

Funções de Várias Variáveis

por

Milton Procópio de Borba

Neste capítulo, iremos ampliar os conhecimentos de limites, derivadas, diferenciais e estudo da variação das funções que dependem de mais que uma variável.

Como exemplo, podemos usar a função $T(x, y)$ que dá a temperatura T de cada ponto (x, y) de uma chapa circular (exceto as bordas, que é constituída de outro material) de raio unitário, localizada no centro do plano XoY : $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$, com domínio $D = \{ (x, y) / x^2 + y^2 < 1 \}$.

Poderemos estar interessados em analisar as variações das temperaturas em diferentes pontos, quais os pontos mais quentes, mais frios, qual seria a tendência da temperatura na borda, ...

Apesar de trabalharmos mais com funções de duas variáveis, os mesmos procedimentos valem para funções de três ou mais variáveis.

1. Incremento da função

O valor da função $z = f(x, y)$ pode variar se apenas uma das variáveis (x ou y) ou ambas variarem.

No nosso exemplo acima, ao se deslocar do ponto $(x, y) = (0, 0)$ para o ponto $(-0,2, 0,3)$, a temperatura sai de $T(0, 0) = -10^\circ\text{C}$ para $T(-0,2, 0,3) = -7,97^\circ\text{C}$.

1.1. Incremento parcial

Se variarmos apenas x para $x+\Delta x$, o valor de z passa de $f(x, y)$ para $z+\Delta z = f(x+\Delta x, y)$.

Se variarmos apenas y para $y+\Delta y$, o valor de z passa de $f(x, y)$ para $z+\Delta z = f(x, y+\Delta y)$.

Ainda, no nosso exemplo, ao se deslocar do ponto $(x, y) = (0, 0)$ para o ponto $(-0,2, 0)$, a temperatura sai de $T(0, 0) = -10^\circ\text{C}$ para $T(-0,2, 0) = -9,56^\circ\text{C}$ ($\Delta x = -0,2 \Rightarrow \Delta T = 0,44^\circ\text{C}$).

Se o deslocamento fosse para a direção do ponto $(0, 0, 3)$, a temperatura sairia de $T(0, 0) = -10^\circ\text{C}$ para o valor $T(0, 0,3) = -8,41^\circ\text{C}$ ($\Delta y = 0,3 \Rightarrow \Delta T = 1,59^\circ\text{C}$).

1.2. Incremento total

Se variarmos x para $x+\Delta x$ e y para $y+\Delta y$, o valor de z passa de $f(x, y)$ para $z+\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Foi o nosso primeiro exemplo numérico, onde $\Delta x = -0,2$ e $\Delta y = 0,3 \Rightarrow \Delta T = 2,03^\circ\text{C}$.

2. Limites e continuidade

2.1. Limites

Dizemos que o limite da função $z = f(x, y)$ vale L quando (x, y) tende ao ponto (a, b) e escrevemos

$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$, se $f(x, y)$ fica cada vez mais próximo de L , à medida que (x, y) se aproxima de (a, b)

(sem necessariamente chegar lá). Mais precisamente, $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$ se para cada $\varepsilon > 0$, existir

um $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta$.

OSERVAÇÃO:

Se $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$, então este limite L não depende do caminho $y = F(x)$ ou $x = G(y)$.

Assim, se o limite for diferente, por caminhos diferentes, o limite não existe.

Para achar um provável limite, costumamos tomar os caminhos do tipo:

$y = b$, $x = a$, $y = b + m(x-a)$, $x = a + k(y-b)$, $y = b + m(x-a)^2$, $x = a + k(y-b)^2$,

ou, mais geralmente, $y = b + m(x-a)^r$ ou $x = a + k(y-b)^s$,

2.2. Continuidade num ponto

Se num certo ponto (a,b) do domínio, o limite coincide com o valor da função (quando “chegar lá”), isto é

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L = f(a,b), \text{ dizemos que } f \text{ é contínua no ponto } (a,b).$$

2.3. Continuidade da função

Dizemos, ainda, que f é contínua, se o for em cada ponto (a,b) do domínio.

2.4. Exemplos

2.4.1. Como em funções de uma variável, a funções *polinomiais*, *senoidais*, *cosenoidais* e *exponenciais* são exemplos de funções contínuas (em todo seu domínio).

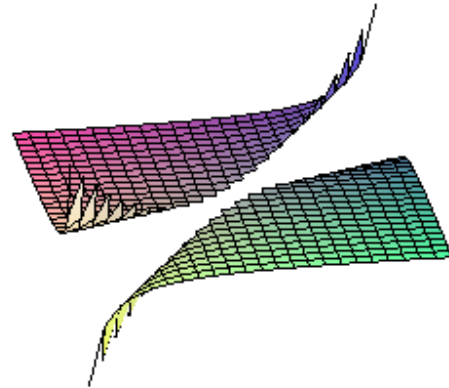
2.4.2. No nosso exemplo da temperatura, $T(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$, com domínio apenas no interior do disco $D = \{(x,y) / x^2 + y^2 < 1\}$, $T(0,1)$ não está definido, mas tem limite igual a -4°C .

2.4.3. Para $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)/(x - y)$, não é definida $f(x,y)$ em nenhum ponto (x,y) da reta $y = x$.

$$\text{Obviamente, não existe } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,3)} f(x,y) = \infty,$$

Também $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe, apesar de todos os caminhos $y = mx$ (com $m \neq 1$) permitir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3m^2)x}{1 - m} = 0, \quad \forall m \neq 1.$$



Para ver que realmente $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, vamos considerar o $\varepsilon > 0$ dado e mostrar que não conseguimos achar um $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ sempre que $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$.

APROXIMADAMENTE:

Realmente, para $\forall \delta > 0$, haverá pontos (x,y) “perto” de $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = \delta^2 \end{cases}$ e então $2x^2 \approx \delta^2$

Neste caso, $x^2 + 3y^2 \approx 4x^2 \approx 2\delta^2$, enquanto que $|x - y| < 2\delta^2/\varepsilon$, ou $|1/(x - y)| > \varepsilon/2\delta^2$.

Com isto, $|f(x,y) - 0| = |(x^2 + 3y^2)/(x - y)| > 2\delta^2 \cdot \varepsilon/2\delta^2 = \varepsilon$, ou seja, $|f(x,y) - 0| > \varepsilon$.

MAIS PRECISAMENTE:

Para $\forall \delta > 0$, basta pegar (x,y) com $\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 = \delta^2/4 \end{cases}$ com $1 - \delta/2\varepsilon < m < 1 + \delta/2\varepsilon$

Assim, $x^2 + y^2 = \delta^2/4 = x^2 + m^2 x^2 = (1 + m^2) x^2 \Rightarrow x^2 = \delta^2/4(1 + m^2) \Rightarrow x = (\delta/2\sqrt{1 + m^2})$

Então, $x^2 + 3y^2 = x^2 + 3m^2 x^2 = (1 + 3m^2) x^2 = (1 + 3m^2) \delta^2/4(1 + m^2) > \delta^2/4$

e também $|x - y| = |x - mx| = |1 - m| \cdot |x| < (\delta/2\varepsilon) \cdot (\delta/2\sqrt{1 + m^2}) < \delta^2/4\varepsilon \Rightarrow |1/(x - y)| > 4\varepsilon/\delta^2$.

Portanto, $|f(x,y) - 0| = |(x^2 + 3y^2)/(x - y)| > (\delta^2/4) \cdot 4\varepsilon/\delta^2 = \varepsilon$, ou seja, $|f(x,y) - 0| > \varepsilon$.

2.4.4. $g(x,y) = 2(x-1)y/(x^2 + y^2 - 2x + 1)$, não é definida $g(1,0)$.

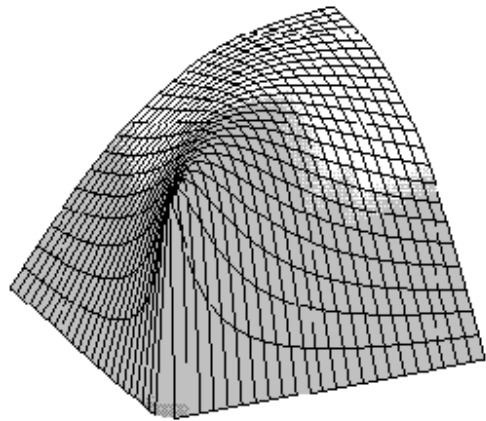
Queremos saber o que acontece perto de $(1,0)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y)$$

Apesar de cada caminho reto $y = m(x-1)$, produzir um limite (existe) conhecido, finito:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m(x-1)^2}{(1+m^2)(x-1)^2} = \frac{2m}{1+m^2},$$

não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y)$, pois os limites acima dependem do caminho.



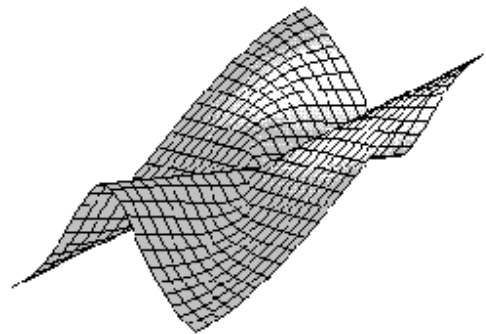
2.4.5. $V(t,x) = 2t^2(x-1)/(3t^2 + x^2 - 2x + 1)$ não é definida em $(0,1)$.

Veremos que $\lim_{(t,x) \rightarrow (0,1)} V(t,x) = 0$.

Realmente, cada caminho reto $x = 1+mt$, produz o

$$\text{mesmo valor: } \lim_{t \rightarrow 0} V(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2mt^3}{(3+m^2)t^2} = 0,$$

Isto não garante a existência do limite. A maneira de provar a afirmação acima é estabelecer um $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, de forma que $|V(t,x) - 0| < \varepsilon$ sempre que $0 < |(t,x) - (0,1)| < \delta$.



Realmente, dado um $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \varepsilon/2$.

Assim, se $|(t,x) - (0,1)| < \delta$, então $t^2 < t^2 + (x-1)^2 = (t^2 + x^2 - 2x + 1)$ e $|x-1| < \delta$.

Por outro lado, $3t^2 + x^2 - 2x + 1 > t^2 + x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1/(3t^2 + x^2 - 2x + 1) < 1/(t^2 + x^2 - 2x + 1)$.

Então $|V(t,x) - 0| = |2t^2(x-1)/(3t^2 + x^2 - 2x + 1)| < 2(t^2 + x^2 - 2x + 1) \cdot \delta / (t^2 + x^2 - 2x + 1) = 2\delta = \varepsilon$, ou seja, $|V(t,x) - 0| < \varepsilon$.

2.4.6. Também $h(t,x) = t^2x/(t^2 + x^2)$ não é definida em $(0,0)$.

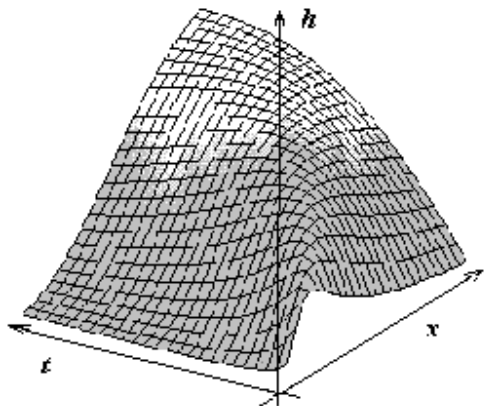
Pode-se mostrar que $\lim_{(t,x) \rightarrow (0^+,0)} h(t,x) = 0$.

Realmente, cada caminho reto $x = mt$, produz o

$$\text{mesmo valor: } \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{mt^3}{(t+m^2)t^2} = 0,$$

Isto não garante a existência do limite.

Novamente, para provar que o limite é nulo, basta estabelecer um $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$.



3. Derivadas parciais

Quando $z = f(t,x,y)$ depende de três variáveis $(t, x \text{ e } y)$, ao falarmos da derivada de z , deveremos indicar em relação a qual variável estaremos derivando.

3.1. Definições

Derivada de z em relação a $t \Rightarrow z_t = z'_t = \frac{\partial z}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, x, y) - f(t, x, y)}{\Delta t}$ (x e y permanecem constantes)

Derivada de z em relação a $x \Rightarrow z_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(t, x + \Delta x, y) - f(t, x, y)}{\Delta x}$ (t e y permanecem constantes)

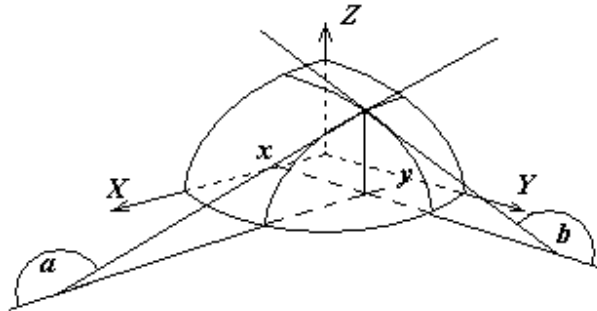
Derivada de z em relação a $y \Rightarrow z_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(t, x, y + \Delta y) - f(t, x, y)}{\Delta y}$ (t e x permanecem constantes)

3.2. Significados

Seus valores representam a velocidade com que z cresce, quando apenas uma variável está sendo alterada.

No caso de $z = f(x, y)$, podemos ainda, considerar $\partial z / \partial x = \operatorname{tg} a$, como o coeficiente angular da reta tangente à superfície $z = f(x, y)$, paralela ao plano XOZ .

Analogamente, $\partial z / \partial y = \operatorname{tg} b$.



3.3. Cálculo

O cálculo de $\partial z / \partial x$, por exemplo, se faz, derivando a expressão $z = f(t, x, y)$, como se só x fosse variável enquanto que t e y fossem constantes.

3.4. Exemplos

3.4.1. No nosso exemplo da temperatura, $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$, temos que:

$\partial T / \partial x = 2x - 2 \Rightarrow$ em $(0, 0)$, $\partial T / \partial x = -2$, significando velocidade de -2°C por deslocamento em x .

$\partial T / \partial y = 2y + 5 \Rightarrow$ em $(0, 0)$, $\partial T / \partial y = 5$, significando velocidade de 5°C por deslocamento em y .

Enquanto que, saindo do ponto $(0, 0)$, na direção positiva do eixo OX , temos um *esfriamento bem lento* (-2°C/uc), na direção positiva do eixo OY , temos um *aquecimento rápido* (5°C/uc).

3.4.2. Se $f(t, x, y) = e^{-2t} \sin \pi x / 3 + 4 \cos \pi y$, temos que:

$\partial f / \partial t = -2e^{-2t} \sin \pi x / 3 \Rightarrow$ em $(0, 1, 5)$, $\partial f / \partial t = -\sqrt{3} \Rightarrow$ velocidade de $\approx -1,73$ por variação de t .

$\partial f / \partial x = (\pi/3)e^{-2t} \cos \pi x / 3 \Rightarrow$ em $(0, 1, 5)$, $\partial f / \partial x = \pi/6 \Rightarrow$ velocidade de $\approx 0,52$ por variação de x .

$\partial f / \partial y = -4\pi \sin \pi y \Rightarrow$ em $(0, 1, 5)$, $\partial f / \partial y = 0 \Rightarrow$ velocidade nula pela variação de y .

4. Diferencial

Quando $Z = f(t, x, y)$, sua diferencial é dada por $dZ = \frac{\partial Z}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy$.

Quando as variáveis t , x e y sofrem **pequenas** variações dt , dx e dy respectivamente, a diferencial dZ representa praticamente a variação de Z .

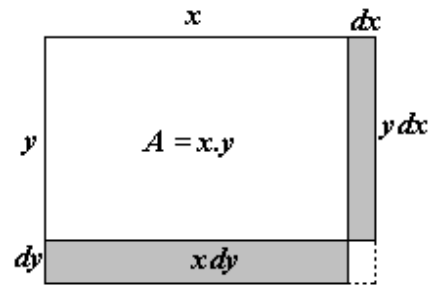
Na verdade, dZ representa a variação de Z (supondo Z substituída pelo seu "plano tangente").

Exemplo:

A área de um retângulo é $A(x,y) = x.y$

A diferencial de A é $dA = \frac{\partial A}{\partial x}.dx + \frac{\partial A}{\partial y}.dy$.

Ou Seja: $dA = y.dx + x.dy$, que é praticamente o aumento da área, se dx e dy forem pequenos.



5. Derivação Composta (Regra da Cadeia)

Se $Z = f(u,v,w)$ com u, v e w dependendo de duas variáveis (x e y), podemos derivar Z , em relação às variáveis x e y , sem ter de explicitar Z como função de x e y :

$$\text{Derivada de } Z \text{ em relação a } x \Rightarrow Z_x = Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\text{Derivada de } Z \text{ em relação a } y \Rightarrow Z_y = Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\text{Matricialmente: } \begin{vmatrix} Z_x \\ Z_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} Z_u \\ Z_v \\ Z_w \end{vmatrix}$$

Exemplo: $Z = x^2 + y^2 - 3x$ com $x = r \cos t$ e $y = r \sin t$,

Podemos escrever $Z = r^2 - 3r \cos t$ para então derivar Z , em relação às variáveis r e t :
 $\partial Z / \partial r = 2r - 3 \cos t$ enquanto que $\partial Z / \partial t = 3r \sin t$.

Poderíamos, sem substituir x e y em Z , calcular $\partial Z / \partial x = 2x - 3$ e $\partial Z / \partial y = 2y$

Também $\partial x / \partial r = \cos t$ e $\partial x / \partial t = -r \sin t$ enquanto que $\partial y / \partial r = \sin t$ e $\partial y / \partial t = r \cos t$

$$\text{Com isto, } \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = (2x-3) \cos t + (2y) \sin t$$

$$\text{e } \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2x-3)(-r \sin t) + (2y)(r \cos t)$$

$$\text{Matricialmente: } \begin{vmatrix} Z_r \\ Z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_t & y_t \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} Z_x \\ Z_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -r \sin t & r \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2x-3 \\ 2y \end{vmatrix}$$

6. Derivação Implícita

Quando temos $y = f(x)$ dada implicitamente, por $\Phi(x,y) = C$, podemos, calcular $y' = f'(x)$, assim:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot y' \Rightarrow y' = - \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y}$$

$$\text{Exemplo: } \Phi(x,y) = x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y' = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - 2x / 2y = -x/y,$$

7. Derivadas superiores

Quando $Z = f(t,x,y)$, normalmente Z_t, Z_x , e Z_y , são funções de t e x e y e portanto, podemos estar interessados em saber como variam. Para isto, podemos calcular suas derivadas:

$$\text{Derivadas de } Z_t \Rightarrow \frac{\partial(Z_t)}{\partial t} = \frac{\partial(\partial Z / \partial t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = Z_{tt} = Z''_{tt}, \quad \frac{\partial(Z_t)}{\partial x} = \frac{\partial(\partial Z / \partial t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial t} = Z_{tx} = Z''_{tx}$$

$$\text{e } \frac{\partial(Z_t)}{\partial y} = \frac{\partial(\partial Z / \partial t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial t} = Z_{ty} = Z''_{ty}$$

$$\text{Derivadas de } Z_y \Rightarrow \frac{\partial(Z_y)}{\partial t} = \frac{\partial(\partial Z / \partial y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial y} = Z_{yt} = Z''_{yt}, \quad \frac{\partial(Z_y)}{\partial x} = \frac{\partial(\partial Z / \partial y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = Z_{yx}$$

$$\text{e } \frac{\partial(Z_y)}{\partial y} = \frac{\partial(\partial Z / \partial y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Z_{yy}.$$

Estas são algumas das segundas derivadas de Z , que também são passíveis de derivação.

$$\text{Algumas das terceiras derivadas de } Z, \text{ são: } \frac{\partial(Z_{yy})}{\partial t} = \frac{\partial^3 Z}{\partial t \partial y^2} = Z_{yyt} \text{ e } \frac{\partial(Z_{xx})}{\partial x} = \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = Z_{xxx}.$$

OBSERVAÇÃO: Se Z, Z_x, Z_y, Z_{xy} e Z_{yx} forem contínuas, então $Z_{xy} = Z_{yx}$.

8. Máximos e mínimos

8.1. Pontos críticos

Como nas funções de uma variável, os extremos (máximos e mínimos) ocorrem numa(s) destas situações (*pontos críticos*):

Primeiras derivadas parciais nulas;

Primeiras derivadas parciais não definidas

Fronteira do domínio de definição da função.

8.2. Máximo, mínimo ou ponto de sela?

A verificação se um ponto crítico é *máximo* ou *mínimo* (ou não) envolve o estudo do valor da função e dos sinais das primeiras derivadas nas proximidades do ponto crítico ou dos sinais das segundas derivadas no ponto.

Nas funções de duas variáveis, não temos pontos de inflexão, como em funções de uma variável. Podemos ter um *ponto de sela*, quando numa direção a função atinge um máximo num ponto e em outra direção, um mínimo no mesmo ponto.

O nome se dá pela semelhança com uma *sela* de cavalo: máximo na direção das pernas do cavaleiro (transversal ao cavalo) e mínimo na direção longitudinal (dorso) do cavalo.

8.3. Esquemas dos sinais

Nos pontos críticos, onde as primeiras derivadas se anulam e as segundas derivadas são definidas, vale a decisão pelo *Hesseano* = $\det \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{Ponto de sela}$$

$$> 0 \Rightarrow \text{Máximo } (F_{xx} < 0) \text{ ou mínimo } (F_{xx} > 0)$$

Obs.: Quando *Hesseano* > 0 , o sinal de F_{xx} é o mesmo que de F_{yy} .

8.4. Exemplo

No nosso exemplo da temperatura $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$ na parte interior do disco no plano XOY dado por $D = \{ (x, y) / x^2 + y^2 < 1 \}$, os pontos críticos são:

$$\text{Primeiras derivadas parciais nulas} \Rightarrow \begin{cases} \partial T / \partial x = 2x - 2 = 0 \\ \partial T / \partial y = 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5/2 \end{cases} \Rightarrow \text{fora do domínio}$$

Primeiras derivadas parciais não definidas $\Rightarrow$ não é o caso

$$\begin{aligned} \text{Fronteira do domínio de definição da função} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} T_1(x) = -9 - 2x - 5\sqrt{1-x^2} \\ T_2(x) = -9 - 2x + 5\sqrt{1-x^2} \end{array} \right. \\ T'_1(x) = -2 + 5x/\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow & \boxed{x = 2/\sqrt{29} \Rightarrow} \quad T_1 = -9 - \sqrt{29} \approx -14,4^\circ\text{C} \Rightarrow \text{mínima.} \\ T'_2(x) = -2 - 5x/\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow & \boxed{x = -2/\sqrt{29} \Rightarrow} \quad T_2 = -9 + \sqrt{29} \approx -3,6^\circ\text{C} \Rightarrow \text{máxima.} \end{aligned}$$

Finalmente, nos extremos do domínio ($x = -1$ e $x = 1$), temos $T = -7^\circ\text{C}$ e $11^\circ\text{C} \Rightarrow$ não extremo.

8.5. Máximos e mínimos condicionados (multiplicadores de Lagrange)

Quando procuramos os extremos de uma função $f(t, x, y)$ sujeita a uma restrição $\phi(t, x, y) = 0$, podemos fazer como no exemplo acima da temperatura na fronteira do círculo, onde $f(x, y) = T(x, y)$ e $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, substituído $y = \sqrt{1-x^2}$ em $T(x, y)$ e ficamos com uma variável a menos.

O inconveniente, é que poderemos ter algumas expressões algébricas por substituir.

Outra possibilidade é analisar os extremos da função auxiliar $F(t, x, y, \lambda) = f(t, x, y) + \lambda \phi(t, x, y)$. Temos uma variável a mais (e não a menos), mas sem muito “algebrismo” a fazer.

8.6. Exemplo novamente

No nosso exemplo da temperatura $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10$ na fronteira do disco no plano XOY dado por $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$, teremos $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x + 5y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left| \begin{array}{l} \partial F / \partial x = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ \partial F / \partial y = 2y + 5 + 2\lambda y = 0 \\ \partial F / \partial \lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{l} x = -2/\sqrt{29}; y = 5/\sqrt{29}; \lambda = -1 - \sqrt{29}/2 \\ x = 2/\sqrt{29}; y = -5/\sqrt{29}; \lambda = -1 + \sqrt{29}/2 \end{array}} \quad \begin{array}{l} T_1 = -9 - \sqrt{29} \approx -14,4^\circ\text{C} \text{ (mínima)} \\ T_2 = -9 + \sqrt{29} \approx -3,6^\circ\text{C} \text{ (máxima)} \end{array}$$