Exame de CDI-II - 9/jul/2007

1) Quando σ representa o desvio padrão da média de diversos valores medidos para uma grandeza, a probabilidade do valor desta grandeza ficar no intervalo [$-k\sigma$, $k\sigma$] é dada por $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx$. Calcule esta probabilidade (com precisão de 10^{-3}) para $k = 0,5$.

2) Encontre os pontos críticos da função $f(x,y) = xy - 4x^2 - 2y^4$. Classifique-os (*máx/mín/sela*).

3) A altura de um cone circular reto é de *um metro* e cresce a razão de *10cm/s*. O diâmetro é de *60cm* e decresce a razão de *2cm/s*. Determine a velocidade com que *o volume* e a *área lateral* variam.

4) Monte as integrais que calculam o volume dos sólidos no primeiro octante, limitados pelas superfícies $z = 9 - x^2 - y^2$ e $x+2y+5z = 20$.

5) Determine o domínio de convergência de $\sum \frac{(3-x)^{2n}}{n}$.

==

Gabarito:

1) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \rightarrow e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+1} n!(2n+1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4.3} + \frac{1}{2^7.2.5} - \ldots\right) \sim 0,383.$$

2) $f'_x = y - 8x = 0 \rightarrow y = 8x$

$f'_y = x - 8y^3 = 0 \rightarrow x = 8y^3 = 8(8x)^3 \rightarrow x = 8^4x^3 \rightarrow x - 8^4x^3 = 0 \rightarrow x(1 - 8^4x^2) = 0$

ou $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P_1(0, 0)$

ou $x = \frac{\pm 1}{64} \rightarrow y = \frac{1}{8} \rightarrow P_2\left(\frac{-1}{64}, \frac{-1}{8}\right)$ e $P_3\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{8}\right)$

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -24y^2 \end{vmatrix} = 192y^2 - 1 < 0 \text{ em } P_1 \rightarrow \text{Sela}$$
$$> 0 \text{ em } P_2 \text{ e } P_3 \rightarrow \text{Máximo}$$

3) $V = \frac{\pi r^2 h}{3} \rightarrow V' = \frac{2\pi rh}{3}r' + \frac{\pi r^2}{3}h' = \frac{2\pi 30.100}{3}(-1) + \frac{\pi 30^2}{3}(10) = 1000\pi\ cm^3/s$

$S = \pi r g = \pi r(r^2 + h^2)^{1/2} = \pi(r^4 + r^2h^2)^{1/2} \rightarrow S' = \dfrac{\pi(2r^3 + rh^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}r' + \dfrac{\pi(r^2h)}{\sqrt{r^2+h^2}}h' =$

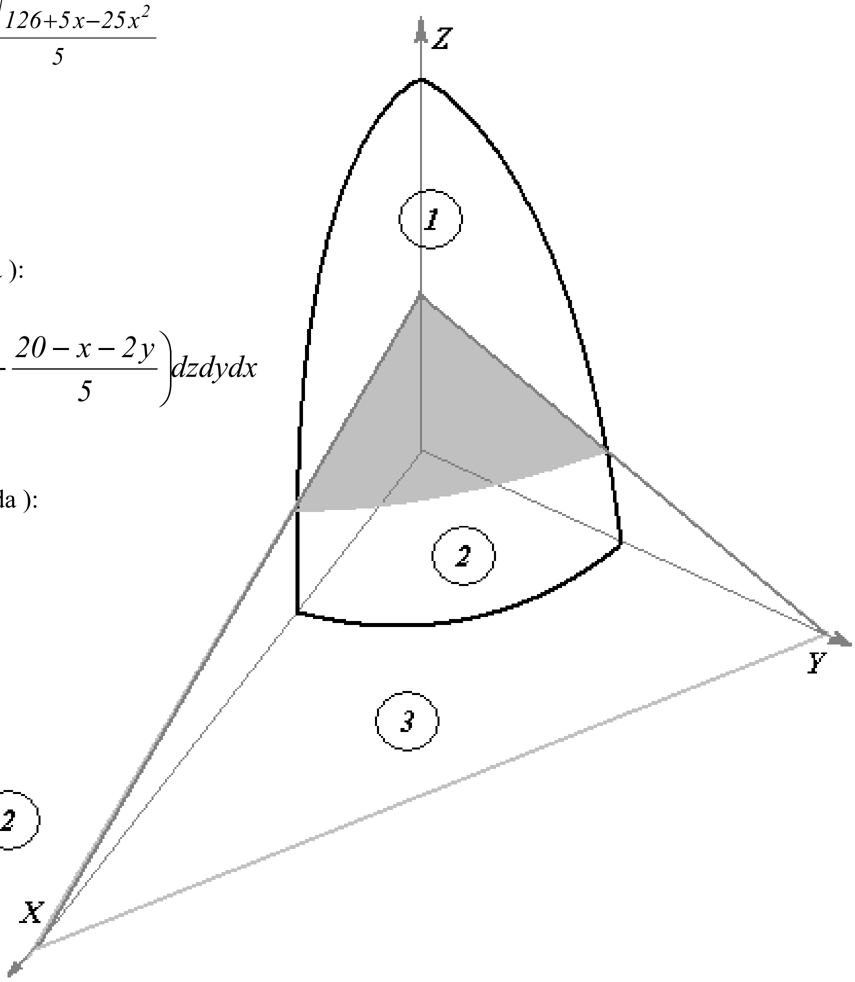
$\dfrac{\pi(2.30^3 + 30.100^2)}{\sqrt{10900}}(-1) + \dfrac{\pi 30^2.100}{\sqrt{10900}}(10) = \dfrac{598200}{\sqrt{10900}}\pi$ cm²/s ~18000,4 cm²/s.

4) $x+2y+5(9 - x^2 - y^2) = 20.$

$5y^2 - 2y + 5x^2 - x - 25 = 0 \rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{126+5x-25x^2}}{5}$

$y = 0$

$x = \dfrac{1+\sqrt{501}}{10}$



Parte 1 (acima da parte hachurada):

$$\int_0^{\frac{1+\sqrt{501}}{10}}\int_0^{\frac{1+\sqrt{126+5x-25x^2}}{5}}\left(9 - x^2 - y^2 - \frac{20-x-2y}{5}\right)dzdydx$$

Parte 2 (abaixo da parte hachurada):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\left(9\rho - \rho^3\right)d\rho d\theta$$ - Parte 1

Parte 3 (fora do parabolóide):

$$\int_0^{20}\int_0^{\frac{20-x}{2}}\frac{20-x-2y}{5}dydx$$ - Parte 2

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(3-x)^{2n+2}}{n+1}\dfrac{n}{(3-x)^{2n}}\right| = |3-x|^2 \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n}{n+1}\right| = |x-3|^2 < 1$

$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

Para $x = 2$, temos $\sum \dfrac{(1)^{2n}}{n}$ = série harmônica - *divergente* e

Para x = ,4 temos $\sum \dfrac{(-1)^{2n}}{n}$ = série harmônica - *divergente.Dom Conv.* = (*2, 4*).