

2. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Funções de várias variáveis: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Definir funções de várias variáveis e dar exemplos práticos;
2. Encontrar o domínio e fazer o gráfico (esferas, cones, cilindros, parabolóides, planos e interseções entre essas superfícies) com funções de várias variáveis com duas variáveis independentes;
3. Usando a definição mostrar que o limite de uma função de duas variáveis existe;
4. Verificar se uma função de duas variáveis é contínua num ponto;
5. Encontrar derivadas parciais e interpretá-las geometricamente quando a função for de duas variáveis independentes;
6. Encontrar derivadas parciais de funções compostas;
7. Encontrar as derivadas parciais de funções implícitas;
8. Resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação;
9. Representar geometricamente as diferenciais parciais e totais;
10. Resolver problemas que envolvam diferenciais parciais e totais;
11. Encontrar derivadas parciais de ordem superior;
12. Encontrar os extremos de uma função de duas variáveis quando existirem;
13. Resolver problemas que envolvam extremos de funções de duas variáveis.
14. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

2.1. Introdução

Um fabricante pode constatar que o custo da produção C de um determinado artigo depende da qualidade do material usado, do salário - hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que C é função de cinco variáveis, porque depende de cinco quantidades diferentes.

Neste Capítulo estudaremos as funções de várias variáveis, começando com o caso de funções de duas variáveis e então a um número arbitrário de variáveis. Como exemplo de função de duas variáveis podemos utilizar a área de um retângulo, função esta muito conhecida de vocês.

Consideremos o retângulo de base a e altura b . A área desse retângulo é

$$A = ab$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever a área desse retângulo em função de x , isto é,

$$A(x) = xb$$

Desse modo, temos a área como função de uma variável.

Podemos também, fazer variar a base e a altura simultaneamente. Nesse caso, tomando $b = y$ teremos a área dada por

$$A(x, y) = xy$$

ou seja, a área expressa como função de duas variáveis.

A função $A(x, y)$ é definida para todo par de pontos pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Um raciocínio análogo pode ser feito para o volume de um paralelepípedo. Sejam a , b e c as dimensões de um paralelepípedo. O volume será dado por

$$V = abc$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever o volume desse paralelepípedo expresso como função de uma variável x , isto é,

$$V(x) = xbc$$

Podemos também, fazer variar as dimensões a e b simultaneamente, isto é tomando $b = y$ teremos o volume do paralelepípedo expresso como uma função de duas variáveis x e y , ou seja,

$$V(x, y) = xyc$$

Também, é possível variar as três dimensões simultaneamente e, nesse caso tomando $z = c$ o volume do paralelepípedo será expresso como uma função de três variáveis x , y e z , isto é,

$$V(x, y, z) = xyz$$

A função $V(x, y, z)$ é definida para toda tripla de pontos pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^3$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Vejamos um exemplo que envolve mais do que três variáveis.

Exemplo 2.1. *Suponhamos que uma pessoa vá a um supermercado e a nota de compras seja descrita conforme o modelo abaixo.*

Nota da compras			
Produtos	unidades	preço por unidade	total
Leite	2 pacotes	1,00	2,00
pão	10	0,10	1,00
Laranja	2kg	0,50	1,00
Maçã	2kg	2,50	5,00
Açúcar	5kg	0,60	3,00
		Total a pagar	12,00

Suponhamos que as variáveis x , y , z , w e t representem, respectivamente, leite, pão, laranja, maçã e açúcar, então podemos escrever a função "total a pagar" por

$$T(x, y, z, w, t) = x + 0,1y + 0,5z + 2,5w + 0,6t$$

A função T é uma função de cinco variáveis. Para encontrar o total a pagar referente a tabela anterior fazemos

$$\begin{aligned} T(2, 10, 2, 2, 5) &= 2 + 0,1(10) + 0,5(2) + 2,5(2) + 0,6(5) \\ &= 2 + 1 + 1 + 5 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

A função $T(x, y, z, w, t)$ é definida para todo ponto $(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5$. O convencional é escrever $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que, em todos os exemplos examinados, a imagem da função é um número real. Com base nesses exemplos vamos definir funções de várias variáveis.

Definição 2.2. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D$. Se a cada n -upla ordenada pertencente a D corresponder um único número real $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dizemos que f é uma função de n -variáveis, definida em D com imagem em $\mathbb{R}$. Convencionalmente escreve-se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.3. *Vejamos alguns exemplos de funções de várias variáveis.*

Para $D \subset \mathbb{R}^2$ temos	$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	definida por $f(x, y) = 2x + 3y + 1$
Para $D \subset \mathbb{R}^3$ temos	$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z) = x^2 + y + z + 6$
Para $D \subset \mathbb{R}^4$ temos	$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z + w + 6$
Para $D \subset \mathbb{R}^5$ temos	$f : D \rightarrow \mathbb{R}$	definida por $f(x, y, z, w, t) = x^2 + y^2 + z + w + t^2 + 6$

Nosso estudo vai ficar restrito às funções de duas e três variáveis.

Gráfico de uma Função de Várias Variáveis

Apenas podemos representar graficamente funções de uma e duas variáveis independentes.

Por exemplo, o gráfico de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ é um parabolóide conforme mostra a figura 2.1

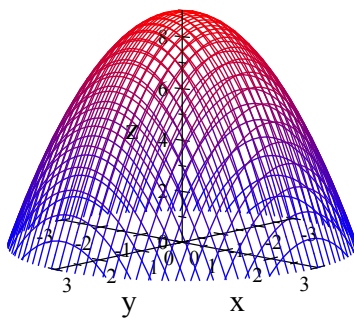


Figura 2.1: $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

A equação de uma superfície pode ser escrita na forma implícita ou explícita, em função de duas variáveis, isto é, $F(x, y, z) = 0$ ou $z = f(x, y)$

Exemplo 2.4. *A equação da esfera centrada na origem pode ser escrita como segue:*

- Implicitamente $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
- Explicitamente em função de (x, y) com $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Representação Gráfica de uma Superfície

Para representar graficamente uma superfície procede-se como segue:

1. Escolhe-se um plano coordenado.
2. Determina-se as interseções com os eixos cartesianos determinando os pontos $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$.
3. Determina-se os traços das superfícies sobre os planos;
 - a) xy fazendo $z = 0$ na equação;
 - b) xz fazendo $y = 0$ na equação;
 - c) yz fazendo $x = 0$ na equação.
4. Determina-se as simetrias:
 - a) em relação aos planos coordenados.
 - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, y, -z)$.
 - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, z)$.
 - Uma superfície é simétrica em relação ao plano yz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, z)$.
 - b) em relação aos eixos coordenados
 - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo x se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, -z)$.
 - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo y se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, -z)$.
 - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo z se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, z)$.
 - c) em relação à origem:
 - Uma superfície é simétrica em relação à origem se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, -z)$.

5. Secções e Extensão: Quando os traços principais não forem suficientes para caracterização da superfície, recorre-se a determinação de secções com planos paralelos aos planos coordenados. Para isso fazemos:

- $z = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, y, k) = 0$ sobre o plano coordenado xy .
- $y = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, k, z) = 0$ sobre o plano coordenado xz .
- $x = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(k, y, z) = 0$ sobre o plano coordenado zy .

6. Traça-se o esboço do gráfico da superfície.

Exemplo 2.5. Traçar o esboço do gráfico da superfície de equação

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Solução:

1. Vamos tomar como plano coordenado o plano xz .
2. Intersecções com os eixos coordenados : Os pontos $(x, 0, 0)$ e $(0, 0, z)$ não são reais e o ponto $(0, y, 0)$ é duplo ou seja temos os pontos $P(0, 4, 0)$ e $P'(0, -4, 0)$.
3. Traços:

- Sobre o plano xy : Fazendo $z = 0$ tem-se a hipérbole $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

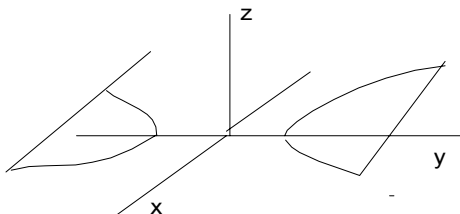


Figura 2.2: Traços sobre xy

- Sobre o plano xz : Fazendo $y = 0$ tem-se a elipse imaginária $-\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.
- Com o plano zy : Fazendo $x = 0$ tem-se a hipérbole $\frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$.

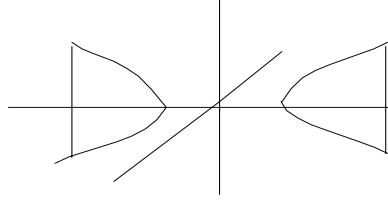


Figura 2.3: Traços sobre yz

4. Simetrias: Explicitamente a equação $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ pode ser escrita como segue:

$$y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}} \quad \text{ou} \quad y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$$

Logo, é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem:

5. Secções e extensões: fazendo $z = k$, $k \in R$, obtemos uma família de hipérboles sobre os planos $z = k$. Por outro, lado fazendo $y = k$, $k \in R$, obtemos uma família de elipses sobre os planos $z = k$. (fazendo $x = k$ as curvas são imaginárias).

- Por exemplo, fazendo $z = k = 3$ temos as equações

$$y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}} \quad \text{ou} \quad y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{3^2}{3^2}}$$

donde vem a equação da hipérbole sobre o plano $z = 3$ dada por

$$y = \sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{2 + \frac{x^2}{5^2}}$$

- Por exemplo, fazendo $y = k = \pm 8$ temos a equação elíptica

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{(\pm 8)^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \implies -\frac{x^2}{5^2} + 4 - \frac{z^2}{3^2} = 1 \implies 3 = \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}$$

sobre os planos $y = 8$ e $y = -8$.

Construção da superfície.

Os elementos fornecidos pela discussão acima permitem construir a superfície hipebólica de duas folhas conforme a figura 2.6.

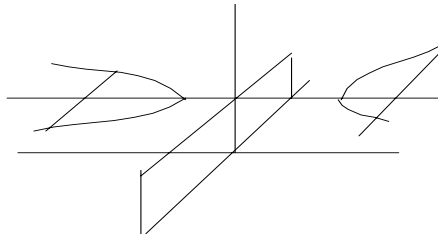


Figura 2.4: Traços sobre o plano $z=3$

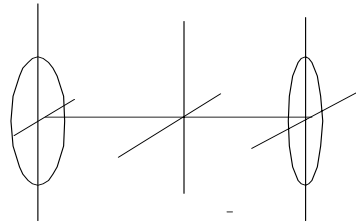


Figura 2.5: Traços sobre o plano $y=8$

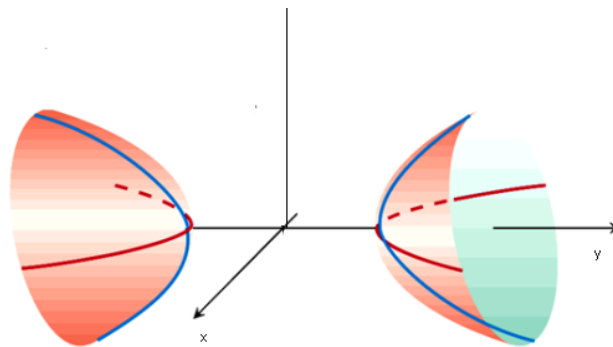


Figura 2.6:

Exercícios

Discutir e representar graficamente as superfícies

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 25$
3. $9x + 4y + 12z = 36$

$$4. \quad z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$5. \quad \begin{cases} z + x^2 = 16 \\ z + y = 7 \\ y = 0 \text{ e } y = 4 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} z = 18 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 5y^2 \end{cases}$$

Distâncias e Bolas no Espaço

Sejam $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dois pontos de $\mathbb{R}^n$, a distância de P até A , denotada por $\|P - A\|$, é dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Definição 2.6. Sejam $A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $r > 0$ um número real. Denominamos bola aberta de centro A e raio ε ao conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|P - A\| < r$. Isto é, o conjunto

$$B(A, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \text{ tais que } \|P - A\| < r\}$$

Sejam $A(1, 2)$ e $r = 1$ então a bola aberta

$$B((1, 2), 1) = \{P \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } \|(x, y) - (1, 2)\| < 1\}$$

é graficamente representada por ??

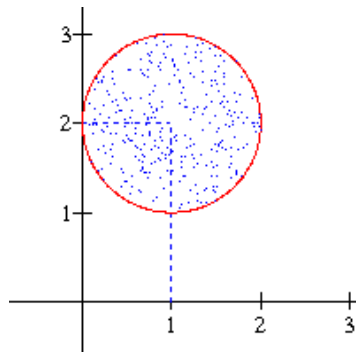


Figura 2.7:

Exemplo 2.7. Sejam $A(1, 1, 2)$ e $r = 1$ então a bola aberta

$$B(1, 2, 1) = \{P \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } \|(x, y, z) - (1, 1, 2)\| < 1\}$$

é graficamente representada pela figura 2.8



Figura 2.8:

2.2. Limite de uma Função de duas Variáveis

Vamos estudar a existência do limite de uma função de duas variáveis. O raciocínio análogo é feito para funções de n -variáveis.

Definição 2.8. Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$, $B(A(x_0, y_0), r)$, exceto possivelmente em $A(x_0, y_0)$. Dizemos que o número L é o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (x_0, y_0) se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Exemplo 2.9. Mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 2x + 3y = 11$

Demonstração: Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 11| &= |2x + 3y - 11| \\ &= |(2x - 2) + (3y - 9)| \\ &= |2(x - 1) + 3(y - 3)| \\ |f(x, y) - 11| &\leq |2(x - 1)| + |3(y - 3)| = 2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < \varepsilon \\ &\text{donde obtemos } 2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < \varepsilon \quad (I) \end{aligned}$$

Por outro lado,

de $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ obtemos $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$.

Como podemos observar na figura acima, $|x-1|$ e $|y-3|$ são os lados do triângulo e $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$ é a hipotenusa. É claro que

$$|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

e

$$|y-3| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

de modo que teremos

$$|x-1| < \delta \text{ e } |y-3| < \delta$$

Observe a figura 2.9

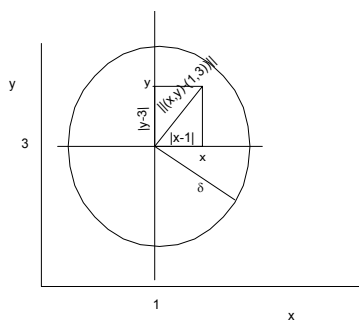


Figura 2.9:

Substituindo estes resultados no termo à esquerda do sinal em (I) vem:

$$\begin{aligned} 2|x-1| + 3|y-3| &< 2\delta + 3\delta \\ &< 5\delta \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Portanto, de (I) e (II) podemos formar o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2|x-1| + 3|y-3| < \varepsilon \\ 2|x-1| + 3|y-3| < 5\delta \end{cases}$$

Assim, podemos admitir $5\delta = \varepsilon$ donde vem $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 2x+3y = 11$, pois dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ tal que $|f(x, y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < \delta$.

Definição 2.10. Seja $A(x_0, y_0)$ um ponto e D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $A(x_0, y_0)$ é ponto de acumulação de D se toda bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$ e raio r tem uma infinidade de pontos de D .

Exemplo 2.11. Seja D o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq 1$. Então os pontos $A(x_0, y_0) = (0, 0)$ em $B(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são pontos de acumulação de D . Porém o ponto $(1, 1)$ não é.

Definição 2.12. Seja f uma função de duas variáveis definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $B(x_0, y_0)$ um ponto de acumulação de D . Então o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (x_0, y_0) é L se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

sempre que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ D}} f(x, y) = L$$

Teorema 2.13. Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$, $B(A(x_0, y_0), r)$, exceto possivelmente em $A(x_0, y_0)$. Se $f(x, y)$ tem limites diferentes quando (x, y) tende para (x_0, y_0) por caminho diferentes então

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ D}} f(x, y) \text{ não existe}$$

Exemplo 2.14. Vamos mostrar que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe.

Solução: Seja $S_1 = \{(x, y) \in D \text{ tal que } x = 0\}$. Note que S_1 é exatamente o eixo y e é um caminho que passa pelo ponto $(0, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_1}} f(x, y) &= \lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) \\ &= \lim_{\substack{(0, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_1}} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Seja $S_2 = \{(x, y) \in D \text{ tal que } y = kx\}$. Note que S_2 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_2}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, kx) \rightarrow (0, 0) \\ S_2}} f(x, kx) \\ &= \lim_{\substack{(x, kx) \rightarrow (0, 0) \\ S_2}} \frac{xkx}{x^2 + (kx)^2} \\ &= \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_2}} \frac{x^2k}{x^2(1 + k^2)} \\ &= \frac{k}{1 + k^2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ S_2}} f(x, y)$$

segue que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe.

Exemplo 2.15. Vamos mostrar que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ existe.

Solução: Primeiro vamos verificar se por caminhos diferentes o limite tem o mesmo valor numérico.

Seja $S_1 = \{(x, y) \in D \text{ tal que } y = kx\}$. Note que S_1 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ S_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,kx) \rightarrow (0,0) \\ S_1}} f(x,kx) \\
&= \lim_{\substack{(x,kx) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{3x^2 kx}{x^2 + (kx)^2} \\
&= \lim_{\substack{(x,kx) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{x^3 k}{x^2 (1 + k^2)} \\
&= \lim_{\substack{(x,kx) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{xk}{1 + k^2} = 0
\end{aligned}$$

Seja $S_2 = \{(x,y) \in D \text{ tal que } y = kx^2\}$. Note que S_2 é um conjunto de parábolas que passam pelo ponto $(0,0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ S_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,kx^2) \rightarrow (0,0) \\ S_1}} f(x,kx^2) \\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{3x^2 kx^2}{x^2 + (kx^2)^2} \\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{3x^4 k}{x^2 (1 + k^2 x^2)} \\
&= \lim_{\substack{(x,kx^2) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} \frac{3x^2 k}{1 + k^2 x^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Como } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ S_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ S_2}} f(x,y) \text{ segue que há prob-}$$

abilidades de que $L = 0$ seja o limite de $f(x,y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2}$.

Para confirmar, devemos verificar se a definição 2.8 está satisfeita. Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$. Assim,

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2 + y^2|} = \frac{3|x^2||y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad (\text{I})$$

De $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ obtemos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Sendo $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ podemos escrever

$$\frac{3|x^2||y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} = 3|y| < 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta \quad (\text{II})$$

Comparando (I) com (II) podemos admitir $3\delta = \varepsilon$ donde vem $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ existe e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$.

2.3. Propriedades dos Limites

i) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = ax_o + b$

ii) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y)$ existem e, $c \in \mathbb{R}$, então:

$$\text{a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y)$$

$$\text{b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} cf(x, y) = c \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y)$$

$$\text{c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y)$$

$$\text{d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y)} \text{ desde que } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y) \neq 0$$

$$\text{e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} [f(x, y)]^n = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \right]^n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y)} \text{ para } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ ou } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \leq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ impar.}$$

Proposição 2.16. Se f é uma função de uma variável, contínua num ponto a , e $g(x, y)$ uma função tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y) = a$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f \circ g(x, y) = f(a)$ ou

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y)\right)$$

Exemplo 2.17. Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \ln(x^2 + xy - 1)$

Consideramos as funções:

$$\begin{cases} g(x, y) = x^2 + xy - 1 \\ f(u) = \ln u \end{cases}$$

temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} g(x, y) = 2$ e $f(u) = \ln(u)$ é contínua em 2.

Aplicando a proposição acima vem:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (f \circ g)(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \ln(x^2 + xy - 1) \\ &= \ln \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + xy - 1) \right] \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Proposição 2.18. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = 0$ e $g(x, y)$ é uma função limitada numa bola aberta de centro (x_o, y_o) então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$$

Exemplo 2.19. Mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

Resolução:

Consideremos que $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Sabemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$, basta mostrar que $g(x, y)$ é limitada.

Escrevendo $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ em coordenadas polares temos que $(x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta)$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

Evidentemente, $|\cos \theta \sin \theta| \leq 1$ e portanto, $g(x, y)$ é limitada.

$$\text{Logo } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Exercícios

Em cada exercício abaixo verifique se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe

$$a) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad b) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad c) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$d) f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \quad e) f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2} \quad f) f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

2.4. Continuidade de uma função de duas variáveis

Definição 2.20. Seja f uma função de duas variáveis e (x_0, y_0) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se, e somente se, satisfaz as condições:

$$\begin{aligned} i) & f(x_0, y_0) \text{ existe;} \\ ii) & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ existe;} \\ iii) & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Exemplo 2.21. Vamos verificar se $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da definição 2.20.

Condição i) Como $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$ a primeira condição está satisfeita.

Condição ii) Vimos no exemplo 2.14 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, a condição ii) da definição 2.20 não é satisfeita.

Logo, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ não é contínua em $(0, 0)$.

Exemplo 2.22. A função definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$ é contínua em $(0, 1)$?

Para ser contínua deve ser verificado as três condições:

$$\begin{aligned} i) & f(x_0, y_0) \text{ existe;} \\ ii) & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ existe;} \\ iii) & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

i. $f(0, 1) = 0$ e portanto existe.

ii. vamos verificar se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ existe e é igual a zero (se for diferente a função não é contínua no ponto)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(x^2 - (y-1)^2)(x^2 + (y-1)^2)}{x^2 + (y-1)^2} = 0$$

$$\text{iii. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-2)^2} = f(0,1)$$

Portanto, a $F(x, y)$ é contínua no ponto $(0, 1)$

Exemplo 2.23. Vamos verificar se $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da definição 2.20.

Condição *i*) Como $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$, a primeira condição está satisfeita.

Condição *ii*) Vimos no exemplo 2.15 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ existe,

isto é, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Condição *iii*) Sendo $f(x, y) = 0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ segue que

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = f(0, 0)$. Assim, a terceira condição da definição 2.20 está satisfeita.

Portanto, as três condições da definição 2.20 estão satisfeitas.

Logo, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$.

Exercícios

Em cada exercício verifique se as funções abaixo são contínuas em $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ b) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ c) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ d) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

2.5. Derivadas Parciais

As técnicas, regras e fórmulas desenvolvidas para derivação de funções de uma variável são generalizadas para funções de duas ou mais variáveis.

Definição 2.24. Seja f uma função de duas variáveis e (x, y) um ponto no domínio de f então as derivadas parciais $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ de f em (x, y) são dadas por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Exemplo 2.25. Seja $f(x, y) = x^2y + xy^2$ encontre $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Solução: Aplicando a definição 2.25 vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y + (x + \Delta x) y^2 - (x^2 y + x y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + xy^2 + y^2 \Delta x - x^2 y - xy^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + y^2 \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2xy + y\Delta x + y^2)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2xy + y\Delta x + y^2 = 2xy + y^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy + y^2$.

Analogamente, encontra-se $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = x^2 + 2xy$.

Note que para encontrar $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ basta considerar y como uma constante na função $f(x, y)$ e aplicar as regras de derivação estudadas na derivação de funções de uma variável. Para encontrar $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ deriva-se em relação a y mantendo x constante.

Exemplo 2.26. Seja $f(x, y) = 3x^2y + 2senxy$, encontrar $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Solução: Tomando y constante no primeiro caso e x no segundo temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 6xy + 2y \cos xy \\ &\text{e} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3x^2 + 2x \cos xy\end{aligned}$$

Observação 4. No caso de f ter mais de duas variáveis são consideradas constantes todas as variáveis em relação a qual f não está sendo derivada.

Exemplo 2.27. Seja $f(x, y, z, t) = 3x^2yz^3t^2 + 2\sin x^2yz^3t^2$, encontrar

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} \text{ e } \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}.$$

Solução: Tomando constante todas as variáveis em relação a qual f não está sendo derivada temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} &= 6xyz^3t^2 + 4xyz^3t^2 \cos x^2yz^3t^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} &= 3x^2z^3t^2 + 2x^2z^3t^2 \cos x^2yz^3t^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} &= 9x^2yz^2t^2 + 6x^2yz^2t^2 \cos x^2yz^3t^2 \\ \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} &= 6x^2yz^3t + 4x^2yz^3t \cos x^2yz^3t\end{aligned}$$

Interpretação Geométrica das derivadas parciais

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma inclinação. Consideramos a secção da superfície $z = f(x, y)$ pelo plano vertical $y = y_o$. Neste plano a curva $z = f(x, y_o)$ tem uma tangente com inclinação em $f_x(x_o, y_o)$ em x_o .

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Seja $y = y_o$. Então, $f(x, y_o)$ descreve uma curva sobre a superfície S . Marcamos um ponto $P(x, y_o)$ sobre a curva $f(x, y_o)$ e traçamos uma reta tangente à curva no ponto $P(x, y_o)$ com coeficiente angular $m = \tan \alpha$. Então, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \tan \alpha$, ou seja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x, y_o)$ no ponto $P(x, y_o)$ (veja a figura 2.10). Analogamente, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x_o, y)$ no ponto $P(x_o, y)$, conforme ilustra a figura ??.

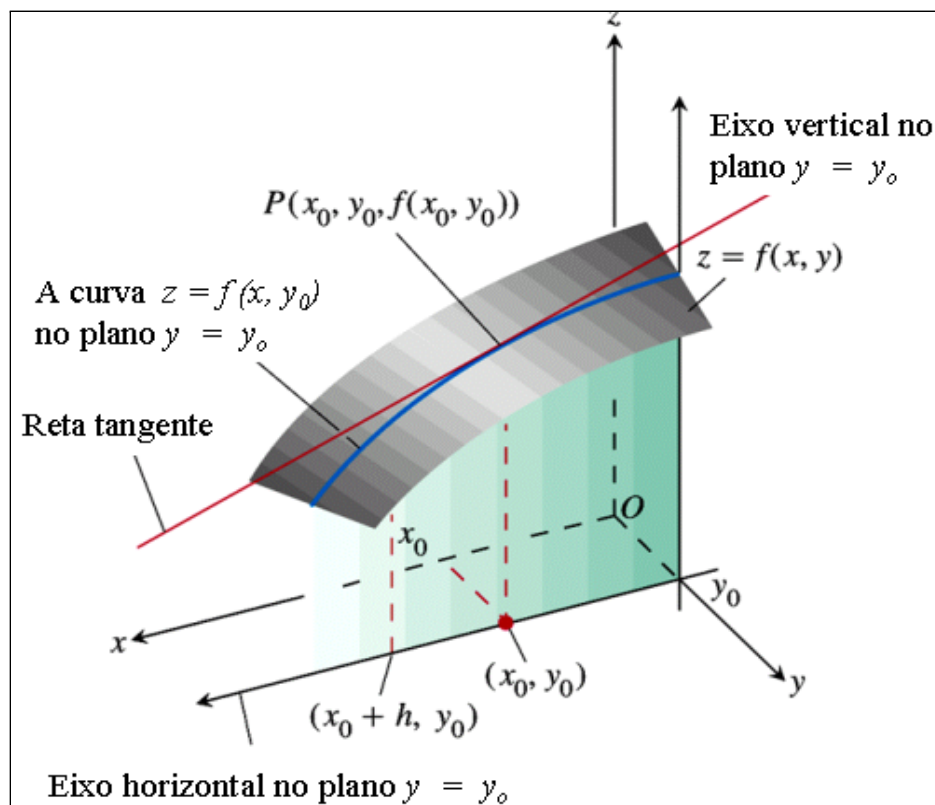


Figura 2.10:

2.6. Derivada de uma Função Composta

Antes de discutir a derivada de uma função composta vamos falar sobre função composta de duas variáveis.

Consideremos as funções $\phi(x, y) = x^2y + y$ e $\psi(x, y) = x + y^2$. Podemos definir uma função $F(\phi, \psi)$ por $F(\phi, \psi) = 2\phi^2 + 3\psi$. Escrevendo F em função de x e y temos:

$$\begin{aligned}
 F(\phi, \psi) &= 2\phi^2 + 3\psi \\
 F(\phi(x, y), \psi(x, y)) &= 2[\phi(x, y)]^2 + 3[\psi(x, y)] \\
 &= 2[x^2y + y]^2 + 3[x + y^2] \\
 &= 2[x^4y^2 + 2x^2y^2 + y^2] + 3x + 3y^2 \\
 &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 2y^2 + 3x + 3y^2 \\
 &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x
 \end{aligned}$$

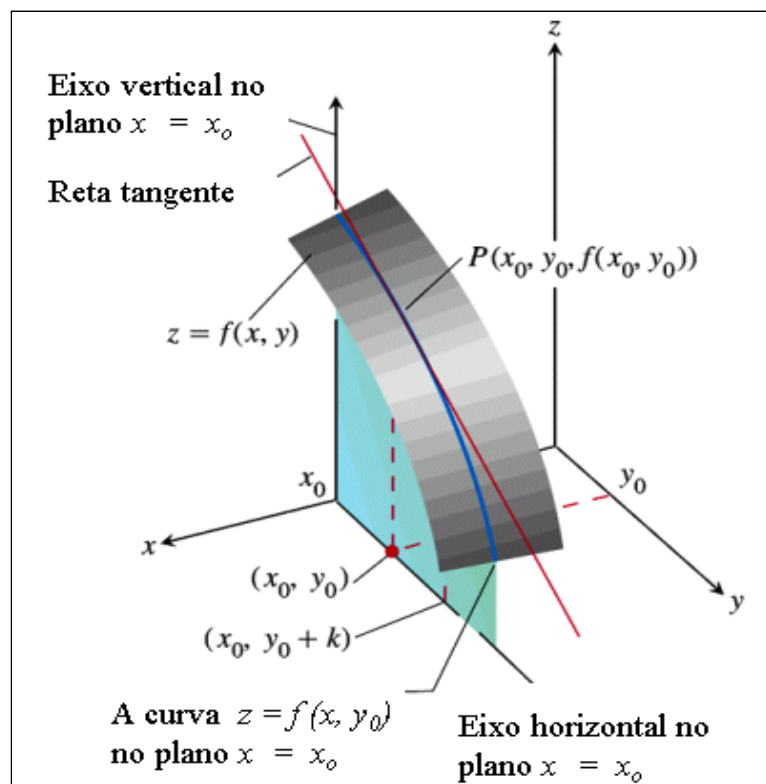


Figura 2.11:

Por exemplo,

$$F(\phi(1, 2), \psi(1, 2)) = 2(1)^4(2)^2 + 4(1)^2(2)^2 + 5(2)^2 + 3(1) = 47.$$

Como

$$\phi(x, y) = x^2y + y \text{ e } \psi(x, y) = x + y^2$$

segue que

$$\phi(1, 2) = (1)^2 2 + 2 = 4$$

e

$$\psi(1, 2) = 1 + 2^2 = 5.$$

Logo,

$$F(\phi(1, 2), \psi(1, 2)) = F(4, 5) = 2(4)^2 + 3(5) = 47.$$

Nosso interesse é encontrar $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$. A função

$$F(\phi(x,y), \psi(x,y)) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

pode ser escrita como uma função (x,y) . Isto é,

$$F(x,y) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

e, nesse caso, temos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 8x^3y^2 + 8xy^2 + 3$$

e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4x^4y + 8x^2y + 10y$$

Como podemos observar, obter as derivadas parciais através desse processo não é muito animador. Isso é motivação suficiente para estudar a regra da cadeia. Se tivermos uma função composta $f(g(x))$ sabemos que $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$. A mesma teoria é aplicada para encontrar a derivada parcial de uma função composta de várias variáveis.

Seja $z(x,y) = F(\phi(x,y), \psi(x,y))$ então

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F(\phi,\psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Exemplo 2.28. Consideremos as funções

$$\phi(x,y) = x^2y + y$$

e

$$\psi(x,y) = x + y^2$$

Podemos definir uma função $F(\phi,\psi)$ por

$$z(x,y) = F(\phi,\psi) = 2\phi^2 + 3\psi$$

e depois encontrar $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$.

Solução: Inicialmente, determinamos as derivadas parciais das funções $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ e $F(\phi, \psi)$. Temos, então:

$$\frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \phi} = 4\phi, \quad \frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \psi} = 3, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + 1 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$$

Substituindo em

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F(\phi, \psi)}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} &= 4\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + 3 \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= 4(x^2y + y)(2xy) + 3(1) \\ &= 8x^3y^2 + 8xy^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} &= 4\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + 3 \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= 4(x^2y + y)(x^2 + 1) + 3(2y) \\ &= 4x^4y + 8x^2y + 10y \end{aligned}$$

Exemplo 2.29. Determine $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ da função $F(x, y) = \ln \sqrt[5]{(x^4 + 2xy + y^3) + (2xy + 3x^2)}$

solução: Podemos rescrever a $F(x, y)$ como:

$$F(f, g) = \ln(f + g)^{\frac{1}{5}}$$

onde

$$f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$$

e

$$g(x, y) = 2xy + 3x^2$$

usando a regra da cadeia, temos:

$$F = \ln \sqrt[5]{(x^4 + 2xy + y^3) + (2xy + 3x^2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{6x + 4y + 4x^3}{20xy + 15x^2 + 5x^4 + 5y^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{5} \left[\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{f+g} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f+g} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1(4x^3 + 2y) + (2y + 6x)}{x^4 + y^3 + 4xy + 3x^2} \right] \\ &= \frac{6x + 4y + 4x^3}{20xy + 15x^2 + 5x^4 + 5y^3}\end{aligned}$$

Exemplo 2.30. *Variação dos valores de uma função ao longo de uma hélice. Encontre $\frac{dw}{dt}$ se $w = xy + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$. Qual é o valor da derivada em $t = 0$?*

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1(1) \\ &= \sin t(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t \\ \text{Logo em } t = 0 \text{ temos } \frac{dw}{dt} &= 1 + \cos(2 \cdot 0) = 2\end{aligned}$$

Exercícios

Escreva as funções abaixo na forma de funções composta e encontre as derivadas parciais em relação a x e y .

$$a) z = \ln \sqrt{x^2 e^{2y} + x^2 e^{-2y}}$$

$$b) z = \ln \left[\left(e^{x+y^2} \right)^2 + x^2 + y \right]$$

$$c) z = r^2 \cos^2 t + 2r^2 \sin t \cos t + r^2 \sin^2 t$$

$$d) z = \sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}$$

2.7. Derivadas de Funções Implícitas

Seja y uma função de x definida pela equação $F(x, y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ou $x^2 y^3 + x^3 y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. A equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ pode ser expressa explicitamente em função de x ou de y . Porém, não podemos fazer o mesmo com a

equação $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. Também, fazendo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ facilmente encontramos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$, o mesmo não ocorre se fizermos $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$. Nosso interesse está em encontrar uma forma de determinar com rapidez as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$.

Inicialmente, vamos resolver o problema usando o conhecimento adquirido em Cálculo I. Vamos derivar y implicitamente em relação a x na equação

$$x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0.$$

Temos

$$(2xy^3 + 3x^2y^2y') + (3x^2y^2 + 2x^3yy') + (y + xy') + 1 + y' = 0$$

ou

$$(3x^2y^2y' + 2x^3yy' + xy' + y') + (2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1) = 0$$

$$(3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1)y' = -(2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1)$$

$$y' = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2y + 2x^3y + x + 1} \quad (\text{I})$$

Sendo $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$ obtemos as derivadas parciais de F dadas por

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1$$

e

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1.$$

Observando estes resultados e comparando com (I), podemos escrever a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

sempre que $F(x, y)$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ forem contínuas em $(x, y) \in D$ e $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$.

Se F for uma função com mais de duas variáveis, usando o mesmo procedimento determinam-se as derivadas parciais.

Exemplo 2.31. Dada a função implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Solução: Escrevemos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, então teremos

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2y$$

e

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 2z$$

Agora, substituindo convenientemente na fórmula acima vem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}}, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + z^2)}}, \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= -\frac{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}}{\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}} = -\frac{2z}{2x} = -\frac{z}{x} = -\frac{z}{\sqrt{9 - (y^2 + z^2)}}.\end{aligned}$$

2.8. Derivada parcial como taxa de variação

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis. Então, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ dá a razão instantânea de variação de f no ponto $P(x_0, y_0)$ por unidade de variação de x . Isto é a taxa de variação de f por unidade de x no ponto $P(x_0, y_0)$.

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ dá a taxa de variação de f por unidade de y .

Exemplo 2.32. Suponhamos que um volume de gás em certo recipiente seja

$V = 100\text{cm}^3$, a temperatura seja $T = 90^\circ\text{C}$ e a constante de proporcionalidade $k = 8$.

a) encontrar a taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T ;

b) encontrar a taxa de variação instantânea de V por unidade de P .

Solução: De acordo com a lei do gás ideal para um gás comprimido vale a relação $PV = kT$.

Na questão a) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T , de modo que devemos escrever P em função de T e V . Isto é,

$$P(T, V) = \frac{kT}{V}$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial P(T, V)}{\partial T} = \frac{k}{V} \text{ no ponto } P(90^\circ, 100)$$

Assim,

$$\frac{\partial P(90^\circ, 100)}{\partial T} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Na questão b) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea de V por unidade de P , de modo que devemos escrever V em função de T e P . Isto é,

$$V(T, P) = \frac{kT}{P}$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial V(T, P)}{\partial P} = -\frac{kT}{P^2} \text{ no ponto } P(90^\circ, P)$$

Para determinar P usamos a relação

$$PV = kT$$

e obtemos

$$P = \frac{90(8)}{100} = 7,2$$

Portanto,

$$\frac{\partial V(90, 7.2)}{\partial P} = -\frac{8(90)}{(7.2)^2} = -13.889.$$

Exemplo 2.33. A altura de um cone circular é de 100cm e decresce a razão de 10cm/s. O raio da base é de 50cm e cresce a razão de 5cm/s. Determine a velocidade da variação do volume.

Solução:

Primeiro vamos escrever o volume do cone em função do tempo:

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t)h(t)}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi r h}{3} \left(\frac{dr}{dt} \right) + \frac{\pi r^2}{3} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi 50 \cdot 100}{3} (5) + \frac{\pi (50)^2}{3} (-10)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{50000\pi}{3} - \frac{25000\pi}{3} = \frac{25000\pi}{3}$$

2.9. Diferencias Parciais e Totais

Para entender o significado das diferenciais parciais e total vamos examinar os exemplos.

Exemplo 2.34. Consideremos um retângulo de lados x e y . Então a área desse retângulo é $A(x, y) = xy$.

Considere a figura 2.12

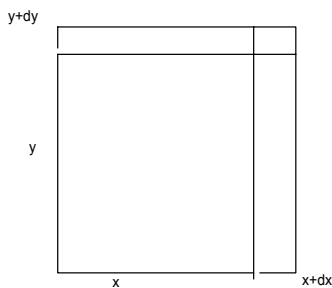


Figura 2.12:

Se ao lado x for dado um acréscimo infinitesimal dx a área do novo retângulo será

$$A'(x + dx, y) = (x + dx)y$$

$$A'(x + dx, y) = xy + ydx$$

$$A'(x + dx, y) = A(x, y) + ydx$$

$$A'(x + dx, y) - A(x, y) = ydx$$

A variação infinitesimal parcial da área será

$dA_x = ydx$. Veja na figura 2.12.

Sendo $\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = y$ podemos escrever $dA_x = \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx$.

Analogamente, a diferencial parcial em relação a y é dada por $dA_y = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$.

Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy a área do

novo retângulo será

$$A'(x + dx, y + dy) = (x + dx)(y + dy)$$

$$A'(x + dx, y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$$

$$A'(x + dx, y + dy) = A(x, y) + ydx + xdy + dxdy$$

$$A'(x + dx, y) - A(x, y) = ydx + xdy + dxdy$$

A estimativa da variação total dA , da área será

$dA = ydx + xdy + dxdy$. Veja na figura 2.12

Sendo $\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = x$ e o produto dos infinitesimais dx e dy é desprezível, isto é $dxdy \approx 0$

podemos escrever $dA = \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$.

Exemplo 2.35. Consideremos um paralelepípedo de lados x , y e z . Então o volume deste paralelepípedo será dado por $V(x, y, z) = xyz$.

Desenvolvendo um raciocínio análogo ao do exemplo anterior obtemos

$$V(x + dx, y, z) = (x + dx)yz$$

$$V'(x + dx, y, z) = xyz + yzdx$$

$$V'(x + dx, y, z) - V(x, y, z) = yzdx$$

ou $dV_x = yzdx$ donde vem

$$dV_x = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$\text{Analogamente, obtemos } dV_x = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx, dV_y = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy \text{ e}$$

$$dV_z = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy o volume do novo paralelepípedo será

$$V'(x + dx, y + dy, z) = (x + dx)(y + dy)z$$

$$V'(x + dx, y + dy, z) = xyz + yzdx + xzdy + zdx dy$$

$$V'(x + dx, y + dy, z) = V(x, y, z) + yzdx + xzdy + zdx dy$$

$$dV_{xy} = yzdx + xzdy + zdx dy$$

O produto $zdx dy$ tende a zero. Logo, é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal parcial do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x e y será dada por

$$dV_{xy} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy$$

Finalmente, se aos lados x , y e z forem dados acréscimos infinitesimais dx , dy e dz o volume do novo paralelepipedo será

$$V'(x + dx, y + dy, z + dz) = (x + dx)(y + dy)(z + dz)$$

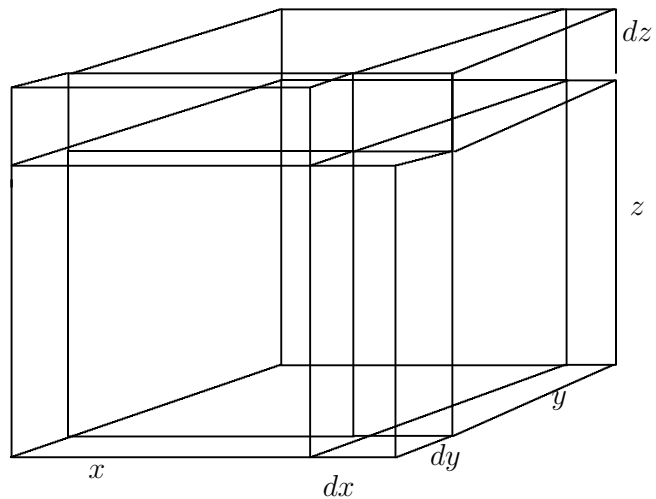
$$V'(x + dx, y + dy, z) = (xy + ydx + xdy + dxdy)(z + dz)$$

$$V'(x + dx, y + dy, z) = xyz + yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

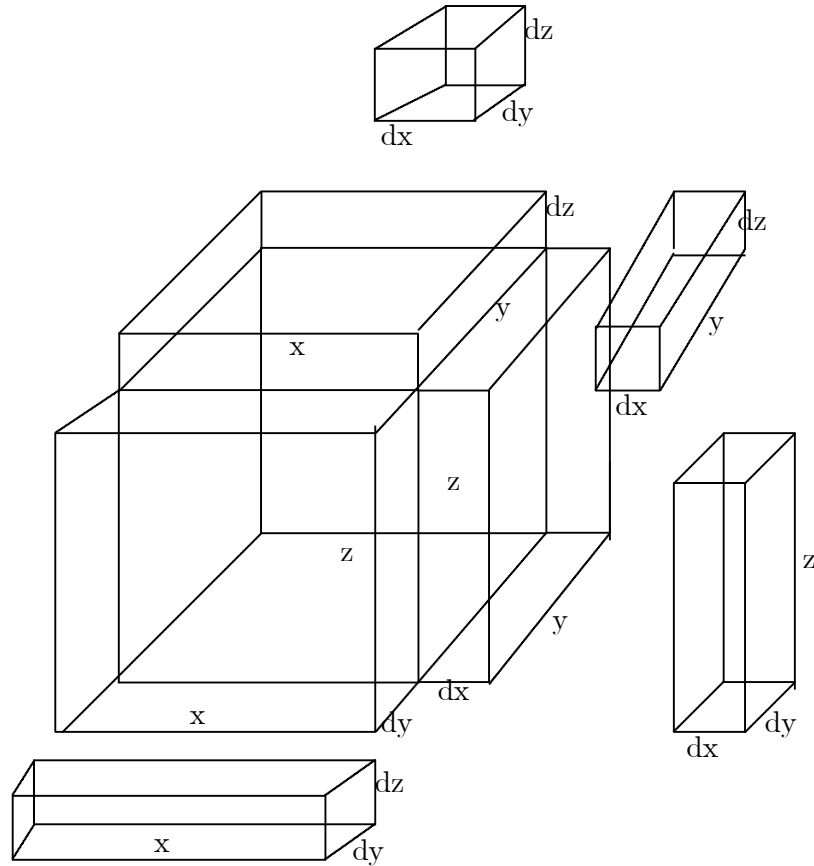
$$V'(x + dx, y + dy, z) - V(x, y, z) = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

$$dV = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz$$

Nas figuras, a seguir, podemos ver, primeiro o paralelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada uma das variáveis e na sequência cada um dos volumes resultantes que compõe o DV .



Volumes resultantes em virtude dos acréscimos são vistos na figura abaixo



Os produtos $zdx dy$, $ydx dz$, $xdy dz$ e $dx dy dz$ tendem a zero. Logo, a soma

$zdx dy + ydx dz + xdy dz + dx dy dz$ é desprezível e, portanto, a estimativa da

variação infinitesimal total do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x , y e z será dada por

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

$$dV = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Geralmente, escreve-se

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Seja $f(x, y, z)$ uma função então a diferencial total de f é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

A diferencial total de uma função dá uma estimativa da variação da função quando dados acréscimos às variáveis independentes.

Exemplo 2.36. *Uma lata de metal fechada, na forma de um cilindro circular reto que possui altura interna igual a 6cm, raio interno 2cm e espessura 0,1cm. Usando diferencial total faça uma estimativa da quantidade de material necessário para fabricação dessa lata em cm^3 .*

Solução: O volume exato de metal para fabricação da lata é a diferença entre o volume interno e o volume total da lata. Sejam h a altura interna, H a altura total r o raio interno e R o raio total. Então, teremos $h = 6\text{cm}$, $H = 6 + 2(0,1) = 6,2\text{cm}$, $r = 2\text{cm}$ e $R = 2 + 0,1 = 2,1\text{cm}$. Seja v o volume interno e V o volume total. Temos, então

Volume Interno

$$v = \pi r^2 h$$

$$v = \pi (2)^2 6$$

$$v = 24\pi\text{cm}^3$$

Volume total

$$V = \pi R^2 H$$

$$V = \pi (2,1)^2 6,2$$

$$V = 27,342\pi\text{cm}^3$$

Portanto

$$\Delta V = V - v$$

$$\Delta V = 3,342\pi\text{cm}^3$$

Porém, a estimativa do volume de material necessário para fabricar a lata, obtida através da diferencial total é:

$$dV = \frac{\partial v}{\partial r}dr + \frac{\partial v}{\partial h}dh$$

$$dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

$$dV = 2\pi (2) (6) (0.1) + \pi (2)^2 (0.2) = 3,2\pi\text{cm}^3.$$

Note que a estimativa é dV menor do que ΔV , pois

$$\Delta V = \pi(r + dr)^2 (h + dh) - \pi r^2 h$$

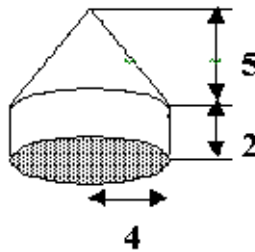


Figura 2.13:

$$\Delta V = \pi r^2 dh + 2\pi r dr h + 2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh$$

$$\Delta V = \frac{\partial v}{\partial h} dh + \frac{\partial v}{\partial r} dr + 2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh$$

Em função de ter sido desprezada a combinação

$$2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh \text{ tem-se } dV < \Delta V.$$

Exemplo 2.37. Usando diferencial, determine a variação do volume, do recipiente (ver figura ??) quando a altura aumenta de 3% e o raio decresce de 1%.

Solução:

$$V = V_1 + V_2$$

Onde V_1 = cilindro e V_2 = Cone

dados do Cilindro : $R = 4$ e $h = 2$; $dR = \frac{-4}{100} = -0.04$; $dh = 2 \frac{3}{100} = 0.06 \rightarrow$

$$V = \pi R^2 h$$

dados do Cone: $R = 4$ e $H = 5$; $dR = \frac{-4}{100} = -0.04$; $dH = 0.15 \rightarrow V_2 = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Portanto a diferencial de volume é igual a

$$\begin{aligned}
dV + dV_1 &= \left[\frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial h} dh \right] + \left[\frac{\partial V_1}{\partial R} dR + \frac{\partial V_1}{\partial H} dH \right] \\
&= [2\pi R h dR + \pi R^2 dh] + \left[\frac{2\pi R h}{3} dR + \frac{\pi R^2}{3} dh \right] \\
&\quad [2\pi 4 * 2 * (-0,04) + \pi 16(0,06)] + \left[\frac{2\pi 4 * 5}{3} (-0,04) + \frac{\pi 16}{3} (0,15) \right] \\
&= [-0,64\pi + 0,96\pi] + \left[\frac{-1,6\pi}{3} + \frac{2,4\pi}{3} \right] = 0,32\pi + \frac{0,8}{3}\pi \cong 0,59\pi
\end{aligned}$$

Exemplo 2.38. Vamos considerar uma caixa com tampa, de forma cilíndrica, com dimensões: $r = 2\text{ cm}$ e $h = 5\text{ cm}$. O custo do material usado em sua confecção é de R\$ 0,81 por cm^2 . Se as dimensões sofrerem um acréscimo de 10% no raio e 2% na altura, pergunta-se:

- Qual o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa?
- Qual o valor exato do acréscimo no custo da caixa?

Solução

Podemos escrever a função custo como $C(r, h) = 0,81(2\pi r h + 2\pi r^2)$

onde $2\pi r h$ representa a área lateral da caixa e πr^2 , a área da base ou tampa.

Quando o raio de base sofre um acréscimo de 10%, passa de 2 para 2,2 cm, portanto $\Delta r = 0,2$

Quando a altura sofre um acréscimo de 2%, passa de 5 cm para 5,1 cm, portanto, $\Delta h = 0,1$

Vamos usar a diferencial para encontrar o valor aproximado do acréscimo do custo. Portanto, temos:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial r} dr + \frac{\partial C}{\partial h} dh$$

$$dC = 0,81(2\pi h + 4\pi r)dr + 0,81.2\pi r dh$$

$$dC = 0,81(2\pi 5 + 4\pi 2)0,2 + 0,81.2\pi 2.0,1 \cong 10,17$$

Portanto, o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa quando as dimensões são modificadas é de R\$10,17, ou um acréscimo de 14,28%.

Para saber o valor exato do acréscimo no custo da caixa, temos que calcular:

$$\begin{aligned}\Delta C &= C(2, 2; 5, 1) - C(2, 5) \\ \Delta C &= 0.81(2\pi 2, 2.5, 1 + 2\pi(2, 2)^2) - 0.81(2\pi 2.5 + 2\pi 2^2) \cong 10, 47\end{aligned}$$

Assim, o valor exato é de R\$10,47, ou um acréscimo de 14,7%. Observamos, assim, que o erro do cálculo aproximado foi de 0,42%.

Exemplo 2.39. *Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 6cm, 8cm e 12cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.*

Solução: Vamos usar a diferencial total para fazer a estimativa solicitada. Sejam $x = 6$, $y = 8$ e $z = 12$. Como a espessura das paredes é 0,2cm tem-se $dx = dy = 2(0,2) = 0,4$ e sendo a espessura do fundo 0,3 e da tampa 0,1 tem-se $dz = 0,3 + 0,1 = 0,4$. Como $V = xyz$ segue que

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\ &= yzdx + xzdy + xydz \\ &= 8(12)0,4 + 6(12)0,4 + 6(8)0,4 \\ &= 86,4\text{cm}^3\end{aligned}$$

Portanto, uma estimativa da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa é $dV = 86,4\text{cm}^3$.

2.10. Derivadas Parciais de Ordem Superior

Seja $z = f(x, y)$ que possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, também deriváveis. Cada uma dessas derivadas parciais pode ser novamente derivadas em relação a x e a y .

Notações

- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ é a segunda derivada parcial de f em relação a x ;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a x ;

- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em x e depois em relação a y ;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em relação a y e depois em relação a x ;
- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a y ;

No caso da função f ter mais de duas variáveis a notação segue a mesma lógica. Por exemplo, se temos $f(x, y, z, t)$ tem-se

- $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \right) = \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial z \partial y \partial x}$ representa a quarta derivada de f , primeiro em relação a x depois em relação a y e assim sucessivamente.

Exemplo 2.40. Seja $f(x, y, z, t) = x^3 y^4 z^5 t^2$ encontrar $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$.

Solução: Encontramos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, nessa ordem:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = 3x^2 y^4 z^5 t^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z, t) = 12x^2 y^3 z^5 t^2$
- $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z, t) = 60x^2 y^3 z^4 t^2$
- $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 120x^2 y^3 z^4 t$.

Exemplo 2.41. A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é conhecida como a equação de Laplace em R_2 . Mostre que a função

$$u(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$$

satisfaz a equação.

solução:

Seja $u = e^x \sin y + e^y \cos x$ temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos x) e^y + (\cos y) e^x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos x) e^y - (\sin y) e^x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin y) e^x - (\sin x) e^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\sin y) e^x - (\cos x) e^y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos x) e^y + (\cos y) e^x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos x) e^y - (\sin y) e^x$$

Vamos verificar se satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sin y) e^x - (\cos x) e^y + (\cos x) e^y - (\sin y) e^x = 0 \text{ (cq)}d$$

Exercícios

1. Seja $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5 + x \sin yz$ encontre todas as derivadas parciais de f até a terceira ordem.
2. Seja $f(x, y) = e^x \ln y$ encontre todas as derivadas parciais de f até a segunda ordem.
3. Use a lei do gás comprimido $PV = kT$ com $k = 10$ para encontrar a taxa de variação instantânea da temperatura no instante em que o volume do gás é 120 cm^3 e está sob uma pressão de 8 din/cm^2 , a taxa de crescimento é $2 \text{ cm}^3/\text{s}$, a pressão decresce a taxa de $0,1 \text{ din/cm}^2$. Sugestão: escreva P , V e T em função do tempo t .

2.11. Extremos de uma Função de duas Variáveis

Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que f tem um máximo relativo no ponto (a, b) se existir um bola aberta de centro (a, b) e raio $r > 0$ tal que para todo (x, y) pertencente à bola tem-se $f(x, y) \leq f(a, b)$. Por outro lado se $f(x, y) \geq f(a, b)$ tal que para todo (x, y) pertencente dizemos que f tem um ponto de mínimo relativo no ponto (a, b) .

Definição 2.42. Os valores máximos e mínimos de f são denominados pontos extremos de f .

Teorema 2.43. A condição necessária para que um ponto (a, b) seja um ponto extremo de f é que $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(a, b)}{\partial y}$ sejam nulas, ou não existam ou (a, b) pertença a fronteira do domínio de f .

Ponto Crítico

Definição 2.44. Seja (a, b) um ponto pertencente ao domínio de f . Se $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(a, b)}{\partial y}$ são nulas ou não existirem então (a, b) é denominado ponto crítico de f .

Ponto de Máximo e de Mínimo

Teorema 2.45. Seja (a, b) um ponto pertencente ao domínio de f . Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existem e são contínuas na bola aberta de centro (a, b) . Suponhamos que (a, b) seja um ponto crítico e sejam ainda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

e

$$\Theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$$

então se:

- i) $\Delta > 0$ e $\Theta < 0$ a função f tem um máximo relativo em (a, b) ;
- ii) $\Delta > 0$ e $\Theta > 0$ a função f tem um mínimo relativo em (a, b) ;
- iii) $\Delta = 0$ nada podemos afirmar;
- iv) $\Delta < 0$ a função f tem um ponto de sela em (a, b) .

Exemplo 2.46. Encontre os pontos críticos da função $f(x, y) = 4xy - x^4 - 2y^2$ classificando-os.

1. Vamos encontrar os pontos críticos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4y - 4x^3 = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4x - 4y = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 4y - 4x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$x = 0; x = \pm 1$$

Logo os pontos críticos são:

$$P(0, 0) \quad Q(1, 1) \quad \text{e} \quad R(-1, -1)$$

2. Vamos analisar o delta

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(x, y) = 48x^2 - 16$$

$$\Delta(0, 0) = -16$$

$$\Delta(1, 1) = 32$$

$$\Delta(-1, -1) = 32$$

3. Vamos analisar o valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x, y) = -12x^2$

$$h(0, 0) = 0$$

$$h(1, 1) = -12$$

$$h(-1, -1) = -12$$

4. Conclusões

$$\Delta(0, 0) < 0 \text{ portanto o ponto } (0, 0) \text{ é de sela}$$

$$\Delta(1, 1) > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \text{ portanto o ponto } (1, 1) \text{ é ponto de máximo}$$

$$\Delta(-1, -1) > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \text{ portanto o ponto } (-1, -1) \text{ é ponto de máximo}$$

Logo os pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de máximos e o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Exemplo 2.47. Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de 108cm^3 de volume se queremos usar a mínima quantidade em material para sua confecção.

Solução: Sejam x o comprimento da base, y a largura da base, z a altura, S a superfície e V o volume da caixa. Então podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \\ V(x, y, z) = xyz \text{ donde } z = \frac{V}{xy} \end{cases}$$

A função $S(x, y, z)$ pode ser escrita como uma função de duas variáveis, se z for substituído por $\frac{V}{xy}$. Desse modo temos

$$S(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Aplicando o teorema 2.43, vamos determinar os pontos críticos.

Inicialmente, pelo teorema 2.43 devemos resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para determinar os pontos críticos.}$$

Temos então,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2V}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{2V}{y^2} \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

implica em

$$\begin{cases} yx^2 - 2V = 0 \\ xy^2 - 2V = 0 \end{cases}$$

donde vem $yx^2 = xy^2$, ou seja $x = y$. Portanto, $2V = x^3$.

Sendo $V = 108$, segue que $x = \sqrt[3]{2(108)} = 6$, $y = 6$. Logo, o ponto $(a, b) = (6, 6)$ é ponto crítico da função $S(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$.

Na sequência determinaremos os valores de

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b).$$

Temos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4V}{x^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6, 6) = \frac{4(108)}{6^3} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(6, 6) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(6, 6) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4V}{y^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6, 6) = \frac{4(108)}{6^3} = 2$$

Portanto,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \text{ e } \Theta = 2.$$

Como $\Delta = 3 > 0$ e $\Theta = 2 > 0$, pelo teorema 2.45, item ii) f tem um mínimo relativo no ponto $(6, 6)$. Logo, as dimensões da base da caixa são $x = 6cm$ e $y = 6cm$. Sendo que $z = \frac{V}{xy}$ segue que $z = \frac{108}{6(6)} = 3$.

Portanto, as dimensões da caixa, para que o custo de fabricação seja mínimo, são $x = 6cm$ e $y = 6cm$ e $z = 3cm$

Exemplo 2.48. Um fabricante faz 2 modelos de um item, padrão e de luxo. Custa R\$ 40,00 para fabricar um modelo padrão e R\$ 60,00 o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por x reais e o de luxo por y reais, então o fabricante venderá $500(y - x)$ do item padrão e $45000 + 500(x - 2y)$ do de luxo a cada ano. Com que preços os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?

Solução:

A Função lucro é dado por :

$$L(x, y) = 500(y - x)(x - 40) + (45000 + 500(x - 2y))(y - 60)$$

Para encontrar os pontos críticos devemos fazer

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0$$

e portanto temos:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 1000y - 1000x - 10\,000 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 1000x - 2000y + 85\,000 = 0$$

Resolvendo este sistema temos:

$$\begin{cases} 1000y - 1000x - 10\,000 = 0 \\ 1000x - 2000y + 85\,000 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1000x + 1000y = 10\,000 \\ 1000x - 2000y = -85\,000 \end{cases} : \begin{cases} x = 65 \\ y = 75 \end{cases}$$

Ponto Crítico $(65, 75)$

Vamos analisar se este ponto crítico é um ponto de máximo

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x^2} = -1000$$

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial y^2} = -2000$$

1.

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x \partial y} = 1000$$

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial y \partial x} = 1000$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1000 & 1000 \\ 1000 & -2000 \end{vmatrix} = 10^6 > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x^2} = -1000 < 0$$

Portanto o ponto $P(65, 75)$ é um ponto de máximo.

Logo o item padrão será vendido por R\$ 65,00 e o de luxo por R\$75,00.

2.12. Exercícios Gerais

1. Usando a definição mostre que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (3x + 2y) = 8 \quad b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x - 4y) = -10$$

2. verifique se o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existe.

3. Em cada função verifique se f é contínua

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad b) \quad (x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad d) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Mostre que $z = \operatorname{sen} \frac{x}{y} + \ln(\frac{y}{x})$ é solução da equação diferencial $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

5. Usando a regra da cadeia (funções compostas) encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$a) \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \quad b) \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$$

$$c) \quad f(x, y) = \ln \sqrt[3]{(x^2 + y^2) + (2x + y^2x^2)}$$

6. Se $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ mostre que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

7. Sendo $z = f(u)$ com $u = x + ay^2$ prove que $\frac{\partial z}{\partial y} - 2ay \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

8. Se $z = \ln(x^2 + y^2)$ mostre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Um pintor cobra R\$12,00 por m^2 para pintar as 4 paredes e o teto de uma sala. Se as medidas do teto são $12m$ e $15m$ e altura $30m$, com um erro de até $0,05m$ em todas as dimensões. Aproxime o erro, usando a diferencial, na estimativa do custo do trabalho, a partir dessas medidas.

10. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular através da diferencial um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001V$ e R aumenta de $0,02$ ohms.

11. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica, Num dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm . Obter uma aproximação da variação do volume, se o raio varia para $12,5$ cm e a altura para

- 7,8 cm. Comparar o resultado com a variação obtido com a variação exata do volume.
12. A areia é derramada num monte cônico na velocidade de $4m^3$ por minuto. Num dado instante, o monte tem $6m$ de diâmetro e $5m$ de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante, se o diâmetro aumenta na velocidade de $2cm$ por minuto? $R \simeq 0,39$
 13. A capacidade vital V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino com x anos de idade e y cm de altura, V pode ser aproximada pela fórmula $V = 27,63y - 0.112xy$. Calcule e interprete (a) $\frac{\partial V}{\partial x}$ (b) $\frac{\partial V}{\partial y}$
 14. A resistência R , em ohms, de um circuito é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em amperes e E é a força eletromotriz em volts. Num instante, quando $E = 120V$ e $I = 15A$, E aumenta numa de velocidade $0,1V/s$ e I diminui à velocidade de $0,05A/s$. Encontre a taxa de variação instantânea de R . Res $s = \frac{1}{30}$
 15. Um funil cônico de dimensões $h = 4m$ e $r = 3m$ será construído para auxiliar o armazenamento de grãos. Sabendo que o material utilizado na construção desse funil custa R\$ 150,00 por m^2 . Usando diferencial, responda qual será o acréscimo de custo na construção desse funil se aumentarmos seu raio em 5% e sua altura 3%.
 16. Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 7cm, 8cm e 13cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.
 17. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar $270m^3$ de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.
 18. Uma caixa retangular tem volume $20cm^3$. O material usado nas laterais custa R\$ 1,00 por metro quadrado, o material usado o fundo custa R\$ 2,00 por metro quadrado e o material usado na tampa custa R\$ 3,00 por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo de confecção seja mínimo? $R = (2, 2, 5)$

19. Sejam $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(3, 3)$ os vértices de um triângulo. Encontre o ponto $P(x, y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos vértices seja a menor possível.
20. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de o máximo possível de volume.
21. Uma firma de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 128cm^3 de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o custo.
22. Determinada empresa produz 2 produtos cujas quantidades são indicadas por x e y . Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2 , respectivamente, que dependem de x e y , conforme equações $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda a produção seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro. $R = (10, 30)$
23. Uma loja vende dois tipos de casacos A e B . O casaco A custa \$ 40,00 e O casaco B custa \$ 50,00. Seja sendo x o preço de venda do casaco A e y o preço de venda do casaco B . O total de vendas feito pela loja foi $(3200 - 50x + 25y)$ para o casaco A e $(25x - 25y)$ para o casaco B . Encontre os valores de x e y para que o lucro seja máximo. $R = (84, 89)$
24. Uma loja vende dois tipos de produtos A e B . O produto tipo A custa \$ 50,00 e o produto tipo B custa \$ 60,00. Seja sendo x o preço de venda do produto tipo A e y o preço de venda do produto tipo B . O total de vendas feito pela loja foi $(-250x + 250y)$ para o produto tipo A e $32000 + 250(x - 2y)$ para o produto B . Encontre os valores de x e y para que o lucro seja máximo. $R = (89, 94)$
25. Alguns correios exigem que o perímetro da face superior de um pacote mais o comprimento da altura não exceda 84 cm, para que possa ser enviado. Determinar as dimensões do pacote retangular de maior volume que pode ser enviado. $R = (14, 14, 28)$