3. INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Integrais duplas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Encontrar o valor de uma integral dupla;
2. Interpretar geometricamente uma integral dupla;
3. Dada uma região delimitada por funções, encontrar os limitantes que permitem calcular o valor da integral dupla;
4. Calcular integrais duplas em coordenadas polares;
5. Resolver exercícios usando o Maple

Integrais triplas: Objetivos:

Ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de:

1. Encontrar o valor de uma integral tripla;
2. Interpretar geométrica e fisicamente uma integral tripla;
3. Calcular integrais triplas em coordenadas retangulares;
4. Calcular integrais triplas em coordenadas cilíndricas;
5. Calcular integrais triplas em coordenadas esféricas;
6. Mudar os limitantes de uma integral em coordenadas retangulares para cilindricas e de cilindricas para retangulares;
7. Mudar os limitantes de uma integral em coordenadas retangulares para esféricas e de esféricas para retangulares;
8. Calcular a área de uma superfície;
9. Fazer a maquete de uma figura delimitada por superfícies e encontrar seu volume.
10. Resolver exercícios usando o Maple.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

3.1. Introdução

No estudo das funções de várias variáveis, ao calcularmos derivadas parciais escolhiamos uma das variáves independentes para derivar f em relação a ela e admitiamos que as demais eram constantes. O mesmo procedimento será adotado para integração múltipla.

Antes de estudarmos a integração múltipla propriamente dita vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Encontrar a primitiva da função* $f(x,y) = 12x^2y^3$ *em relação à* x.

Solução: Como foi dito, vamos admitir y como constante e integrar em relação a x. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dx = 4x^3y^3 + C$$

Porém, nesse caso, a constante C é uma função de y. Pode ser por exemplo, $C(y) = ay^3 + by^2 + cy + 3$ e uma das primitivas de $f(x,y) = 12x^2y^3$ será

$$F(x,y) = 4x^3y^3 + ay^3 + by^2 + cy + 3$$

Note que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.2. *Encontrar a primitiva da função* $f(x,y) = 12x^2y^3$ *em relação à* y.

Solução: Agora vamos admitir x como constante e integrar em relação a y. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dy = 3x^2y^4 + K$$

Nesse caso, a constante K é uma função de x. Pode ser por exemplo, $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ e uma outra primitiva de $f(x,y) = 12x^2y^3$ será $F(x,y) = 3x^2y^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$. Note que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.3. *Encontrar o valor da expressão* $\int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: Aplicando o teorema fundamental do cálculo vem:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} 24xydy &= 12xy^2|_x^{x+1}\\ &= 12x\,(x+1)^2 - 12x\,(x)^2\\ &= 12x^3 + 24x^2 + 12x - 12x^3\\ &= 24x^2 + 12x\end{aligned}$$

Como podemos observar $\int_x^{x+1} 24xydy$ é uma função de x. Isto é, $F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy$ donde $F(x) = 24x^2 + 12x$.

Exemplo 3.4. *Encontrar o valor numérico de* $\int_1^2 F(x)\,dx$ *sendo* $F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: No exemplo anterior vimos que

$$F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy = 24x^2 + 12x$$

Portanto, aplicando do teorema fundamental do cálculo vem

$$\begin{aligned}\int_1^2 F(x)\,dx &= \int_{x=1}^{x=2} (24x^2 + 12x)\,dx\\ &= (8x^3 + 6x^2)\,|_1^2\\ &= 8(2)^3 + 6\,(2)^2 - \left(8\,(1)^3 + 6\,(1)^2\right)\\ &= 74\end{aligned}$$

Os exemplo 3.3 e 3.4 podem ser escritos como segue:

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \left(\int_x^{x+1} 24xydy\right) dx$$

ou

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \int_x^{x+1} 24xydydx$$

Dessa forma, obtemos um exemplo de integral dupla. Note que a variável dependente é a primeira a ser integrada e a variável independente a última. O processo de solução é dado abaixo:

$$\begin{aligned}
\int_1^2\int_x^{x+1} 24xydydx &= \int_1^2\left(\int_{y=x}^{y=x+1} 24xydy\right)dx\\
&= \int_1^2\left(12xy^2|_{y=x}^{y=x+1}\right)dx\\
&= \int_1^2\left(24x^2+12x\right)dx\\
&= \left(8x^3+6x^2\right)|_1^2\\
&= 74
\end{aligned}$$

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 3.5. *Encontrar o valor da integral* $\int_0^4\int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx$.

Solução: Aplicando o teorema fundamental do cálculo primeiro integrando em relação a y e depois em relação a x.

$$\int_0^4\int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx$$

$$= \int_0^4\left(3\sqrt{16-x^2}y\right)|_x^{3x}dx$$

$$= \int_0^4\left(3\sqrt{16-x^2}\right)(3x-x)\,dx$$

$$= \int_0^4 6x\sqrt{16-x^2}dx$$

$$= -2\sqrt{(16-x^2)^3}|_0^4$$

$$= -2\sqrt{(16-4^2)^3}-\left(-2\sqrt{(16-0^2)^3}\right) = 128$$

Portanto, o valor da integral $\int_0^4\int_x^{3x} 3\sqrt{16-x^2}dydx = 128$

Exercícios

Nos problemas abaixo calcule a integral dupla

$a)\ \int_0^1\int_x^{3x+1} xydydx \qquad b)\ \int_0^1\int_y^{3y+1} xy^2dxdy$

$c)\ \int_0^4\int_0^1 xe^{xy}dydx \qquad d)\ \int_0^2\int_{\ln y}^{y^2} ye^{xy}dxdy$

$e)\ \int_0^\pi\int_0^{y^2} sen\frac{x}{y}dxdy \qquad f)\ \int_0^{\ln 2}\int_0^y xy^5e^{x^2y^2}dxdy$

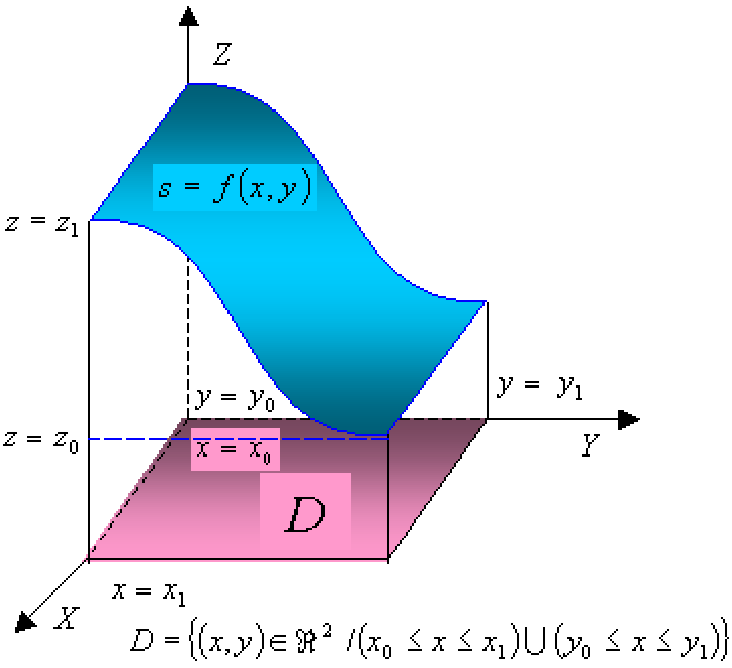


Figura 3.1:

3.2. Interpretação Geométrica da Integral Dupla

A definição de integral dupla comporta uma interpretação geométrica análoga à definição de integral definida simples, associando-a ao problema de cálculo de volume (ver figura 3.1) da mesma forma que a integral definida é associada ao cálculo de área. Assim, definição formal da integral dupla envolve a soma de muitas áreas elementares, isto é, diferenciais de área , ou seja, , com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação. Assim, pode usar-se a integral para resolver problemas concernentes a volumes e a áreas.

Ao tentar resolver-se "o problema do volume" , sabe-se que se trata área da base vezes a altura é tal que para cada área elementar o valor de fica univocamente definido.

Consideremos uma função $z = f(x, y) \geq 0$, definida numa região R do plano xy. Nossa intensão é estimar o volume aproximado do sólido delimitado por $z = f(x, y)$ acima do plano $z = 0$ e pelo cilindro definido pela curva fechada que delimita a região R. Para tanto, subdividimos R em $n-$subregiões traçando linhas paralelas aos planos coordenados, conforme na figura 3.2 e 3.3.Assim, a integral será o volume obtido pela soma de uma infinidade de volumes das colunas infinitesimais inscritas em forma de paralelepípedos, como mostra a Figura 3.3.

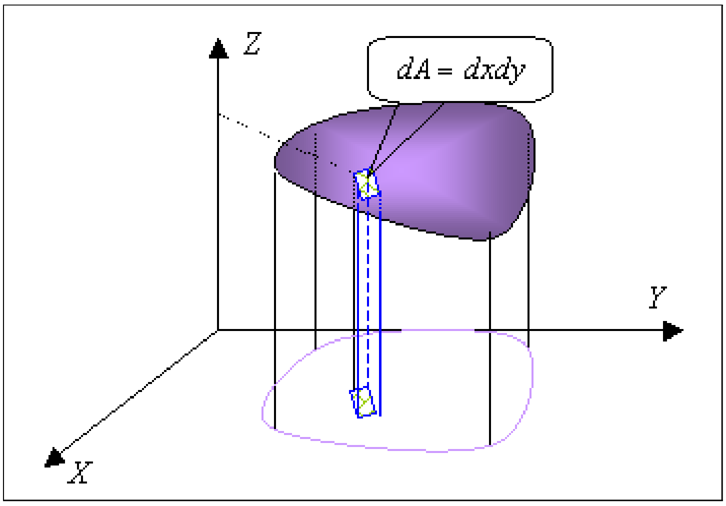


Figura 3.2:

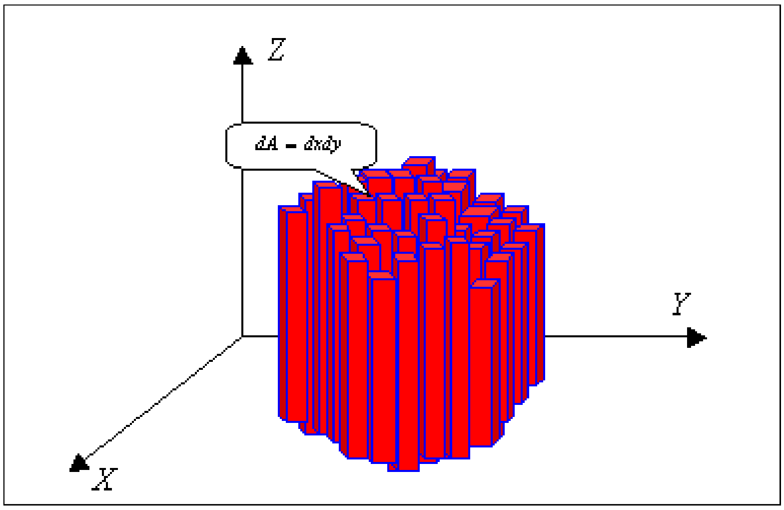


Figura 3.3:

Então $\{R_1, R_2, ..R_i...R_n\}$é uma partição de R. Seja $|P|$ o comprimento da maior de todas as diagonais dos R_n subretângulos.

Seja A_i a área da subregião R_i Para cada i escolhenos um ponto $(x_i, y_i) \in R_i$. O produto $V_i = f(x_i, y_i)\, A_i$ é o volume do $i-$ ésimo paralelepípedo de área A_i e altura

$f(x_i, y_i)$. Como há $n-$ subdivisões, há $n-$paralelepípedos. Assim, o volume aproximado do sólido delimitado superiormente por $f(x, y)$ e inferiormente pela região R é dado por

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A_i$$

A integral dupla de uma função f definida numa região R é dada por

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \lim_{|P| \to 0} V_n = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A_i$$

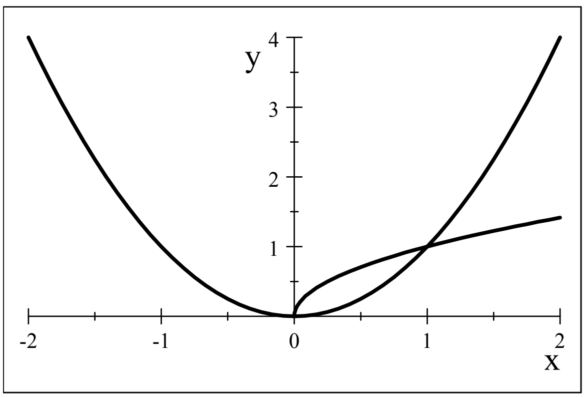
Observação 5. *Se $f(x, y) = 1$ então $\iint_R f(x, y)\, dxdy = \iint_R dxdy$ é, geometricamente, a área da região R.*

3.3. Cálculo da Integral Dupla

Saber reconhecer o domínio de integração ou região de integração é fundamental para o cálculo das integrais duplas. Outro ponto importante é o reconhecimento das curvas que delimitam a região de integração. Muitas vezes é conveniente ter essas curvas escritas em função de x, isto é, $y = f(x)$ e outras vezes é conveniente ter x como função de y, isto é $x = f(y)$. Essa conveniência é devido ao maior ou menor trabalho exigido no processo do cálculo do valor numérico. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.6. *Calcular o valor da integral $\iint_R 24xy dxdy$ sendo R a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região e a tabela de limites dessa região.



Curvas	funções
curva à esquerda	$x = 0$
curva à direita	$x = 1$
curva inferior	$y = x^2$
curva superior	$y = \sqrt{x}$

Agora podemos efetuar os cáculos. A curvas à esquerda e à direita são os limites que integram o primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior o segundo. Assim,

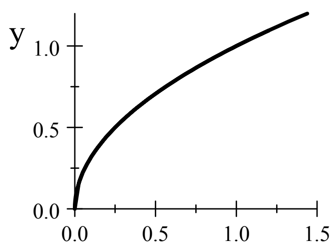
$$\begin{aligned}
\int\int_R 24xydxdy &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} 24xydydx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} 12xy^2|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} 12x\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(12x^2 - 12x^5\right) dx \\
&= \left(4x^3 - 2x^6\right)|_{x=0}^{x=1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

O cálculo da integral no exemplo 3.6 foi feito tomando x como variável independente.

Vamos calcular a mesma integral tomando y como variável independente.

Exemplo 3.7. *Calcular o valor da integral* $\iint\limits_R 24xydxdy$ *sendo* R *a região delimitada pelas curvas* $x = y^2$ *e* $x = \sqrt{y}$.

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região e a tabela de limites dessa região.



Curvas	funções
curva à esquerda	$y = 0$
curva à direita	$y = 1$
curva inferior	$x = y^2$
curva superior	$x = \sqrt{y}$

Agora podemos efetuar os cáculos. A curvas à esquerda e à direita são os limites do primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior do segundo. Assim,

$$\iint_R 24xydxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 24xydxdy$$

$$= \int_0^1 12yx^2|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 12y \left[(\sqrt{y})^2 - \left(y^2\right)^2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(12y^2 - 12y^5\right) dy$$

$$= \left(4y^3 - 2y^6\right)|_{y=0}^{y=1} = 2$$

Como podemos observar, o valor numérico é o mesmo nos dois casos.

Muitas vezes a região de integração não é delimitada apenas por quatro curvas. Nesse caso, a escolha da variável independente adequada pode diminuir o trabalho duante o processo de integração. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.8. *Encontrar o valor da integral* $\iint_R dxdy$ *sendo* R *a região delimitada pelas curvas* $y = x^2$*(internamente),* $y = 6 - x$ *e* $y = 1$.

a) Tomando x como variável independente.

b) Tomando y como variável independente.

Solução: Primeiro vamos fazer o gráfico da região (ver figura 3.4) e a tabela de limites dessa região.

Os pontos de interseção das curvas são: $(-3, 9)$ e $(2, 4)$ para as curvas $y = x^2$, $y = 6 - x$ e $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ para as curvas $y = x^2$ e $y = 1$.

$a)$ Tomamdo x como variável independente. Vemos que a região de integração deve ser subdividida em três sub-regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, a tabela de limites é dada por

Tabela de limites referente à região R

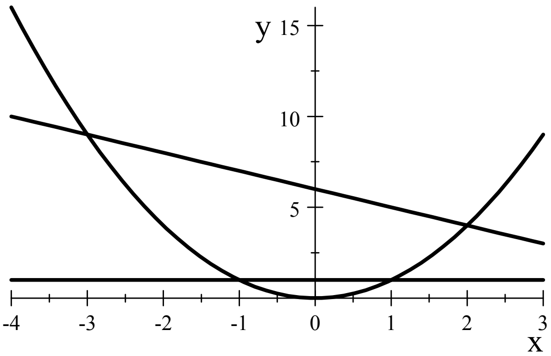


Figura 3.4: área delimitada

Limites	R_1	R_2	R_3
curva à esquerda	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$
curva à direita	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
curva inferior	$y = x^2$	$y = 1$	$y = x^2$
curva superior	$y = 6 - x$	$y = 6 - x$	$y = 6 - x$

Assim, a integral dupla $\int\int_R dxdy$ será dada por :

$$\int\int_R xdxdy = \int\int_{R_1} dxdy + \int\int_{R_2} dxdy + \int\int_{R_3} dxdy$$

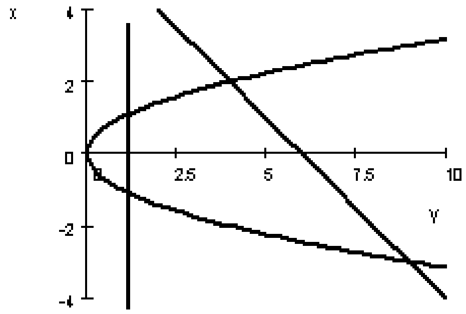
$$= \int_{-3}^{-1}\int_{x^2}^{6-x} dydx + \int_{-1}^{1}\int_{1}^{6-x} dydx + \int_{1}^{2}\int_{x^2}^{6-x} dydx$$

$$= \int_{-3}^{-1} y|_{x^2}^{6-x} dx + \int_{-1}^{1} y|_{1}^{6-x} dx + \int_{1}^{2} y|_{x^2}^{6-x} dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left(6 - x - x^2\right) dx + \int_{-1}^{1} (6 - x - 1)\, dx + \int_{1}^{2} \left(6 - x - x^2\right) dx$$

$$= \frac{22}{3} + 10 + \frac{13}{6} = \frac{39}{2}$$

b) Tomamdo y como variável independente, os pontos de interseção das curvas são: $(9, -3)$ e $(4, 2)$ para as curvas $x = \pm\sqrt{y}$, $x = 6 - y$ e $(1, -1)$ e $(1, 1)$ para as curvas $x = \pm\sqrt{y}$ e $y = 1$. A representação gráfica da região R é dada abaixo.



Vemos que a região de integração deve ser subdividida em duas sub-regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, a tabela de limites é dada por

Tabela de limites referente à região R

Limites	R$_1$	R$_2$
curva à esquerda	$y = 1$	$y = 4$
curva à direita	$y = 4$	$y = 9$
curva inferior	$x = -\sqrt{y}$	$x = -\sqrt{y}$
curva superior	$x = \sqrt{y}$	$x = 6 - y$

Assim, a integral dupla $\int\int_R dxdy$ será dada por

$$\int\int_R dxdy = \int\int_{R_1} dxdy + \int\int_{R_2} dxdy$$

$$= \int_1^4 \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dxdy + \int_4^9 \int_{-\sqrt{y}}^{6-y} dxdy$$

$$= \int_1^4 x|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy + \int_4^9 x|_{-\sqrt{y}}^{6-y} dy$$

$$= \int_1^4 (\sqrt{y} - (-\sqrt{y}))\, dy + \int_4^9 (6 - y - (-\sqrt{y}))\, dy$$

$$= \frac{61}{6} + \frac{28}{3} = \frac{39}{2}$$

Observação 6. *Note que a mudança da variável independente diminuiu o trabalho dispensado ao cálculo da integral.*

Exemplo 3.9. *Escreva a integral que representa a área da região delimitada pelas curvas* $x = y^2$, $y - x = 1$, $y = 1$ *e* $y = -1$

a. Tomando x como variável independente

b. Tomando y como variável independente

Solução: A área delimitada pelas curvas pode ser vista na figura 3.5

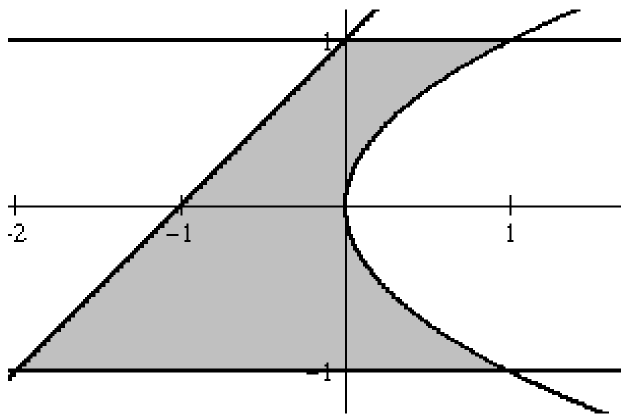


Figura 3.5: área delimitada

Inicialmente, vamos encontrar os pontos de interseção

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 1 \end{cases} P(1,1) \begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \end{cases} Q(1,-1) \begin{cases} y = 1 + x \\ y = -1 \end{cases} R(-2,-1)$$

a. tomando x como variável independente

Tabela de limites referente à região R

Limites	R_1	R_2
curva à esquerda	$x = -2$	$x = 0$
curva à direita	$x = 0$	$x = 1$
curva inferior	$y = -1$	$y = \sqrt{x}$
curva superior	$y = 1 + x$	$y = 1$

Ps: Na R_2 vamos usar a semetria

$$A = \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{1+x} dydx + 2 \int_{0}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} dydx = \frac{8}{3}$$

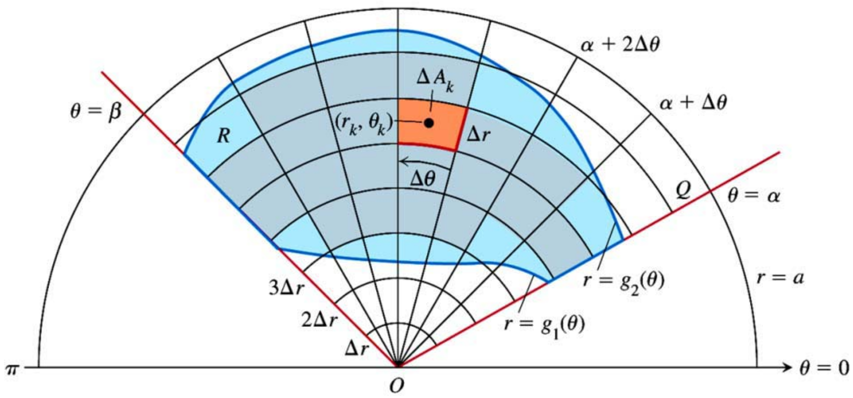
b. Tomando y como variável independente.

Limites	R_1
curva à esquerda	$y = -1$
curva à direita	$y = 1$
curva inferior	$x = y - 1$
curva superior	$x = y^2$

$$A = \int_{-1}^{1} \int_{y-1}^{y^2} dxdy = \frac{8}{3}$$

3.4. Integrais Duplas em Coordenada Polares

Frequentemente, a região R sobre a qual está sendo calculada a integral dupla é mais facilmente descrita por coordenadas polares do que por coordenadas retangulares. Vamos descrever o processo para o cáculo de integrais duplas em coordenadas polares. Veja a figura **??**



Partição em coordenadas polares

Seja $X = \{\alpha = \theta_0, \alpha + \Delta\theta, \alpha + 2\theta, \alpha + 3\Delta\theta, ..., \theta_n = \beta\}$ uma partição do arco $\widehat{\alpha\beta}$. Consideremos as curvas de raio ρ_{i-1}e ρ_i e a sub-região R_i de R delimitada pelas curvas de raio ρ_{i-1}, ρ_i, θ_{i-1} e θ_i. A forma de R_i é aproximadamente um retângulo de lados $\Delta\rho_i$, $l_{i-1} = \rho_{i-1}\Delta\theta_i$ e $l_i = \rho_i\Delta\theta_i$. Podemos admitir que uma aproximação da área de R_i é dada por $A_i = \Delta\rho_i\rho_i\Delta\theta_i$. Tomando um ponto $(\rho_{k_i}, \theta_{k_i})$ no interior de R_i podemos formar um sólido cuja área da base é A_i e altura $f\left(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}\right)$, de modo que o volume desse sólido será dada por

$$V_i = f\left(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}\right) \Delta\rho_i\rho_i\Delta\theta_i$$

Assim, o volume sob a superfície $f(\rho, \theta)$ será aproximada pela soma

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i$$

Seja $|P|$ a diagonal da maior região R_i da partição de R. Então, se $|P| \to 0$ segue que $\Delta\rho_i \to 0$, $\Delta\theta_i \to 0$, $\rho_{k_i} \to \rho$, $\theta_{k_i} \to \theta$ e $\rho_i \to \rho$. Portanto, podemos escrever

$$V = \lim_{|P|\to 0} V_n = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\rho_{k_i}, \theta_{k_i}) \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i \text{ ou}$$

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Observação 7. *Vimos anteriormente que a partição de uma região R por retas paralelas aos eixos x e y geram sub-regiões retangulares cujos lados são Δx_i e Δy_i e área $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Pergunta-se: as áreas $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ e $A_i = \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i$ são iguais? É claro que não. Porém, $\dfrac{\lim\limits_{\Delta x \Delta y \to 0} \Delta x_i \Delta y_i}{\lim\limits_{\Delta\rho\Delta\theta\to 0} \Delta\rho_i \rho_i \Delta\theta_i} = 1$ e isso implica em $dxdy = \rho d\rho d\theta$. Assim, a equivalência entre a integral dupla em coordenadas retangulares e a integral dupla em coordenadas polares é dada por*

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Exemplo 3.10. *Escreva a integral, em coordenadas polares, que calcula a área sombreada 3.6*

Solução:
círculo 1: $x^2 + y^2 = 4$ (em cartesianas) $\rho = 2$ (em polar)
círculo2: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (em cartesianas) $\rho = 4\cos\theta$ (em polar)
a intersecção dos dois: $\cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{3}$
A área é

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{2}^{4\cos\theta} \rho d\rho d\theta$$

em coordenadas polares

Exemplo 3.11. *Encontre a área delimitada pelas curvas $\rho = 2$ e $\rho = 4sen\theta$ exterior à curva $\rho = 2$.*

Solução: O gráfico dessas curvas é dada pela figura 3.7

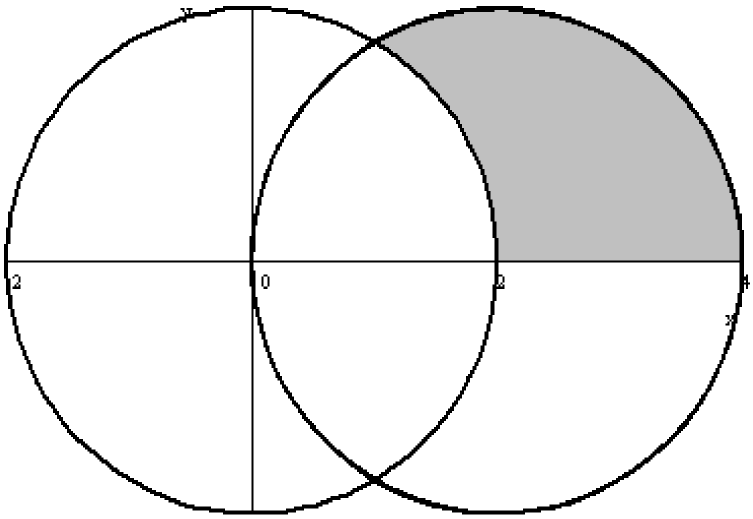


Figura 3.6: área sombreada

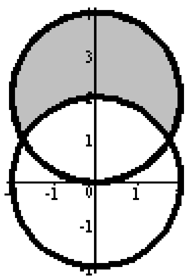


Figura 3.7: área delimitada

Agora, o primeiro passo é encontrar os pontos de interseção das curvas. Portanto, igualando as equações temos

$$4sen\theta = 2$$

$$sen\theta = \frac{1}{2}$$

assim obtemos

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

A tabela de limites é dada por

Limites	R_1
arco inferior	$\alpha = \frac{\pi}{6}$
arco superior	$\beta = \frac{5\pi}{6}$
raio menor	$\rho = 2$
raio maior	$\rho = 4sen\theta$

A área da região é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{2}^{4sen\theta} \rho d\rho d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_2^{4sen\theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{(4sen\theta)^2}{2} - \frac{2^2}{2} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(8sen^2\theta - 2\right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{8(1-\cos 2\theta)}{2} - 2\right) d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(4 - 4\cos 2\theta - 2\right) d\theta \\
&= \left(2\theta - 2\frac{sen2\theta}{}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \left(2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2sen2\frac{5\pi}{6} - \left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2sen2\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3.5. Exercícios Gerais

1. Nos items a e b, faça o gráfico, a tabela de limites e escrva a integral que permite calcular a área da região R delimitada pelas curvas primeiro tomando x como variavel independente e após tomando y como variável independente.

    1. Sendo R a região delimitada pelas curvas $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$, $y = \frac{4x}{3} + 12$ e $y = 12 - \frac{9x}{2}$.
    2. Sendo R a região delimitada pelas curvas $y = \frac{4x}{3} + \frac{8}{3}$, $y = -2 - x$, $y = \frac{x}{2} - 2$ e $y = \frac{16}{3} - \frac{4x}{3}$.

2. Nos problemas a seguir faça o gráfico e use coordenadas polares para carcular as integrais

    1. $\int\int_R \sqrt{14 - x^2 - y^2}dxdy$ sendo R a região dada por $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.
    2. $\int\int_R \sqrt{14 - x^2 - y^2}dxdy$ sendo R a região dada por $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
    3. $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2} dydx$

4. $\int_0^2 \int_{y=0}^{y=-\sqrt{4-x^2}} \frac{dydx}{4+\sqrt{x^2+y^2}}$

5. $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^3} dxdy$ sendo R dada por $4 \leq x^2+y^2 \leq 9$.

4. INTEGRAIS TRIPLAS

4.1. Introdução

As integrais triplas, aplicadas sobre sólidos no espaço xyz, são definidas segundo uma analogia com a definição das integrais duplas aplicadas sobre uma região do plano xy. Não é nosso objetivo discutir os pormenores da definição pois estes fazem parte do conteúdo de um texto de cálculo avançado. Vamos esboçar apenas as idéias principais.

Definição 4.1. *Seja um sólido S no espaço tridimensional, por exemplo, um paralelepípedo, um elipsóide, uma esfera etc, e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis definida sobre cada ponto de $(x, y, z) \in S$ definimos integral tripla (se existir) como sendo*

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dxdydz$$

4.2. Interpretação geométrica da integral tripla

Para fixar as idéias vamos supor que o sólido S é um paralelepípedo. Uma partição desse paralelepípedo é obtida seccionando-o com $n-$planos paralelos aos eixos coordenados, conforme ilustra a figura 4.1

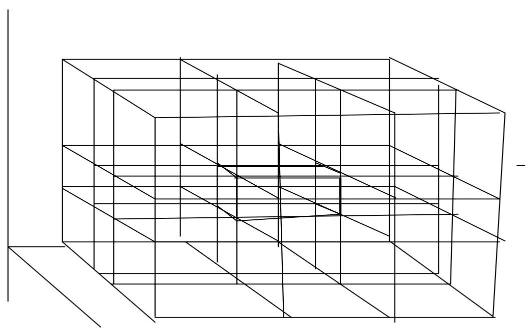


Figura 4.1:

O fracionamento de S obtido pela partição é um conjunto de sub-parelelepípedos chamados células da partição. Suponhamos que uma $i-$célula tenha dimensões $\Delta x_i, \Delta y_i$ e Δz_i, Então, o volume dessa $i-$célula é $V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$. Seja (x_i^*, y_i^*, z_i^*) um ponto qualquer da $i-$célula e seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função densidade em cada ponto de S, então uma estimativa da massa da $i-$célula é $m_i = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$ e, desse modo uma estimativa da massa do sólido S será

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$$

Seja $|N|$ a célula de maior diâmetro da partição de S então a massa m do sólido S será dada por

$$m = \lim_{|N| \to 0} m_n = \lim_{|N| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*, z_i^*\right) \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i$$

ou

$$m = \iiint_S f\left(x, y, z\right) dxdydz$$

Observação 8. *Se $f\left(x, y, z\right) = 1$ então a massa m e o volume V do sólido tem o mesmo valor numérico. Portanto, o volume do sólido em termos de integrais triplas é dado por*

$$V = \iiint_S dxdydz$$

4.3. Cálculo da integral tripla em coordenadas retangulares

Seja S um sólido no espaço delimitado pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ e pelas superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ em que $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo par (x, y)conforme tabela de limites abaixo sobre a qual desejamos encontrar a integral tripla com respeito a função $f\left(x, y, z\right)$ definida em todos os pontos de S. Então podemos enunciar as seguintes tabelas de limites

Tabela de limites

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = a$
Curva à direita	$x = b$
Curva inferior	$y = y_1(x)$
Curva superior	$y = y_2(x)$
Superfície inferior	$z = f(x, y)$
Superfície superior	$z = g(x, y)$

Assim, a integral tripa tem forma

$$\iiint_S f\left(x, y, z\right) dxdydz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f\left(x, y, z\right) dzdydx$$

Exemplo 4.2. *Determine o volume do sólido delimitado pelos planos* $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ *e* $y + \frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 2$

Solução: vamos fazer um esboço do sólido, conforme figura 4.2

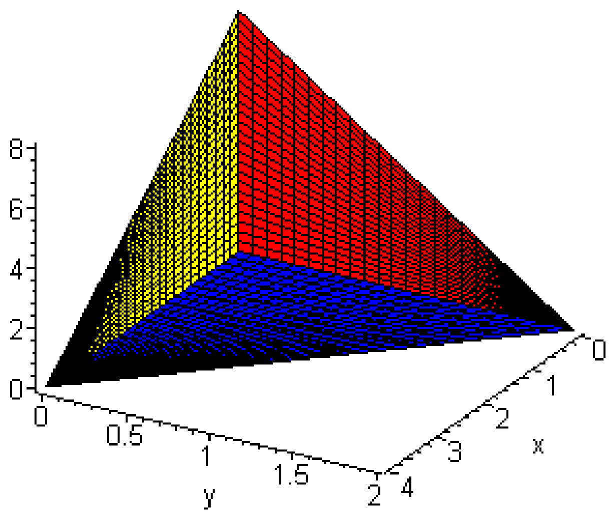


Figura 4.2: volume delimitado

Agora, vamos escolher o plano xy (ver figura 4.3) para fazer a projeção (poderia ser outro)

Limites	R_1
à esquerda	$x = 0$
à direita	$x = 4$
curva inf	$y = 0$
curva sup	$y = 2 - \frac{x}{2}$
sup inf	$z = 0$
sup sup	$z = 4(2 - \frac{x}{2} - y)$

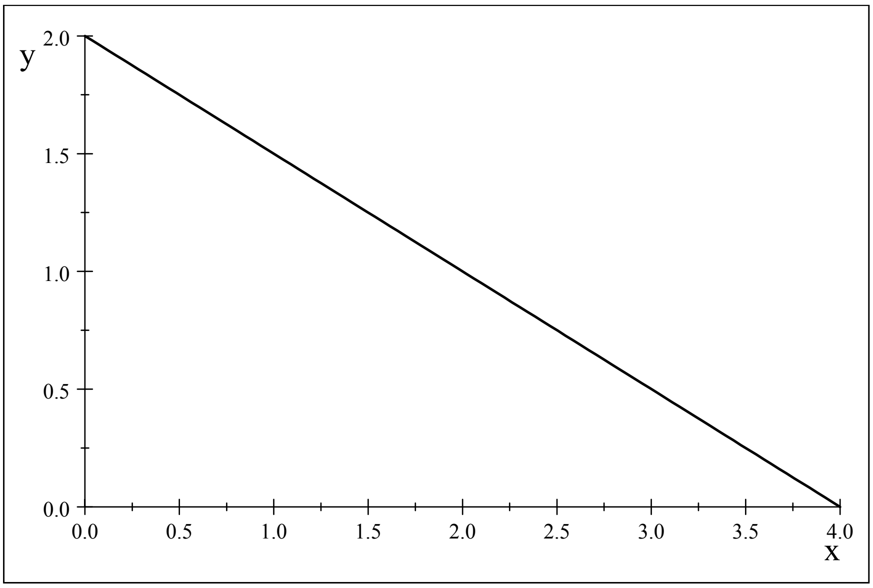


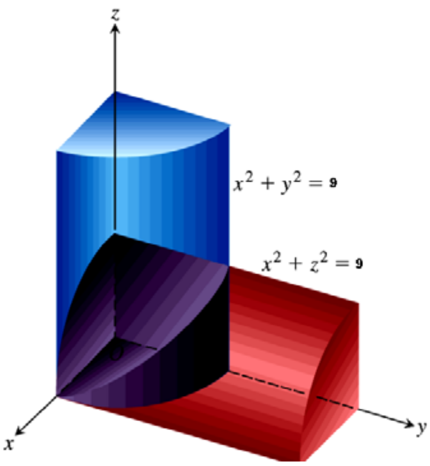
Figura 4.3: projeção no plano xy

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{4(2-\frac{x}{2}-y)} dzdydx \\
&= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} z \mid_0^{4(2-\frac{x}{2}-y)} dydx \\
&= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} 8 - 2x - 4y)dydx \\
&= \int_0^4 (8y - 2xy - 2y^2) \mid_0^{2-\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^4 \left[2x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) - 4x - 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + 16 \right] = \\
&= \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right] dx = \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

logo, o volume $V = \frac{32}{3}$ u.v

Exemplo 4.3. *Calcular o volume do sólido delimitado pela interseção dos cilindros* $z^2 + x^2 = 9$ *e* $y^2 + x^2 = 9$ *no I octante.*

Solução: Vamos fazer o desenho do sólido e escolher um dos planos coordenados para a projeção.



volume delimitado

Como o sólido faz parte do I octante, temos os planos $z = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ delimitando o sólido.

Limites	R1
à esquerda	$x = 0$
à direita	$x = 3$
curva inf	$y = 0$
curva sup	$y = \sqrt{9 - x^2}$
sup inf	$z = 0$
sup sup	$z = \sqrt{9 - x^2}$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx \\
&= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2} dydx \\
&= \int_0^3 y\sqrt{9 - x^2} \,|_0^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
&= \int_0^3 (9 - x^2) dx \\
&= 9x - \frac{x^3}{3} \,|_0^3 = 27 - 9 = 18
\end{aligned}$$

Logo o volume do sólido é $V = 18uv$

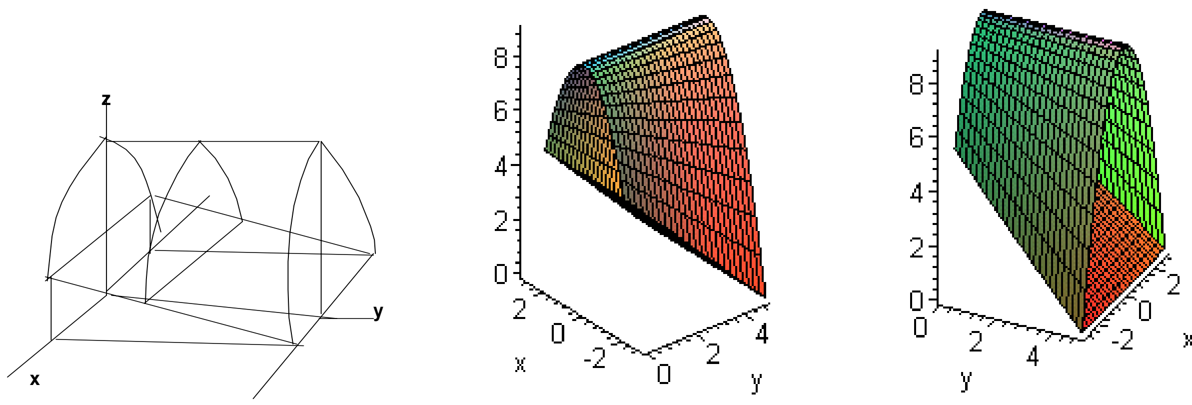
Exemplo 4.4. *Encontrar o volume do sólido delimitado pelas superfícies* $z = 9 - x^2$, $z = 5 - y$, $y = 0$ e $y = 5$.

Solução: O primeiro passo é determinar as curvas que limitam a região de integração sobre o plano xy. Para isso resolvemos o sistema de equações $\begin{cases} z = 9 - x^2 \\ z = 5 - y \end{cases}$.

Igualando as duas equações obtemos a parábola $y = x^2 - 4$. Desse modo, no plano xy, a região de integração é delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4$, $y = 0$ e $y = 5$. Para diminuir o trabalho no processo de integração é conveniente tomar y como variável independente. Desse modo a tabela de limites é dada por (Veja o gráfico **??**)

Tabela de limites

Curvas	equações
Curva à esquerda	$y = 0$
Curva à direita	$y = 5$
Curva inferior	$x = -\sqrt{y+4}$
Curva superior	$x = \sqrt{y+4}$
Superfície inferior	$z = 5 - y$
Superfície superior	$z = 9 - x^2$



O volume é dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} dzdxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} z|_{5-y}^{9-x^2} dxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} (9 - x^2 - (5 - y))\, dxdy \\
&= \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} (4 - x^2 + y)\, dxdy
\end{aligned}
$$

Como a superfície é simétrica em relação ao eixo y podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^5 \int_0^{\sqrt{y+4}} (4 - x^2 + y)\, dxdy \\
&= 2\int_0^5 \left(4x - \frac{x^3}{3} + yx\right)|_0^{\sqrt{y+4}} dy \\
&= 2\int_0^5 \left(4\sqrt{y+4} - \frac{\left(\sqrt{y+4}\right)^3}{3} + y\sqrt{y+4}\right) dy \\
&= 2\int_0^5 \left(\frac{8}{3}\sqrt{(y+4)} + \frac{2}{3}y\sqrt{(y+4)}\right) dy \\
&= 2[\frac{16}{9}\left(\sqrt{(y+4)}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{y+4}\right)^5 - \frac{16}{9}\left(\sqrt{y+4}\right)^3]|_0^5 \\
&= 2\left[\frac{4}{15}\left(\sqrt{(y+4)}\right)^5\right]|_0^5 \\
&= 2\left[\frac{4}{15}\left(\sqrt{(5+4)}\right)^5 - \left(\frac{4}{15}\left(\sqrt{4}\right)^5\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{8}{9}\left(\sqrt{9}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{9}\right)^5 - \left(-\frac{8}{9}\left(\sqrt{4}\right)^3 + \frac{4}{15}\left(\sqrt{4}\right)^5\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{8}{9}(27) + \frac{4}{15}(243) - \left(-\frac{8}{9}(8) + \frac{4}{15}(32)\right)\right] \\
&= \frac{1688}{15} = 112.53uv
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.5. *Faça a tabela de limites e escreva a integral que permite calcular a massa do sólido delimitado pelas superfícies* $x^2 + y - 16 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 2x + 13$, $z = 0$ *e* $z = 10$ *sendo a densidade* $d(x, y, z) = xyz$

Vamos inicialmente identificar as superfícies:

$$
\begin{cases}
x^2 + y - 16 = 0 \text{ cilindro parabólico} \\
x + y - 4 = 0 \text{ plano} \\
y = 2x + 13 \text{ plano} \\
z = 0 \text{ plano} \\
z = 10 \text{ plano}
\end{cases}
$$

Agora, vamos fazer uma projeção no plano xy, conforme figura 4.4

LImites	R1	R2
à esquerda	$x = -3$	$x = 1$
à direita	$x = 1$	$x = 4$
curva inf	$y = 4 - x$	$y = 4 - x$
curva sup	$y = 2x + 13$	$y = 16 - x^2$
sup inf	$z = 0$	$z = 0$
sup sup	$z = 10$	$z = 10$

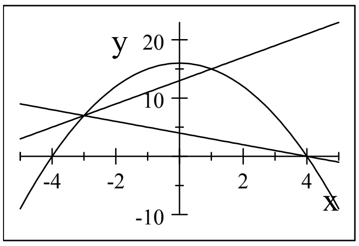


Figura 4.4: projeção no plano xy

logo a massa é dada por

$$M = m_1 + m_2$$

$$M = \int_{-3}^{1}\int_{y=4-x}^{2x+13}\int_{z=0}^{z=10} xyzdzdydx + \int_{1}^{4}\int_{y=4-x}^{y=16-x^2}\int_{z=0}^{z=10} xyzdzdydx$$

4.4. Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Uma integral tripla pode ser convertida em coordenadas cilíndricas seguindo o processo descrito a seguir.

Sejam θ_0 e θ_1 tais que $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ e suponhamos que ρ_1 e ρ_2 são funções contínuas de θ tais que $0 \leq \rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ seja verdadeiro para todos os valores θ tais que $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Sejam $f(\rho, \theta)$ e $g(\rho, \theta)$ funções contínuas tais que $f(\rho, \theta) \leq g(\rho, \theta)$ seja verdadeiro para todo valor de ρ com $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e todo $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$. Seja S o sólido contituido por todos os pontos cujas coordenadas cilíndricas satisfaçam as condições $\theta_0 \leq \theta_1$, $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta)$ e $f(\rho, \theta) \leq g(\rho, \theta)$. Então temos a tabela de limites

Tabela de limites

Curvas	equações
Arco inferior	θ_1
Arco superior	θ_2
Curva inferior	$\rho_1(\theta)$
Curva superior	$\rho_2(\theta)$
Superfície inferior	$z = f(\rho, \theta)$
Superfície superior	$z = g(\rho, \theta)$

E a integral tripla

$$\int_{a}^{b}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

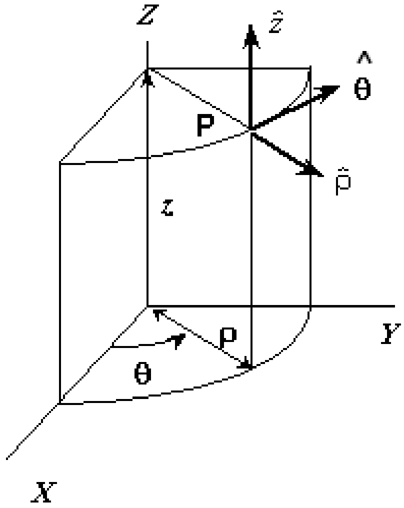


Figura 4.5:

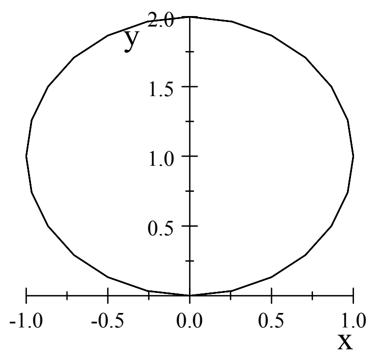
é escrita em coordenadas cilíndricas como segue

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{f(\rho,\theta)}^{g(\rho,\theta)} f(\rho,\theta,z)\, \rho dz d\rho d\theta$$

Exemplo 4.6. *Determinar o volume do sólido delimitado superiormente pelo parabolóide* $y^2 + x^2 + 1 - z = 0$ *inferiormente pelo plano* $z = 0$, *e lateralmente pelo cilindro* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solução: Graficamente temos o seguinte sólido (ver figura 4.6)

A projeção no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 - 2y = 0$ que é a circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$(ver figura **??**)



projeção no plano xy

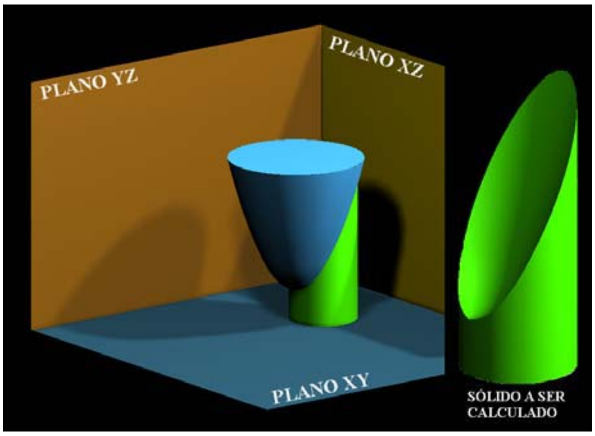


Figura 4.6:

O sólido está limitado inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pelo parabolóide $z = y^2 + x^2 + 1$

Fazendo a tabela, podemos observar que em coordenadas cilindricas é muito mais fácil resolver esse problema

Tabela de limites em coordenadas retangulares Tabela de limites em coord. cilíndricas

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = -1$
Curva à direita	$x = 1$
Curva inferior	$y = -\sqrt{1-x^2}+1$
Curva superior	$y = -\sqrt{1-x^2}+1$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = y^2 + x^2 + 1$

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = \pi$
Curva inferior	$\rho_1(\theta) = 0$
Curva superior	$\rho_2(\theta) = 2se$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = \rho^2 + 1$

logo o Volume em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \int_0^{1+\rho^2} \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \rho z \mid_0^{1+\rho^2} d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2sent} \rho(1+\rho^2) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2sent}(\rho+\rho^3)d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\mid_0^{2sen\theta})d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(2sen^2\theta d\theta + 4sen^4\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)+4(\frac{1-\cos 2\theta}{2})^2)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta+1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta+1-2\cos 2\theta)d\theta+\int_0^{\pi}\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= 2\theta-\frac{3sen2\theta}{2}\mid_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$= 2\pi+(\frac{\theta}{2}+\frac{sen4\theta}{8}\mid_0^{\pi})$$

$$= 2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

Logo o volume desse sólido é $V=\frac{5\pi}{2}u.v$

Exemplo 4.7. *Represente graficamente o sólido cujo volume é dado pela integral:*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-\rho^2\cos^2\theta}\rho dz d\rho d\theta$$

Tabela de limites em coord. cilíndricas

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = 2\pi$
Curva inferior	$\rho_1 = 0$
Curva superior	$\rho_2 = 2$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 4-\rho^2\cos^2\theta$

Considerando os arcos inferior e superior concluímos que a base do sólido está projetada sobre todos os quadrantes, pois temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como o $0 \leq \rho \leq 2$ o raio varia fixamente, portanto, lateralmente temos um cilindro centrado na origem $x^2+y^2=4$. Inferiormente temos $z=0$ e superiormente o cilindro parabólico $z=4-x^2$ (observe que $\rho^2\cos^2\theta = x^2$)

Portanto, temos o sólido, conforme ilustra a figura 4.7

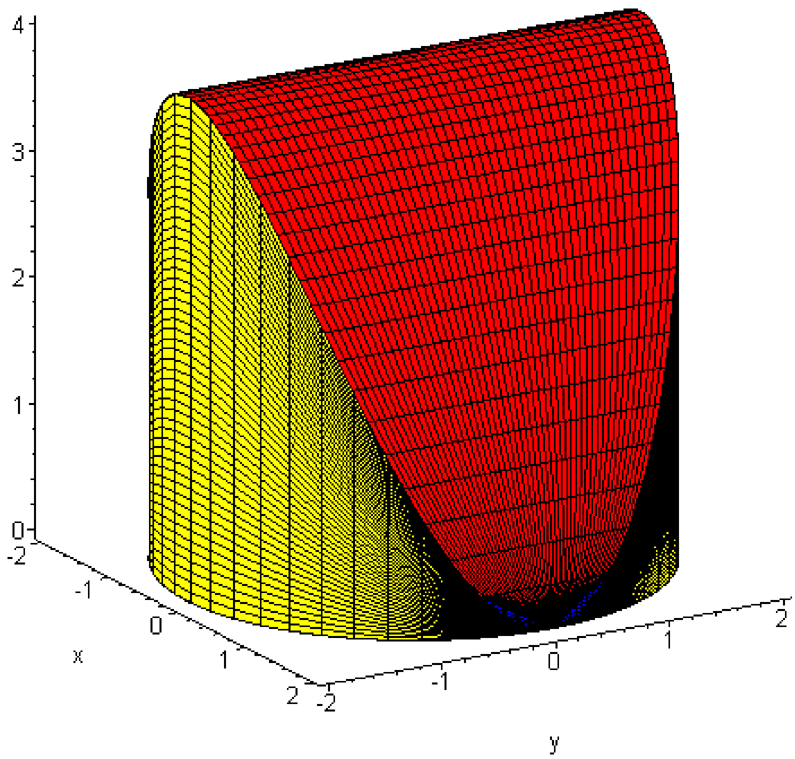


Figura 4.7: volume delimitado

Exemplo 4.8. *Escreva em coordenadas retangulares a integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{9-\rho^2}\rho^2 dz d\rho d\theta.$$

Solução: Para melhor compreensão, primeiro devemos identificar a representação geométrica do sólido. Vamos estudar a tabela de limites

Tabela de limites em coord. cilindricas

Curvas	equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$
Curva inferior	$\rho_1 = 0$
Curva superior	$\rho_2 = 2\cos\theta$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - \rho^2$

Considerando os arcos inferior e superior concluímos que a base do sólido está projetada sobre o primeiro quadrante, pois temos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Agora vamos escrever a curva $\rho = 2\cos\theta$ em coordenadas retangulares. Sabemos que $x = \rho\cos\theta$, de modo que $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, e que $\rho^2 = x^2 + y^2$. Assim,

$$\rho = 2\cos\theta \qquad \text{donde vem}$$

$$\begin{aligned} \rho &= 2\left(\frac{x}{\rho}\right) && \text{ou} \\ \rho^2 &= 2x && \\ x^2 + y^2 &= 2x && \text{ou} \\ x^2 + y^2 - 2x &= 0 && \textit{ou} \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1 && \end{aligned}$$

Vemos que em coordenadas retangulares a projeção do sólido sobre o plano xy é delimitada pela circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Desse modo, a tabela de limites, em coordenadas retangulares é dada por:

Tabela de limites em coordenadas retangulares

Curvas	equações
Curva à esquerda	$x = 0$
Curva à direita	$x = 2$
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = \sqrt{2x - x^2}$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - (x^2 + y^2)$

Também devemos escrever de forma adequada a expressão $\rho^2 dz d\rho d\theta$. Como $dxdydz = \rho dz d\rho d\theta$ temos

$$\rho^2 dz d\rho d\theta = \rho\left(\rho dz d\rho d\theta\right) = \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz.$$

Assim, a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 dz d\rho d\theta$$

será dada por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 dz d\rho d\theta = \int_0^{2} \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx.$$

4.5. Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

As integrais triplas podem ser convertidas para coordenadas esféricas de acordo com o processo descrito a seguir (veja a figura 4.8)

Sejam $\theta_0, \theta_1, \phi_0, \phi_1, \rho_0$ e ρ_1 tais que $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho_0 < \rho_1$.

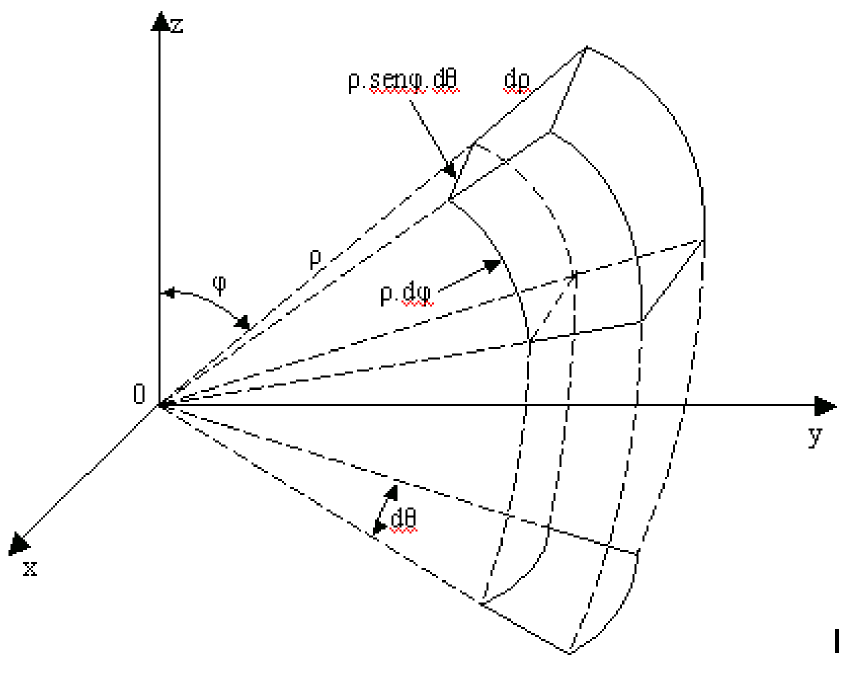


Figura 4.8: coordenadas esféricas

Suponhamos que o sólido S seja constituido por todos os pontos cujas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) tais que

$$\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \qquad \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta \qquad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$$

Lembrando que o ponto $P\left(x, y, z\right)$, em coordenadas esféricas é dado por $P\left(\rho, \theta, \phi\right)$ em que $x = \rho \cos\theta sen\phi$, $y = \rho sen\theta sen\phi$, $z = \rho\cos\phi$ e $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Considerando os acréscimos atribuidos a cada variável obtemos os pontos:

$$\begin{gathered} P\left(\rho, \theta, \phi\right) \\ Q\left(\rho, \theta, \phi + d\phi\right) \\ R\left(\rho, \theta + d\theta, \phi\right) \\ T\left(\rho + \rho d, \theta + d\theta, \phi\right) \end{gathered}$$

Também, podemos observar um paralelepípedo infinitesimal curvilíneo com dimensões $\left|\overline{PT}\right|$, $\left|\overline{QR}\right|$ e $\left|\overline{PQ}\right|$ cujo volume aproximado é

$$dV = \left|\overline{PT}\right|\left|\overline{QR}\right|\left|\overline{PQ}\right|.$$

É fácil ver que $\left|\overline{PT}\right|$ é a variação do raio ρ entre os pontos P e T e, portanto $\left|\overline{PT}\right| = d\rho$.

Como P e Q pertencem ao círculo de raio $\left|\overline{OP}\right| = \left|\overline{OQ}\right| = \rho$ e o arco $\widehat{PQ}$ subentende um ângulo correspondente a variação de ϕ segue que

$$\left|\overline{PQ}\right| \cong \rho d\phi.$$

Como Q e R pertencem ao círculo de raio $\left|\overline{OU}\right|$ em que $\left|\overline{OU}\right|$ é lado oposto do trângulo $O\widehat{Q}U$ e $\widehat{Q} = \phi$ obtemos

$$\left|\overline{OU}\right| = \left|\overline{OQ}\right| sen\phi = \rho sen\phi$$

e, desse modo obtemos

$$\left|\overline{QR}\right| \cong \rho sen\phi d\theta$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dV \quad &= \left|\overline{PT}\right|\left|\overline{QR}\right|\left|\overline{PQ}\right| \\ &= d\rho\left(\rho d\phi\right)\left(\rho sen\phi d\theta\right) \\ &\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

Lembrando que em coordenadas retangulares tem-se $dV = dxdydz$ e, portanto, a equivalência

$$dxdydz = \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

.

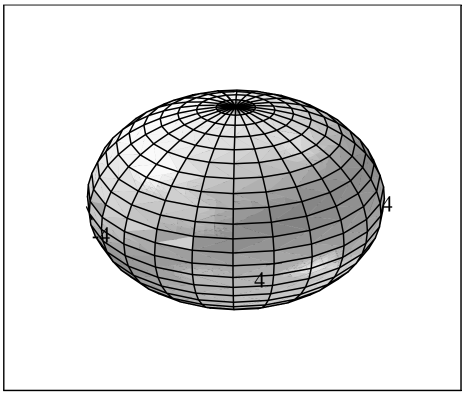
Seja $f(x, y, z)$ uma função definida em todos os pontos do sólido S e cada ponto $P(x, y, z)$ pode ser escrito em coordenadas esféricas $f(\rho, \theta, \phi)$. Então podemos escrever

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dzdydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi)\, \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

Exemplo 4.9. *Mostre, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$*

Vamos utilizar uma esfera centrada na origem de raio $r : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Portanto, a projeção no plano xy é uma circunferência $x^2+y^2 = r^2$ e portanto o $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e o $0 \leq \phi \leq \pi$.



$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

Exercise ção.1. *Escreva em coordenadas retangulares e após use coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nos pontos em que z é positivo.*

Solução: Primeiro vamos interpretar cada superfície. A equação $z^2 = x^2+y^2$ representa o cone inferior na figura abaixo, a equação $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ representa o cone superior e a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa a esfera. O problema pede para

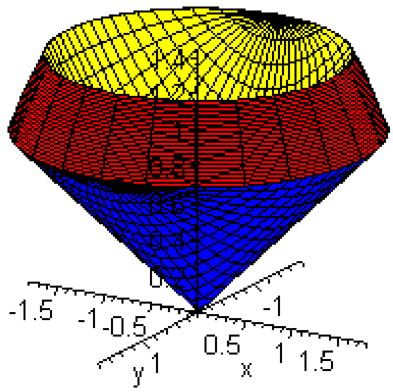


Figura 4.9: volume delimitado

determinar o volume do sólido dentro da esfera entre os dois cones. Veja a figura 4.9 no primeiro octante.

Vamos determinar as curvas de interseção e projetadas sobre o plano xy. Resolvemos os sistemas de equações $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} z^2 = 3x^2 + 3y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ temos, em ambos os casos, substituindo z^2 da primeira equação na segunda equação

$$\begin{array}{ccc} x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 4 & e & x^2 + y^2 + 3x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 4 & & 4x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2 & & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

O volume do sólido será dado pela diferença entre o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o volume do sólido delimitado pela esfera $z^2 = x^2 + y^2$ e o cone $z^2 = 3x^2 + 3y^2$. As tabelas de limtes são:

Tabela de limites para os sólidos

Curvas	um - equações	dois - equações
Curva à esquerda	$x = -\sqrt{2}$	$x = -1$
Curva à direita	$x = \sqrt{2}$	$x = 1$
Curva inferior	$y = -\sqrt{2 - x^2}$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$
Curva superior	$y = \sqrt{2 - x^2}$	$y = \sqrt{1 - x^2}$
Superfície inferior	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$
Superfície superior	$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$	$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$

Portanto, o volume será dado por

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}dzdydx-\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}dzdydx$$

Como podemos perceber a resolução da integral é trabalhosa. Vamos escrevê-la em coordenadas esféricas.

É facil ver que o arco θ varia de zero a 2π. Vamos determinar a variação do arco ϕ. O cone de equação $z^2=x^2+y^2$ intercepta o plano zx na da reta $z=x$. Sendo o coefiente angular dessa reta $tg\alpha=1$ segue que $\alpha=\frac{\pi}{4}$ e assim, também tem-se $\phi=\frac{\pi}{4}$. Já o cone de equação $z^2=3x^2+3y^2$ intercepta o plano zx na da reta $z=\sqrt{3}x$. Sendo o coeficiente angular dessa reta $tg\alpha=\sqrt{3}$, isto é $\alpha=\frac{\pi}{3}$, então, segue que $\phi=\frac{\pi}{6}$. Portanto, a tabela de limites do sólido em coordenadas esféricas é dada por:

Tabela de limites em coordenadas esféricas

Curvas	equações
Arco θ inferior	$\theta_1=0$
Arco θ superior	$\theta_2=2\pi$
Arco ϕ inferior	$\phi_1=\frac{\pi}{6}$
Arco ϕ superior	$\phi_2=\frac{\pi}{4}$
Superfície inferior	$\rho_1=0$
Superfície superior	$\rho_2=2$

Assim, o volume será dado por

$$V=\int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{2}\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^3}{3}|_0^2 sen\phi d\phi d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}sen\phi d\phi d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}-\frac{8}{3}\cos\phi|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=\int_{\theta=2\pi}^{\theta=0}\frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\theta|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

Exemplo 4.10. *Escreva em coordenadas retangulares a integral*

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 \rho sen\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Solução: O símbolo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ significa que a região de integração está situada no primeiro quadrante.

O símbolo $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ indica que o sólido de integração é delimitado pelos raios cujas retas tem coeficientes angulares $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

E o símbolo $\int_0^4$ indica que o sólido é também delimitado pela esfera de raio $\rho = 4$, ou seja $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Do coeficiente angular $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ obtemos as retas $z = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $z = \frac{\sqrt{3}}{3}y$ as quais pertencem a interseção do cone $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}$ com os planos xz e yz, respectivamente.

Do coeficiente angular $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ obtemos as retas $z = \sqrt{3}x$ e $z = \sqrt{3}y$ as quais pertencem a interseção do cone $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ com os planos xz e yz, respectivamente.

Resolvendo os sistemas de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}$ obtemos as curvas que delimitam a região de integração para o cálculo da integral relativa a parte da esfera que está localizada dentro de cada um dos cones.

Em ambos os casos, substituindo a segunda equação na primeira temos

$x^2 + y^2 + z^2 = 16$
$x^2 + y^2 + \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 16$
$\frac{4x^2}{3} + \frac{4y^2}{3} = 16$
$x^2 + y^2 = 12$
donde
$y = \sqrt{12 - x^2}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 16$
$3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2 = 16$
$x^2 + y^2 = 4$
donde
$y = \sqrt{4 - x^2}$

A integral

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 \rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

é dada pela diferença entre a integral calculada sobre o sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=16$ e $z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}$ e o sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=16$ e $z^2=3x^2+3y^2$. Como a integral está multiplicada por quatro significa que devemos considerar os quatro quadrantes. Assim, a tabela de limites para os sólidos de integração é dada por

limites	sólido I	sólido II
Curva a esquerda	$x=-\sqrt{12}$	$x=-2$
Curva a direita	$x=\sqrt{12}$	$x=2$
Curva a inferior	$y=-\sqrt{12-x^2}$	$y=-\sqrt{4-x^2}$
Curva a superior	$y=\sqrt{12-x^2}$	$y=\sqrt{4-x^2}$
Superfície inferior	$z=\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}$	$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$
Superfície superior	$z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}$	$z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}$

Também, sabemos que $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $dxdydz=\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$. Como temos $\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$ devemos fazer a equivalência como segue:

$$\begin{aligned}\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta &= \left(\frac{\rho}{\rho}\right)\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta\\ &= \frac{\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta}{\rho}\\ &= \frac{\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta}{\rho}\\ &= \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

Agora podemos escrever a integral

$$I=4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\frac{\pi}{3}}\int_{\rho=0}^{\rho=4}\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$$

é escrita em coordenadas retangulares como segue:

$$I=\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\frac{dzdydx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

4.6. Exercícios Referente ao Trabalho

Trabalho valendo até 2 pontos na nota da terceira prova . Para fazer jus aos dois pontos devem ser cumpridas as seguintes condições:

- Em cada problema construir um artefato que represente geometricamente o sólido sobre o qual será determinada a integral;
- Encontrar os limites do sólido de integração, fazer a tabela, representá-los na Integral;
- Apresentar à turma o artefato que representa o sólido descrito pelas superfícies;
- Apresentar à turma a tabela de limites e a representação da integral usando cartazes e/ou transparências (não será permitido o uso do quadro para esse fim);
- Entregar uma cópia de todos os exercícios resolvidos.

Observação 9. *O não cumprimento de um dos itens acima acarreta a perda de um ponto e o não cumprimento de dois dos itens acarretará a perda dos dois pontos.*

1. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $z = y^2$, $x = 0$ $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ e $z = -2$ Resp=$\frac{14}{3}$
2. Calcular o volume do sólido delimitado superiomente por $z = 4 - x - y$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e $z = 0$ Resp=$\frac{15}{4}$
3. Calcular o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$ Resp=$\frac{64}{3}$
4. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $y = 0$, $y = 1 - x^2$ e $x^2 + z = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{16}{15}$
5. Calcular o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x = 4-y^2$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ Resp=4
6. Calcular o volume do sólido , no primeiro octante, delimitado por $y + x = 2$ e $z = x^2 + y^2$ Resp=$\frac{8}{3}$
7. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $y^2 + x^2 = 2\sqrt{y^2 + x^2} + x$. Resp. $\frac{1123\pi}{16}$

8. Determinar o volume do sólido limitado acima pelo cilindro $z = 4 - x^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente por $z = 0$ Resp$=12\pi$

9. Determinar o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.Resp.$\frac{2}{3}$

10. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$y^2 + x^2 + z = 12$ e $3x^2 + 5y^2 - z = 0$. Resp.$6\sqrt{6}\pi$.

11. Determine o volume do sólido do primeiro octante, limitado inferiormente pelo plano xy, superiormente pelo plano $z = y$ e lateralmente pleo cilindro $y^2 = x$ e pelo plano $x = 1$ Resp$=\frac{1}{4}$

12. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$z = 4 - x^2$ e $z = 3x^2 + y^2$. Resp. 4π

13. Determine o volume da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4y$ Resp$=\frac{128\pi}{3}$

14. Calcular o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $y = x^2$, $x = y^2$ e $z + y = 2$ Resp$=\frac{31}{60}$

15. Determine o volume delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$ resp$=\frac{8\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$

16. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$ resp$=\frac{3\pi}{2}$

17. Calcular o volume do sólido delimitado por $z = 4x^2 + y^2$ e $z = 8 - 4x^2 - y^2$

18. Calcular o volume interno a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e externo ao parabolóide $x^2 + y^2 = 3z$

19. Encontre o volume acima do plano xy, limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$ Resp$=4\pi$

20. Determine o volume de $x = y^2$, $z = x$, $z = 0$ e $x = 1$ resp$=\frac{4}{5}$

21. Determine o volume que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$

22. Encontre o volume delimitado por $z^2 + x^2 + y^2 = 4$, $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ e $z^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$ nos pontos em que $z > 0$.

23. Determine o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 9$. Resp=$\frac{320}{3}$

4.7. Exercícios Gerais

1. Calcule a $\int\int_D .(x+3y)dA$, sendo D a região triangular de vértices $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$ resp 2

2. Calcule $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$, sendo D a região do semiplano $x \geqslant 0$ interna à cardióide $\rho = 1 = \cos\theta$ e externa à circunferência $\rho = 1$

3. Determinar a área delimitada pelas curvas

   $$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}.\ resposta = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

4. O centro de uma esfera de raio r está sobre a superfície de um cilíndro reto cuja base tem raio igual a $\frac{r}{2}$. Encontre a área da superfície cilíndrica que fica no interior da esfera. Resposta $4r^2$.

5. Encontrar a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 2ay$ que fica no interior do parabolóide $by = x^2+z^2$. Resposta $2\pi ab$.

6. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2 = a^2b^2$ e $x^2+y^2 = ax$. Resp $\frac{2a^2b(3\pi-4)}{9}$.

7. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $x^2+y^2+z^2 = 8$ e $x^2+y^2 = 2z$. Resp $\frac{4\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$.

8. Calcular $I = \int\int_T\int(x-1)dv$, sendo T a região do espaço delimitada pelos planos $y = 0,\ z = 0,\ \ y+z = 5$ e pelo cilindro parabólico $z = 4-x^2$. Resp $\frac{-144}{15}$

9. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
   $z = 0,\ z^2 = x^2+y^2$ e $x^2+y^2 = 2ax$. Resp: $\frac{32a^3}{9}$

10. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
    $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0$ e $z = 0$. Resp $\frac{abc}{6}$.

11. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies

    $x^2+y^2+2y = 0,\ z = 0,\ z = 4+y$

12. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$. Resp $\frac{16a^3}{3}$.

13. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies
$\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$. Resp $\frac{3\pi}{2}$.

14. Encontrar a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$. Resp $\frac{\pi[(\sqrt{17})^3 - 1]}{6}$.

15. Nos itens abaixo escreva em coordenadas retangulares as integrais.

    1. $\int_0^\pi 2 \int_0^3 \int_2^{\rho^2} \sqrt{9 - \rho^2}\rho dz d\rho d\theta$.
    2. $\int_0^\pi 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \sqrt{9 - \rho^2} sen\phi d\rho d\phi d\theta$.
    3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^4 \sqrt{4 - \rho^2}\rho sen\phi d\rho d\phi d\theta$.