theta)$ e $\rho = 2\,(1 + \cos\theta)$.
    6. $28 - y - 5x = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y = 2x$ e $y = 0$.

5. Calcular a área comum aos seguintes pares de curvas:

    1. $\rho = 3\cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$;
    2. $\rho = 1 + \cos\theta$ e $\rho = 2$;$[R = \frac{3\pi}{2}]$
    3. $\rho = sen\theta$ e $\rho = 1 - \cos\theta$;$[R = \frac{1}{2}(\pi - 2)]$
    4. $\rho^2 = \cos 2\theta$ e $\rho^2 = sen 2\theta$; $[R = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$

6. Encontrar a área interior ao círculo $\rho = 6\cos\theta$ e exterior a $\rho = 2(1+\cos\theta)$.

7. Escreva a integral que permite calcular a área sombreada $\begin{cases} \rho = \sin 2\theta \\ \rho = \sqrt{3}\cos 2\theta \end{cases}$



8. Determinar o comprimento das curvas $\rho = a\cos\theta$

9. Encontre o comprimento das curvas que limitam a região formada pela interseção das curva $\rho = \sqrt{3} sent$ e $\rho = 3\cos t$ no primeiro quadrante.

10. Mostre, em coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$.

11. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x.$[R = \frac{4\pi ab^2}{3}]$

12. Determinar o volume do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ em torno do eixo x.

13. Encontre o volume delimitado pela rotação das funções $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$ em torno do eixo x

14. Determinar a área da superfície do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ em torno do eixo x. $[R = 4\pi^2 ab]$

15. Mostre que o volume de um cone de raio r e altura h é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$