# Exercícios de CDI-II – Funções de Várias Variáveis - Prof. Milton

1) Calcule, se existir, o limite de $F(x,y) = (x-2)^2/(x^2 + y^2 - 4x + 4)$, quando $(x,y) \to (2,0)$. Resp.: $\nexists$

2) Calcule, se existir, o limite de $G(t,v) = t^2v^2/(t^2 + v^2)$, quando $(t,v) \to (0,0)$. Resp.: $0$

3) Calcule, se existir, o limite de $V(x,y) = (x^m + y^n)/(x^2 + y^2)$, quando $(x,y) \to (0,0)$, se $\{ m , n \} \subset \{0, 1, 2, 3\}$.

Resp.: Só existe o limite para $m = n = 2$ ($lim = 1$) e para $m = n = 3$ ($lim = 0$).

4) Verifique a continuidade de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2(y+1) + 3y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 3 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Resp.: *É contínua*

5) Verifique a continuidade de

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y + 2}{x^2 + y^2 + 4y + 4} & \text{se } (x,y) \neq (0,-2), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,-2), \end{cases}$$

Resp.: *Não é contínua*

6) Dada $T(t,x) = 8e^{-(\pi/3)^2 t} sen(\pi x/3)$, calcule $\partial T/\partial t$ e $\partial^2 T/\partial x^2$. Resp.: $-\pi^2 T/9 = -8\pi^2 e^{-(\pi/3)^2 t} sen(\pi x/3)/9$,

7) Dada $f(x,y) = x^2t + xy^2$, calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial^2 f/\partial y^2$. Resp.: $2xt + y^2$ e $2x$

8) Dada $y = 3t^2x + 2sen\ tx$, calcule $\partial^2 y/\partial x^2$ e $\partial^2 y/\partial t^2$. Resp.: $-2t^2 sen\ tx$ e $6x - 2x^2 sen\ tx$

9) Dada $F(t,x,y,z) = 3t^2x^2yz^3 + 2t^2 sen\ x^2yz^3$, calcule as primeiras derivadas e $\partial^2 F/\partial t \partial y$ e $\partial^2 F/\partial y \partial t$.

Resp.: $tx^2z^3(6 + 4cos\ x^2yz^3)$

10) Dada $z = 2F^2 + 3G$, com $F = x^2y + y$ e $G = x + y^2$, calcule $\partial z/\partial x$ em $(x,y) = (1/2 , 1)$. Resp.: $8$

11) Dado que $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y = 9$, calcule $\partial y/\partial x$. Resp.: $-(2xy^3+3x^2y^2+y+1)/(2x^3y+3x^2y^2+x+1)$

12) a) Dado que $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcule $\partial z/\partial y$. Resp.: $-y/z$

b) Dado que $x^2 y^2 + z^2 = 25$, calcule $\partial z/\partial y$. Resp.: $-x^2y/z$

13) Se $z^2 + 2/x = \sqrt{y^2 - z^2}$, mostre que $x^2 z_x + (1/y) z_y = 1/z$

14) Calcule $z_x$ e $z_y$ em $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Resp.: $-c^2x/a^2z$ e $-c^2y/b^2z$

15) Um gás perfeito ($k = 8\ atm.cm^3/K$) registra um volume de $100cm^3$ na temperatura de $90^oC$.

Calcule a taxa de variação da pressão por $^oC$ num processo isométrico. Resp.: $0,08 atm/^oC$

Calcule a taxa de variação do volume por $atm$ num processo isotérmico. Resp.: $-(1250/363) cm^3/atm$

16) Um cone, num certo instante tem raio de $0,5m$ e altura de $1m$.

Seu raio aumenta com velocidade de $0,1m/s$ e sua altura com velocidade de $0,05m/s$.

Calcule a velocidade com que seu volume aumenta e expresse o volume como função do tempo.

Resp.: $V' = 3\pi/80\ m^3/s$ e $V = \pi/12 + 3\pi t/80$

17) Uma lata fechada, metálica, na forma de um cilindro circular reto, tem internamente, $9cm$ de altura e $2cm$ de raio. Use diferencial para ter uma estimativa do volume de material usado com $0,1cm$ de espessura. Calcule, ainda, para comparar, o volume correto de material.

Resp.: $22\pi/5\ cm^3 \approx 13,82\ cm^3$ e $1143\pi/250\ cm^3 \approx 14,36\ cm^3$

18) Uma caixa retangular, tem internamente, as medidas $12cm$, $8cm$ e $6cm$ (de altura). Com espessura das paredes laterais de $0,2cm$ e do fundo de $0,3cm$, use diferencial para ter uma estimativa do volume de material usado. Calcule, ainda, para comparar, o volume correto de material.

Resp.: $76,8\ cm^3$ e $80,208\ cm^3$

19) Encontre os pontos críticos das funções:

$U(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$ Resp.: $(1, -2)$

$V(t,y) = t^2 + y^2 - 2t + y + 2$ Resp.: $(1, -1/2)$

$W(t,x) = t^3 + x^3 - 18tx$ Resp.: $(0, 0)$ e $(6, 6)$

$W_1(t,x) = t^2 + x^3 - 18tx$ Resp.: $(0, 0)$ e $(486, 54)$

$f(r,s) = 4rs^2 - 2r^2s - r$ Resp.: $(0, 1/2)$ e $(0, -1/2)$

20) Determine as dimensões de uma caixa retangular, sem tampa, para que nela caibam $108cm^3$, com o menor consumo de material para suas paredes. Resp.: *base quadrada de* $36cm^2$ e *altura de* $3cm$

21) Determine as dimensões de uma caixa retangular, sem tampa, com máximo volume e mesma quantidade de material ($S$). Resp.: *base quadrada de lado* $(1/3)\sqrt{3S}$ $cm$ e *altura de* $(1/6)\sqrt{3S}$ $cm$

22) Alguns correios exigem que o perímetro da base somada com a altura não passe de $84cm$.

Qual o maior volume que pode ser enviado ? Resp.: $5488cm^2$

23) Determine o(s) ponto(s) críticos da função dada por $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 5$

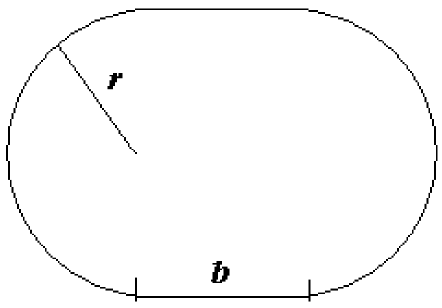
Resp.: $(-3/2, -3/2)$

24) Se $V = \pi R^2 h$, mostre uma aplicação da fórmula $dV = \dfrac{\partial V}{\partial R} dR + \dfrac{\partial V}{\partial h} dh$ . Resp.: *Exercício* 17)

25) Quais as dimensões mais econômicas de uma caixa ( sem tampa) de *5 litros* com o fundo e uma das faces laterais custando o dobro das outras três faces?

Resp.: *face cara quadrada de lado* $\sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}\ cm \approx 1{,}49\ cm$ e *comprimento de* $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}\ cm \approx 2{,}24\ cm$

26) Uma "lata" tem o fundo com o formato ao lado e altura $h$.




Determine a taxa de variação do seu volume $V$
- quando só $r$ varia. Resp.: $2(\pi r + b)h\ cm^3/cm$
- quando só $b$ varia. Resp.: $2rh\ cm^3/cm$
- quando só $h$ varia. Resp.: $(\pi r^2 + 2rb)\ cm^3/cm$

Qual a variação total de $V$ quando $r$ e $b$ aumentam $10\ \%$ enquanto que $h$ diminui $5\ \%$? Resp.: $15\%$

Se o material do fundo custa o triplo do material das superfícies laterais, calcule a variação do custo quando aumentamos a altura e o raio em $6\%$ e diminuímos $b$ em $8\%$ .

Resp.: $(9\pi r^2 - 3rb + 6\pi rh - bh)/25\ cm^3$

Analise esta resposta se $r = 10cm$, $b = 15cm$ e $h = 20cm$. Resp.: $(80\pi - 30)\ cm^3 \approx 233{,}89\ cm^3 \approx 6{,}32\%$